Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Cálculo en Varias Variables

Visualización Interactiva. Wolfram CDFPlayer
2da edición

Walter Mora F.

2020

Revista digital
Matemática, Educación e *Internet*
http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Walter Mora F.

Cálculo en Varias Variables

Segunda edición

Visualización Interactiva con Wolfram CDFPlayer (libre)

Esta versión del libro necesita conexión a Internet

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer

https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Revista

Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/).

Copyright© Revista digital Matemática Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Correo Electrónico: wmora2@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Mora Flores, Walter.
Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva. 2da ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2019.
492 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9930-541-44-9
1. Cálculo. 2. Integral doble y triple 3. Integral de línea y superficie.

Derechos reservados © 2019

Revista digital
Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/.

Viviana Loaiza: Fotografías del Parque Nacional Chirripó, Costa Rica.

Prof. Walter Mora F.
Contenido,
diseño editorial y edición LaTeX,
aplicaciones Wolfram CDF
y gráficos (Wolfram Mathematica 11.3, Gimp e Inkscape).

Este material se distribuye bajo licencia Craetive Commons "Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional" (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es)

Citar como:

Walter Mora F. *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva.* (2019) 2da ed. [ebook] Cartago, Costa Rica. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/. [Recuperado el Agosto, 2020].

Índice general

Prólogo

El objetivo de este libro es la visualización interactiva en 2D y en 3D. La mayoría de los gráficos, vienen con una liga a una aplicación, llamada usualmente “demostración” (aplicación interactiva), que se corre con Wolfram CDFPlayer (libre). Las “aplicaciones interactivas” son un archivo `.cdf` que se ejecuta con WOLFRAM CDFPLAYER y requieren haber instalado en la computadora esta aplicación WOLFRAM CDFPLAYER. La aplicación es gratuita. Esta es una nueva edición donde se ha optimizado las aplicaciones cdf y se han agregado dos capítulos: Vectores, Rectas y Planos (y también coordenadas polares), Parametrizacion y Funciones Vectoriales. Muchos de los ejemplos y ejercicios de este libro han aparecido en exámenes, en el curso de Cálculo Superior del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

El lector puede visualizar la teoría y muchos de los ejemplos, e interactuar con las figuras en la aplicación interactiva, usando el ratón. La idea es visualizar no solo el espacio tridimensional, también poder entrenar en visualizar cortes de superficies, intersecciones y proyecciones de una superficie o un sólido, en algunos de los planos XY, XZ o YZ. Este conocimiento se aplica después en el cálculo de integrales dobles, triples, de línea y de superficie. Varias aplicaciones interactivas se usan para visualizar la dinámica de una definición o un teorema y su alcance y significado. Como es conocido, la visualización interactiva funciona bien como complemento y requiere “narrativa” por parte del profesor, para obtener buenos resultados en la enseñanza. También es deseable ejercicios de verbalización, en algunas actividades, por parte del estudiante

Este libro tiene dos opciones: Con la “opción 1”, el libro viene con un folder CSCDF con las aplicaciones interactivas .cdf. Con la “opción 2” el libro solo es un pdf con ligas a Internet (la liga descarga la aplicación interactiva desde Internet, y el CDFPlayer la ejecuta).

PROF. WALTER MORA F.
wmora2@gmail.com
Escuela de Matemática
Revista digital Matemática, Educación e Internet
`https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/`
Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago, Agosto 2020.

1 — Vectores, rectas y planos

Muchas de los teoremas del cálculo en varias variables requieren la noción de vector y los cálculos básicos con vectores. Este capítulo es un resumen de la obra "Vizualización interactiva. Vectores Rectas y Planos" [21].

1.1 Vectores

Puntos. A partir de la representación de $\mathbb{R}$, como una recta numérica, los elementos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se asocian con puntos de un plano definido por dos rectas perpendiculares que al mismo tiempo definen un sistema de coordenadas rectangulares donde la interseccón representa al origen de coordenadas $(0, 0)$ y cada par ordenado (a, b) se asocia con un punto de coordenada a en la recta horizontal (eje X) y la coordenada b en la recta vertical (eje Y). Análogamente, los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se asocian con puntos en el espacio tridimensional definido con tres rectas mutuamente perpendiculares. Estas rectas forman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares (ejes X, Y y Z).

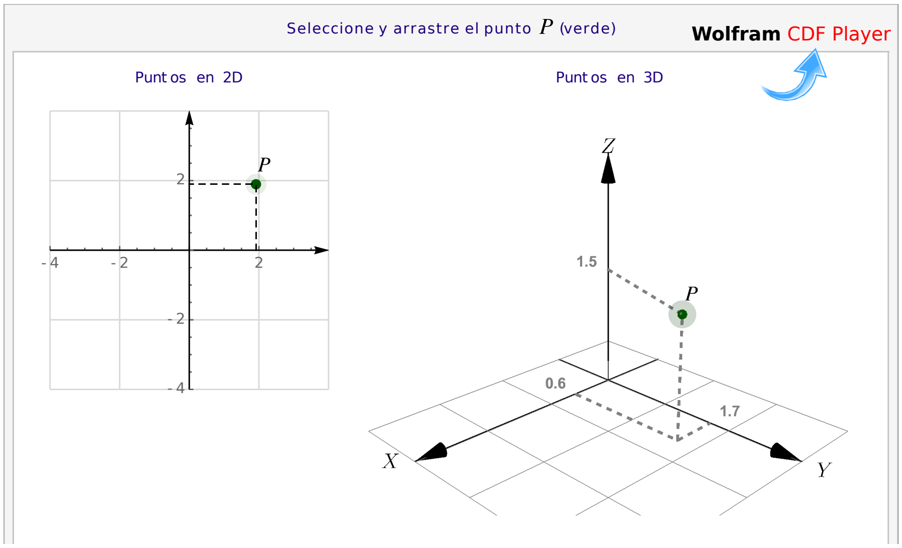


Figura 1.1: Un punto P en dos y en tres dimensiones

Vectores. En física, la velocidad y dirección de un flujo en un punto puede estar representada por una flecha. La longitud de la flecha representa la velocidad del flujo en ese punto y la orientación de la flecha indica la dirección del movimiento en ese punto. A estas flechas se les llaman vectores. En general, los "vectores" son simplemente los elementos de conjuntos más generales llamados "espacios vectoriales".

Los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ se pueden ver como conjuntos de puntos tanto como conjuntos de vectores. Recordemos que

- $\mathbb{R}^2 = \{(v_1, v_2) \quad \text{tal que} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \quad \text{tal que} \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, ..., v_n) \quad \text{tal que} \quad v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}\}$

Notación. Los puntos se denotan con las letras mayúsculas, P, Q, R etc. mientras que los vectores se denotan como $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$... o también como $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. El vector nulo en $\mathbb{R}^n$ se denota con $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$. A veces consideramos los vectores que van desde el origen $O = (0, 0, ..., 0)$ hasta el punto P, en este caso escribimos $\mathbf{OP}$. Los vectores que van desde el punto P_1 hasta el punto P_2 los denotamos con $\mathbf{P_1P_2}$. En el contexto de los vectores, los números reales serán llamados *escalares* y se denotarán con letras minúsculas cursivas tales como α, β, k, etc.

Algunos cálculos requieren combinar las notaciones de puntos y vectores porque lo que se requiere es usar solamente las coordenadas.

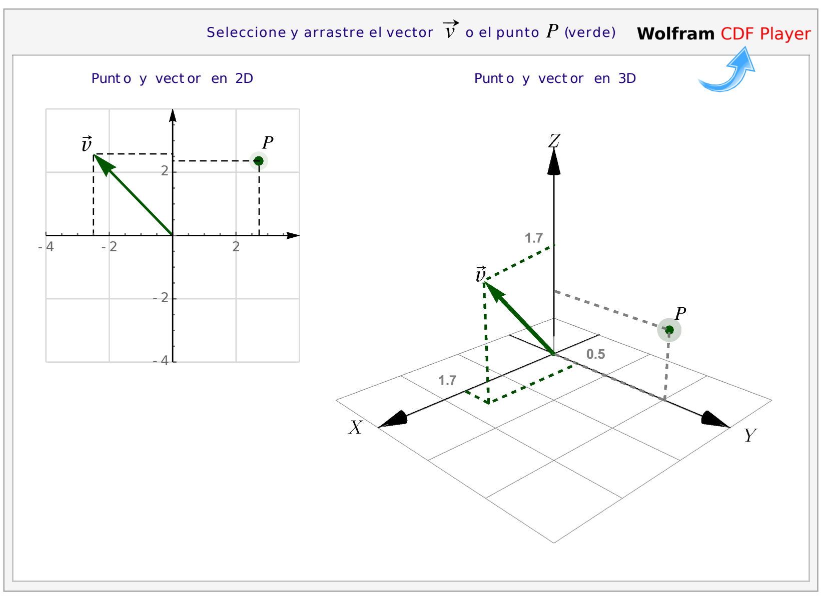


Figura 1.2: Un punto P y un vector $\mathbf{v}$, en dos y en tres dimensiones

Traslación. Muchas veces necesitamos hacer traslaciones de un vector $\mathbf{v}$ hasta el punto P. La traslación de $\mathbf{v}$ conserva de su magnitud y su dirección y su cola está en el punto P mientras que la punta está en el punto $P + v$.

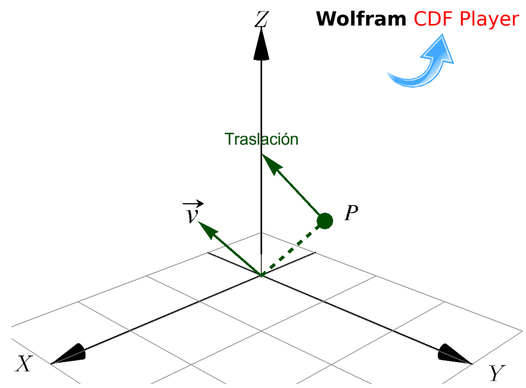


Figura 1.3: Traslación de un vector **v** a un punto P

1.2 Operaciones Básicas

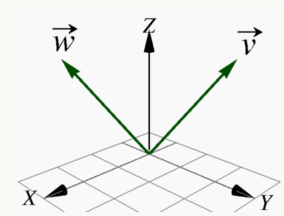
Igualdad. Dos vectores son iguales si tienen, en el mismo orden, los mismos componentes.

Definición 1.1 (Igualdad).

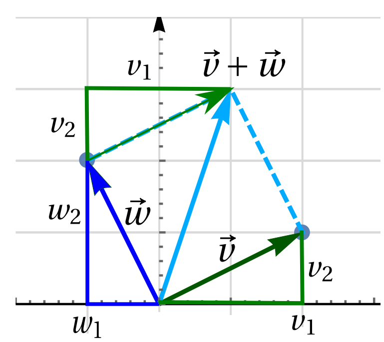
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ si y sólo si $v_1 = w_1,\ \ v_2 = w_2,\ \ ...,\ v_n = w_n$. En particular, si $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ si y sólo si $v_1 = w_1,\ \ v_2 = w_2,\ \ v_3 = w_3$.

Ejemplo 1.1

Sea $\mathbf{v} = (1,3,3)$ y $\mathbf{w} = (3,1,3)$, entonces $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.



Suma y resta. En un vector cada componente se interpreta como un desplazamiento en la dirección del eje respectivo, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ entonces el vector suma tiene como primera componente la suma de los desplazamientos en en el eje X, es decir, $v_1 + w_1$ y como segunda componente la suma de los desplazamientos en en el eje Y, es decir, $v_2 + w_2$. Así $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)$.



Es natural definir la suma y resta de vectores en $\mathbb{R}^n$ como una suma o resta, componente a componente.

Definición 1.2 (Suma).

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n)$. En particular, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

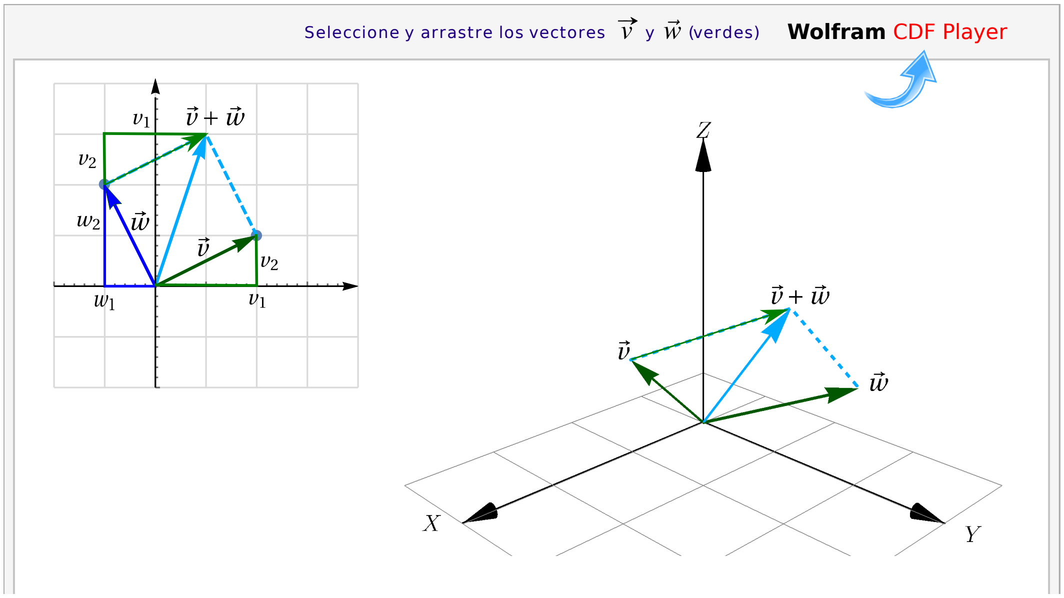


Figura 1.4: Suma de vectores

Definición 1.3 (Resta).

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, ..., v_n - w_n)$. En particular, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$

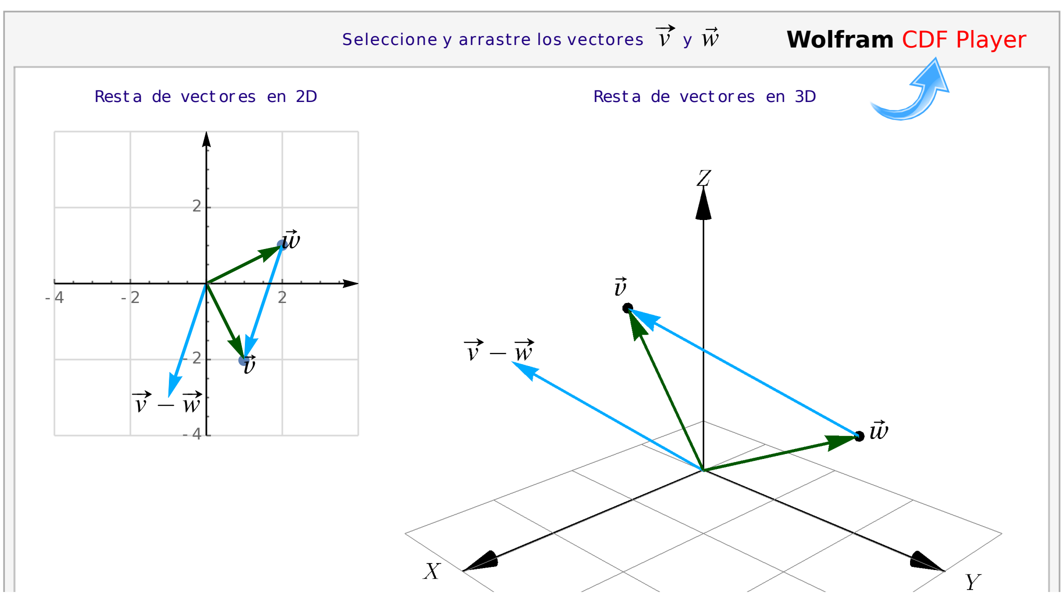
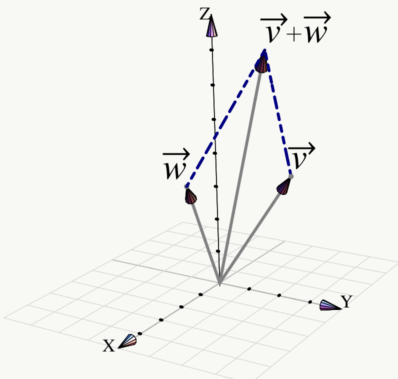


Figura 1.5: Resta de vectores

Ejemplo 1.2

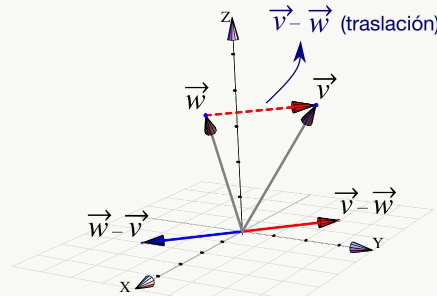
a.) Sea $\mathbf{v} = (1,3,4)$ y $\mathbf{w} = (3,1,4)$, entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1+3,\ 3+1,\ 4+4) = (4,4,8)$$



b.) Sea $\mathbf{v} = (1,3,4)$ y $\mathbf{w} = (3,1,4)$, entonces

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (-2,2,0) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} - \mathbf{v} = (2,-2,0).$$



Definición 1.4 (Vector desplazamiento)

Dados dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, el vector de desplazamiento de P a Q es

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} - \mathbf{OP} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

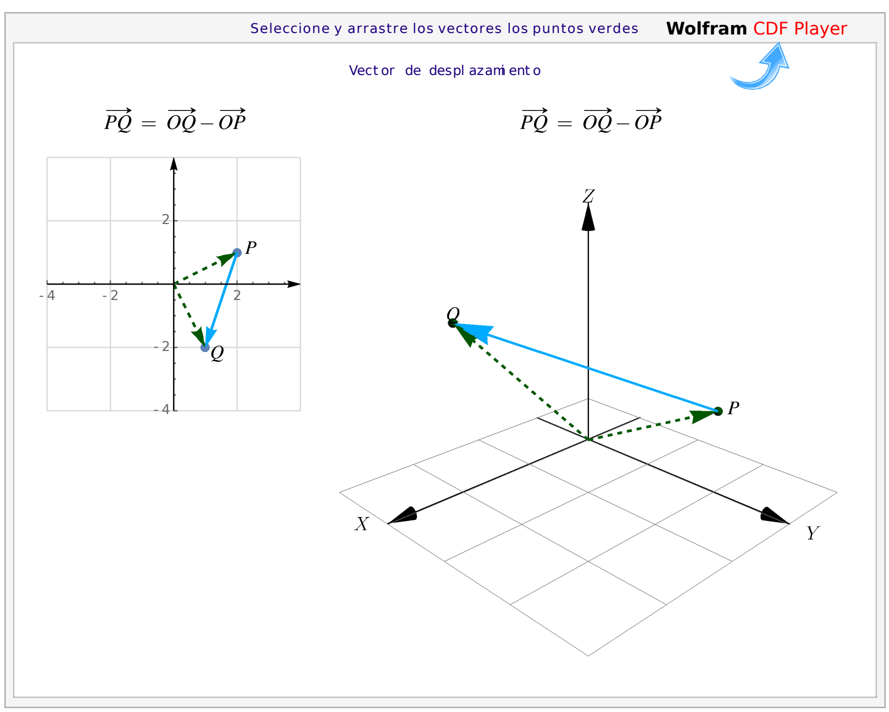
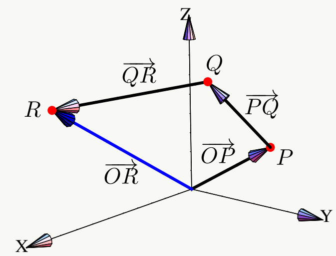


Figura 1.6: Vector desplazamiento de P a Q

Ejemplo 1.3

Sea $P = (0,3,1)$, $Q = (1,2,4)$ y $R = (10,1,6)$. Entonces

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} + \mathbf{QR}.$$



Paralelogramos. Dados tres puntos no colineales P, Q, $R \in \mathbb{R}^3$, podemos construir un paralelogramo con tres de sus vértices en estos puntos y determinamos un cuarto punto usando suma, resta y traslación de vectores. En efecto, si consideramos los vectores **PQ** y **PR** entonces el cuarto vértice S cumple

$$\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} + \mathbf{PR}$$

es decir, el cuarto vértice S sería

$$S = Q - P + R - P + P = Q + R - P$$

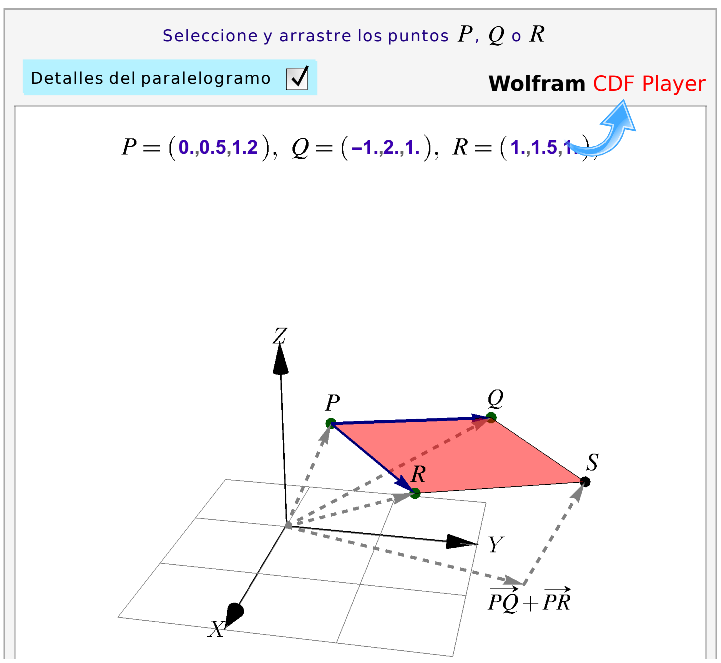


Figura 1.7: Paralelogramo de vértices P, Q, R y $S = Q + R - P$

Ejemplo 1.4

Sea $P = (1,2,-1)$, $Q = (1,4,3)$ y $R = (1,-1,5)$. Nos interesa determinar un punto S de manera que $PQRS$ sea un paralelogramo. Si se considera el paralelogramo con lados **PQ** y **PR** unidos por el vértice P, por la interpretación de la suma, el vértice opuesto a P, que es el vértice que denominamos como S, cumple con la igualdad:

$$\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} + \mathbf{PR},$$

es decir, $S = Q - P + R - P + P = (0,2,4) + (0,-3,6) + (1,2,-1) = (1,1,9)$

Multiplicación por un escalar. Un escalamiento de un vector, por un factor $k \in \mathbb{R}$, se logra multiplicando cada componente por el mismo número real k

Definición 1.5 (Multiplicación por un escalar).

Consideremos el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ y el escalar $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, ..., kv_n)$. En particular, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y el escalar $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$

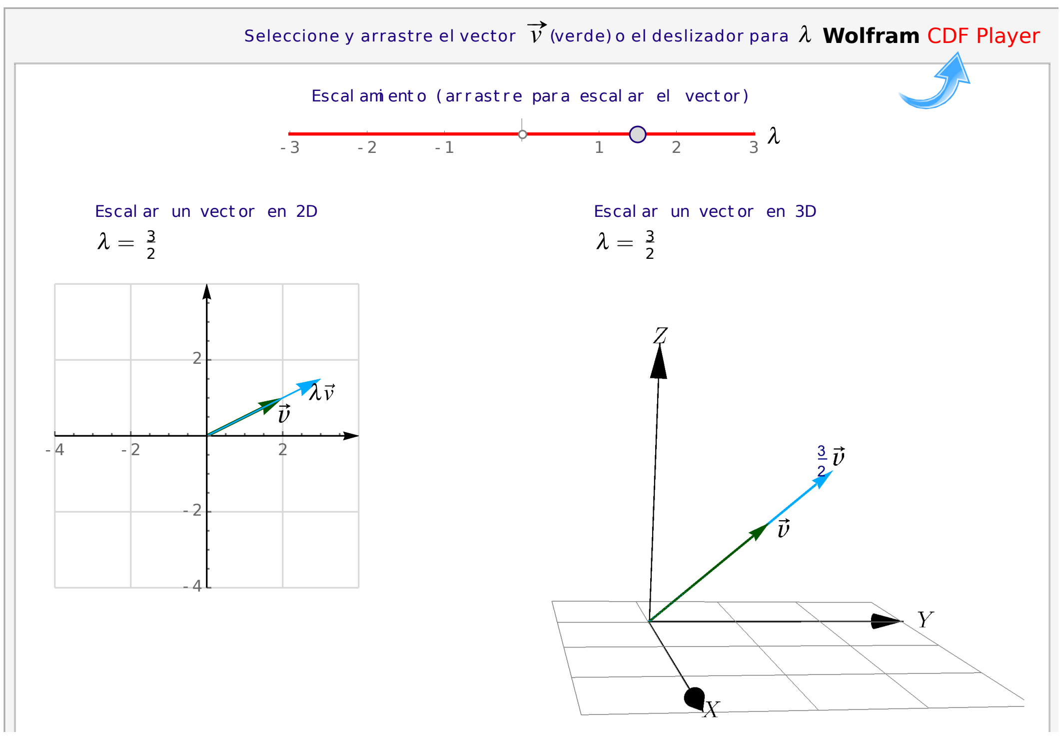


Figura 1.8: Escalamiento de $\mathbf{v}$

Ejemplo 1.5

Sea $\mathbf{v} = (1,3,4)$ entonces $\begin{cases} 2\mathbf{v} & = & (2,6,8) \\ \frac{1}{2}\mathbf{v} & = & \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right) \end{cases}$

Vector unitario. Un vector $\mathbf{v}$ es unitario si longitud es 1

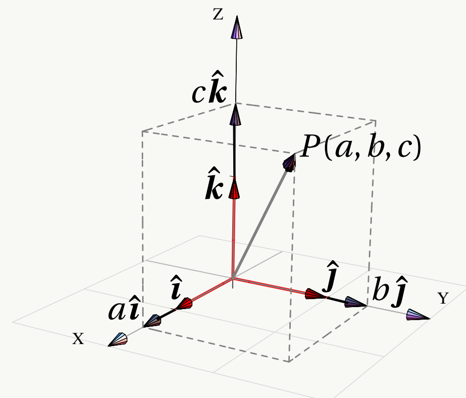
Ejemplo 1.6 (Vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$)

Hay tres vectores unitarios muy usados:

a.) $\hat{\mathbf{\imath}} = (1,0,0)$

b.) $\hat{\mathbf{\jmath}} = (0,1,0)$

c.) $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$



Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal de estos tres vectores:

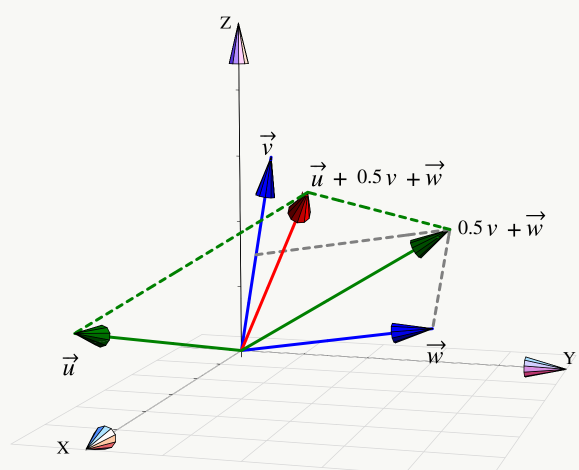
$$(a,b,c) = a\ \hat{\mathbf{\imath}} + b\ \hat{\mathbf{\jmath}} + c\ \hat{\mathbf{k}}$$

Ejemplo 1.7 (Combinación lineal de dos o más vectores)

Sea $\mathbf{u} = (4,-1,1), \mathbf{v} = (0,0.5,3)$ y $\mathbf{w} = (0,3,0.5)$.

$$\begin{aligned} \text{a.) } \mathbf{u} + 0.5\,\mathbf{v} + \mathbf{w} &= (4,-1,1) + [0.5\,(0,0.5,3) + (0,3,0.5)] \\ &= (4,-1,1) + (0,3.25,2) \\ &= (4,2.25,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \mathbf{u} + t\,\mathbf{v} + s\mathbf{w} &= (4,-1,1) + [t\,(0,0.5,3) + s\,(0,3,0.5)] \\ &= (4,-1,1) + (0,\ \ 3s + 0.5t,\ \ 0.5s + 3t) \\ &= (4,\ \ -1 + 3s + 0.5t,\ \ 1 + 0.5s + 3t) \end{aligned}$$



1.3 Propiedades de los vectores

Las propiedades más útiles de los vectores, según lo que ha demostrado la experiencia, se enuncian en el siguiente teorema,

Teorema 1.1 (Propiedades de los vectores).

Si $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces,

1.) Conmutatividad: $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$

2.) Asociatividad: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

3.) Elemento neutro: $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

4.) Inversos: $\mathbf{v}+\ -\mathbf{v}=\mathbf{0}$

5.) $1\,\mathbf{v}=\mathbf{v}$

6.) $\alpha\,\beta\mathbf{v}=\alpha\,(\beta\mathbf{v})$

7.) $\alpha\,(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\alpha\mathbf{v}+\alpha\mathbf{w}$

8.) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$

1.4 Producto punto y norma.

El producto punto (o escalar) es una operación entre vectores que devuelve un escalar. Esta operación es introducida para expresar algebraicamente la idea geométrica de magnitud y ángulo entre vectores.

Definición 1.6 (Producto punto o interior).

Si $\mathbf{v}=(v_1, v_2, ..., v_n)$, $\mathbf{w}=(w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces el producto punto (o escalar) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ se define de la siguiente manera,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=v_1\cdot w_1\ +\ v_2\cdot w_2+, ..., +v_n\cdot w_n \in \mathbb{R}$$

En particular, si $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=v_1\cdot w_1\ +\ v_2\cdot w_2+v_3\cdot w_3 \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1.8

a.) Sean $\mathbf{v}=(-1,3,4)$ y $\mathbf{w}=(1,0,\sqrt{2})$ entonces

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \;=\; -1\cdot 1+3\cdot 0+4\cdot\sqrt{2} \;=\; 4\sqrt{2}-1$$

b.) Sea $\mathbf{u}=(a,b,c)$ entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \;=\; a^2+b^2+c^2$$

De aquí se deduce que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant 0$ y que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ solamente si $\mathbf{u}=0$.

Derechos Reservados © 2020 Revista digital Matemática, Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

Ejemplo 1.9

Sea $A = (2,-1,1)$, $B = (-1,1,0)$ y el vector $\mathbf{a} = (3,-2,3)$. Entonces si $\mathbf{b} = \mathbf{AB}$ se cumple

$$\mathbf{AB} = (-1,1,0) - (2,-1,1) = (-3,2,-1)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3,-2,3) \cdot (-3,2,-1) = -9 + -4 + -3 = -16$$

Propiedades del producto punto. En los cálculos que usan el producto punto es frecuente invocar las propiedades que se enuncian en le teorema que sigue. También, el producto punto se generaliza como el *producto interno* (en contraposición con el *producto exterior*). Las propiedades que permanecen en esta generalización son,

Teorema 1.2 (Propiedades del producto punto).

Consideremos los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

1.) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (el producto punto es *definido positivo*)
2.) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
3.) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4.) $(\alpha \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

Ejemplo 1.10

Es claro que si se cumple la igualdad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ no es válido afirmar que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Consideremos un contraejemplo con vectores en $\mathbb{R}^3$; siendo $\mathbf{u} = (4,-1,2)$, $\mathbf{v} = (1,2,-1)$ y $\mathbf{w} = (0,2,1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4,-1,2) \cdot (1,2,-1) = 0 \\ \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (4,-1,2) \cdot (0,2,1) = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{w}$$

Norma (Euclidiana). La norma define la longitud de un vector desde el punto de vista de la geometría euclideana

Definición 1.7 (Norma).

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces la norma de este vector se denota $||\mathbf{v}||$ y se define de la siguiente manera,

$$||\mathbf{v}|| \;=\; \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$$

En particular, si $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$||\mathbf{w}|| \;=\; \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$$

$$||\mathbf{v}|| \;=\; \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

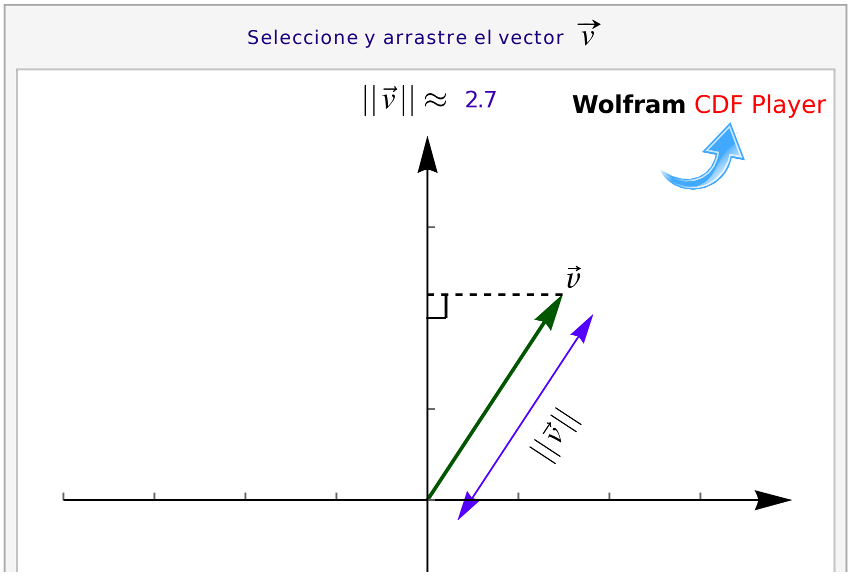


Figura 1.9: Norma de $\mathbf{v}$

Observemos que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2$ y que la distancia de A a B es $d(A,B) = ||B-A||$.

Ejemplo 1.11

a.) Sea $\mathbf{w} = (1,0,\sqrt{2})$ entonces $||\mathbf{w}|| = \sqrt{1^2+0^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

b.) La distancia de $A=(x,y,z)$ a $B=(1,-3,2)$ es $||B-A|| = \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2}$

Definición 1.8 (Vector unitario).
Un vector $\mathbf{v}$ se dice unitario si su norma es 1. Es común escribir $\hat{\mathbf{v}}$ para indicar que este vector es unitario.

- Observe que si $||\mathbf{v}|| \neq 0$ entonces $\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$ es unitario
- El vector $\mathbf{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$ es unitario para todo $\theta \in \mathbb{R}$, pues $||(\cos\theta,\sin\theta)|| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$.

Teorema 1.3 (Propiedades de la norma).

Consideremos los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces,

a.) $||\mathbf{v}|| \geqslant 0$ y $||\mathbf{v}|| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

b.) $||\alpha \mathbf{v}|| = |\alpha| \, ||\mathbf{v}||$

c.) $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leqslant ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$ (desigualdad triangular)

d.) $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leqslant ||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}||$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Ejemplo 1.12

a.) (Vectores unitarios) Sea $\mathbf{w} = (1,0,2)$, entonces

$$\left|\left|\frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}\right|\right| = \left|\left|\frac{1}{||\mathbf{w}||}\,\mathbf{w}\right|\right| = \left|\frac{1}{||\mathbf{w}||}\right| \, ||\mathbf{w}|| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

b.) Sea $\mathbf{w} = (1,0,2)$ entonces $||-2\mathbf{w}|| = 2\,||\mathbf{w}|| = 2\sqrt{5}$

1.5 Ángulo entre vectores.

Razonando en $\mathbb{R}^3$, a partir de la *Ley de los cosenos* podemos establecer una relación entre el producto punto, normas y ángulos, como se muestra a continuación.

Ley de los cosenos. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario, se tiene la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b.

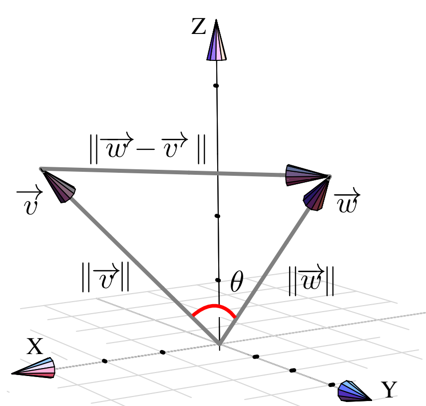


Figura 1.10: Ángulo entre dos vectores usando ley de cosenos

Para visualizar esta ley usando vectores, consideremos el triángulo determinado por los vectors $\mathbf{v}, \ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, como se muestra en la figura. Entonces

$$||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 - 2||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}|| \cos\theta \quad (*)$$

ahora, puesto que

$$||\mathbf{v} - \mathbf{w}||^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Derechos Reservados © 2020 Revista digital Matemática, Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

entonces, despejando en (*) obtenemos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||\,\cos\theta$$

Ángulo entre vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leqslant ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||$$

y, por la propiedad del valor absoluto $|x| \leqslant k \iff -k \leqslant x \leqslant k$ para un número $k \geqslant 0$, obtenemos

$$-||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| \leqslant \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \leqslant ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||$$

y entonces

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||} \leqslant 1.$$

Por tanto, se puede garantizar que para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vectores no nulos, siempre es posible encontrar un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||\,\cos\theta$. Formalmente,

Definición 1.9

Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, denotado $\measuredangle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, es el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||\,\cos\theta, \qquad i.e.\quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}\right),$$

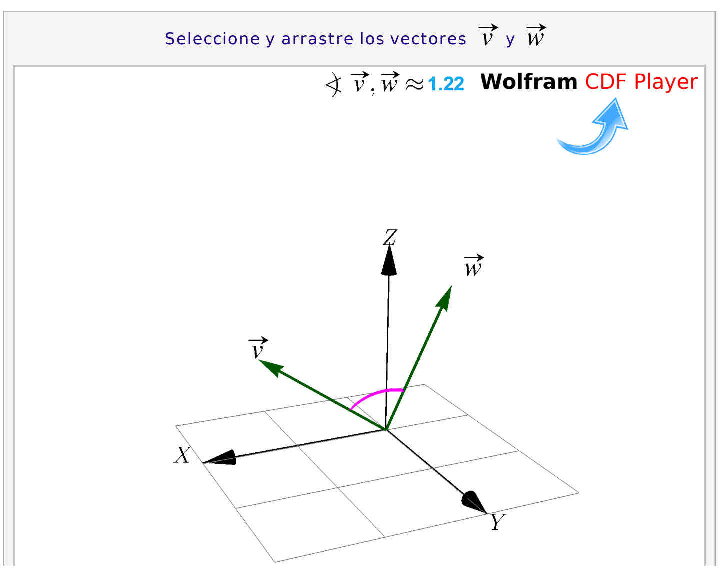


Figura 1.11: Ángulo entre vectores

Dos vectores son ortogonales si al menos uno de ellos es nulo o si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ y son paralelos si son colineales. Por ejemplo, si tenemos dos vectores no nulos $\mathbf{v} = (x, y)$ y $\mathbf{w} = (-y, x)$, estos vectores son perpendiculares pues $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \implies \theta = \pi/2$.

Definición 1.10 (Paralelismo y perpendicularidad)

Dos vectores no nulos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

a.) son paralelos si $\measuredangle\ \mathbf{u}, \mathbf{v} = 0$ o $\measuredangle\ \mathbf{u}, \mathbf{v} = \pi$, *i.e.* $\mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

b.) son perpendiculares si $\measuredangle\ \mathbf{u}, \mathbf{v} = \pi/2$. En este caso $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Los cosenos directores de un vector no nulo, son las componentes de un vector unitario.

Sea $\mathbf{w} = \mathbf{OP} = (w_1, w_2, w_3)$, sus cosenos directores son,

$$\cos\alpha = \frac{w_1}{||\mathbf{w}||}, \quad \cos\beta = \frac{w_2}{||\mathbf{w}||}, \quad \cos\gamma = \frac{w_3}{||\mathbf{w}||}$$

donde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ son los ángulos directores de $\mathbf{w}$

α: ángulo entre $\mathbf{OP}$ y la parte positiva del eje X

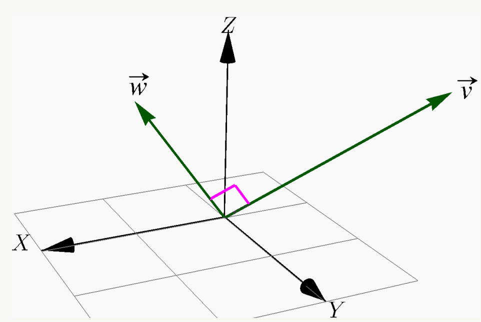
β: ángulo entre $\mathbf{OP}$ y la parte positiva del eje Y

γ: ángulo entre $\mathbf{OP}$ y la parte positiva del eje Z

- Observe que en este caso, si $\mathbf{w}$ es unitario, entonces $\mathbf{w} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

Ejemplo 1.13

Sean $\mathbf{w} = (1, 0, \sqrt{2})$ y $\mathbf{v} = (-2, 1, \sqrt{2})$ entonces $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales pues $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = -2 + 2 = 0$



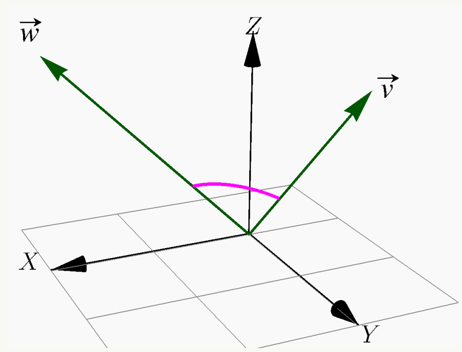
Ejemplo 1.14

Sean $\mathbf{w} = (2,0,2)$ y $\mathbf{v} = (0,2,2)$ entonces el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/3;$$

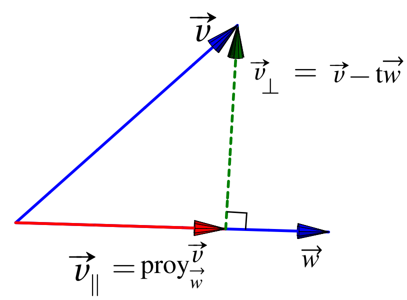
pues,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||} \quad\Longrightarrow\quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$



1.6 Proyección ortogonal

Geométricamente lo que queremos es determinar el vector que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ sobre el vector $\mathbf{w}$. Si denotamos a este vector con $\text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ entonces, de acuerdo con la figura, se debe cumplir que



$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} & = & t\,\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot(\mathbf{v} - t\,\mathbf{w}) & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} & = & t\,\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{w}\cdot t\,\mathbf{w} & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} & = & t\,\mathbf{w} \\ t & = & \dfrac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}} \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w}$$

Definición 1.11 (Proyección ortogonal de v sobre w).

Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Se llama proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$ al vector

$$\text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \underbrace{\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{w}||^2}}_{\text{escalar}} \; \underbrace{\mathbf{w}}_{\text{vector}}$$

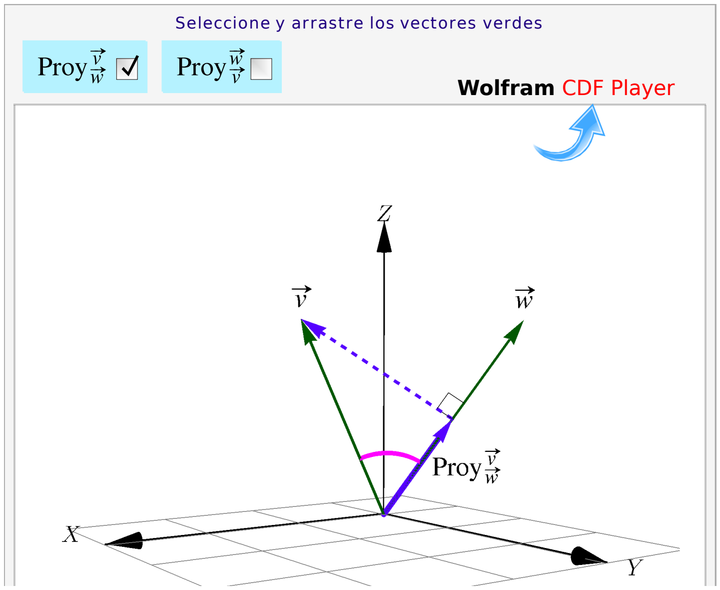


Figura 1.12: Proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$

- Calculando $\left\|\text{proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}\right\|$ obtenemos que $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| = \left\|\text{proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}\right\| \cdot ||w||$. Si ponemos $\lambda = \left\|\text{proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}\right\|$ entonces, el producto punto de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es "λ veces la longitud de $\mathbf{w}$".

- Al vector $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ se le conoce como "la componente de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{w}$". La componente paralela es $\mathbf{v}_{||} = \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$.

- Si $\theta = \sphericalangle\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in [0,\pi/2]$ entonces

$$\left\|\text{proy}_{\vec{w}}^{\vec{v}}\right\| = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = ||\mathbf{v}||\cos\theta \quad \text{pues} \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}$$

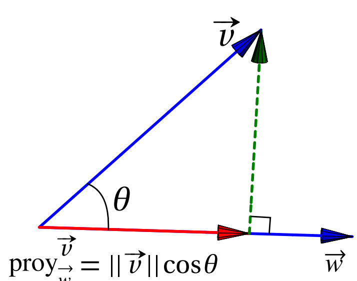


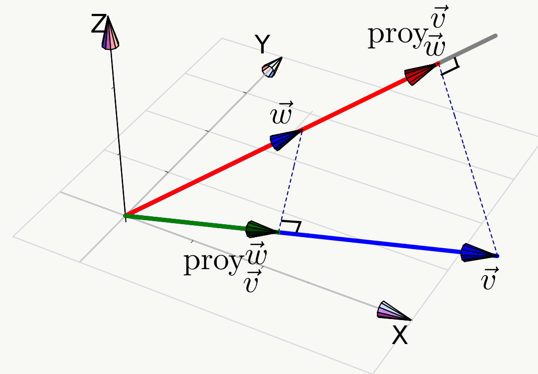
Figura 1.13: Proyección usando el ángulo

Ejemplo 1.15

Sean $\mathbf{v} = (5, 0, \sqrt{2})$ y $\mathbf{v} = (2, 1, \sqrt{2})$ entonces

$$\text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\, \mathbf{w} = \frac{12}{7}\,(2, 1, \sqrt{2}) = \left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{12\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\, \mathbf{v} = \frac{12}{27}\,(5, 0, \sqrt{2}) = \left(\frac{60}{27}, 0, \frac{12\sqrt{2}}{27}\right)$$

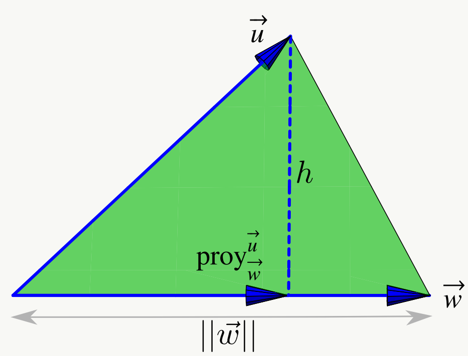


Ejemplo 1.16

Consideremos un triángulo determinado por los puntos $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. Podemos calcular la altura y el área de la siguiente manera,

Sean $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{w} = \mathbf{AC}$, entonces la altura es $h = ||\mathbf{v} - \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}||$. Luego, como la base mide $||\mathbf{w}||$, entonces

$$\text{Área} = \frac{||\mathbf{w}||\; ||\mathbf{v} - \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}||}{2}$$



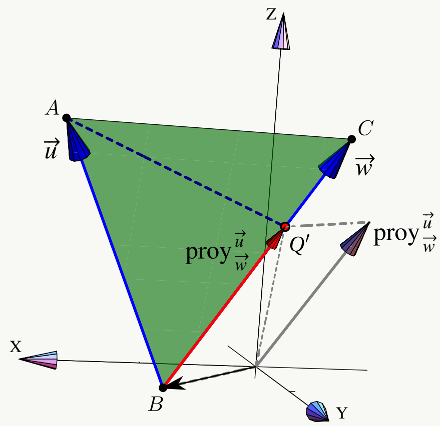
Ejemplo 1.17

Sea $A = (2, 2, 2)$, $B = (1, 1, 0)$ y $C = (0, 2, 2)$. Nos interesa Calcular el punto Q' en el segmento BC tal que el segmento AE sea la "altura" del triángulo $\triangle ABC$ sobre este segmento.

Sean $\mathbf{v} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{w} = \mathbf{BC}$, usando proyecciones observamos que el punto buscado es

$$Q' = \mathbf{B} + \text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}.$$

Q' se puede obtener como la suma de los vectores $\mathbf{Q}$ y $\text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ o también, como la traslación de $\text{proy}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ al punto B.



1.7 Producto Cruz en $\mathbb{R}^3$

El producto cruz entre dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, es un vector que es simúltaneamente perpendicular a cada uno de los vectores. Se usa la notacion $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para este producto.

Definición 1.12

Consideremos los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se define de la siguiente manera,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, \hat{\mathbf{i}} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\, \hat{\mathbf{j}} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, \hat{\mathbf{k}}$$

Un recurso nemotécnico es ver la fórmula como la multiplicación de las diagonales de un arreglo 3×3 (el determinante de una matriz). En los productos de las diagonales que van de izquierda a derecha, se les debe cambiar el signo.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \\ \end{array}$$
$$(5, 0, \sqrt{2}) \times (2, 1, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (0 - \sqrt{2},\ 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2},\ 5 - 0)$$

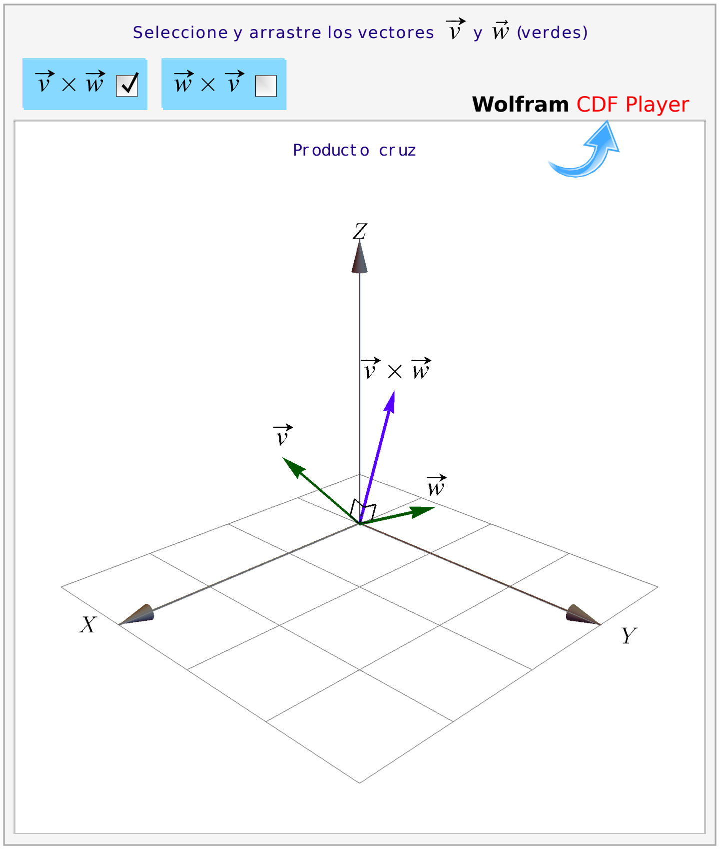
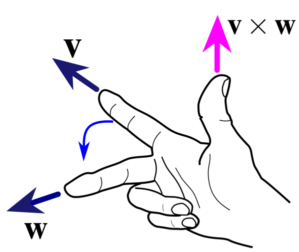


Figura 1.14: Producto cruz

La posición del vector $v \times w$ se puede establecer con la "regla de la mano derecha",



Ejemplo 1.18

- Si $\hat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\hat{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ y $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$; entonces

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

- Sean $\mathbf{u} = (5,0,\sqrt{2})$ y $\mathbf{v} = (2,1,\sqrt{2})$ entonces

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} \quad = \quad \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad = \quad (-\sqrt{2},\ -3\sqrt{2},\ 5)$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{u} \quad = \quad \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad = \quad (\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ -5)$$

Ejemplo 1.19

Dados los vectores $\mathbf{u} = 3\,\hat{\mathbf{\imath}} - \hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}$ se tiene que

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} \\ 3 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,4)$$

Además, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. En efecto

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6+2+4 = 0$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2-2+4 = 0$$

Ejemplo 1.20

Vamos a determinar un vector unitario y ortogonal a los vectores $(2,-2,3)$ y $(3,-3,2)$. Entonces

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (5,5,0) \quad\Longrightarrow\quad ||\mathbf{w}|| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

Luego, si $\mathbf{u}$ es el vector que satisface ambas condiciones, se cumple que

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\cdot(5,5,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Teorema 1.4 (Propiedades del producto cruz).

Consideremos los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

1.) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$

2.) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$

3.) $||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2\, ||\mathbf{w}||^2 \; - \; (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$ (identidad de Lagrange)

4.) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \; = \; -(\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

5.) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \; = \; \mathbf{u} \times \mathbf{v} \; + \; \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

6.) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \; = \; \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

7.) $\alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \; = \; (\alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{w} \; = \; \mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{w})$

8.) $\mathbf{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

9.) Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos, entonces $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$

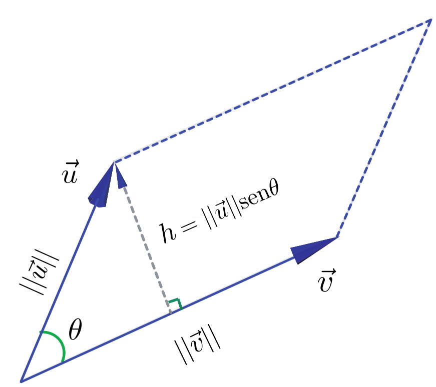
- Observe que *no tenemos* una propiedad de asociatividad para el producto cruz.

Producto cruz y ángulo entre dos vectores. Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \; = \; ||\mathbf{v}||\, ||\mathbf{w}|| \cos\theta$ entonces, usando la identidad de Lagrange,

$$||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2\, ||\mathbf{w}||^2 \; - \; (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \; = \; ||\mathbf{v}||^2\, ||\mathbf{w}||^2 (1 - \cos^2\theta) \quad \Longrightarrow \quad ||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| = ||\mathbf{u}||\; ||\mathbf{v}|| \operatorname{sen}\theta$$

Área. Consideremos un paralelogramo determinado por dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, como se ve en la figura de la derecha. De la igualdad de Lagrange se puede deducir la fórmula (de área): Si θ es el ángulo entre estos vectores, el área del paralelogramo es,

$$A = ||\mathbf{u}||\; ||\mathbf{v}|| \sin\theta \; = \; ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$$



Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces podemos redefinir $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ como vectores en $\mathbb{R}^3$, en el plano XY, es decir, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \in \mathbb{R}^3$. De esta manera, el área del paralelograma generado por estos dos vectores es

$$||(u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0)|| = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

Volumen. Consideremos un paralelepípedo en el espacio determinado por tres vectores *no coplanares* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, como se ve en la figura. El volumen del paralelepípedo es "área de la base $\times$ altura". Como ya sabemos, el área de la base es el área del paralelogramo generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, es decir, $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$. La altura la calculamos como la norma de la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Entonces tenemos

$$\text{Volumen } = ||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||\,\left\|\text{proy}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}\right\| = ||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||\,\frac{|\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2}\,||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = |\,\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,| \tag{1.1}$$

Esta fórmula se puede calcular como el *determinante* de la matriz A cuyas filas son los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, en cualquier orden. (Det(A) se interpreta como un volumen orientado).

$$\text{Si Det}(A) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & + & + \; - & - & - \\ \left[\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix}\right. & & & \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{matrix} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{matrix} \end{array} \Longrightarrow V = |\,\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,| = |\text{Det}(A)|$$

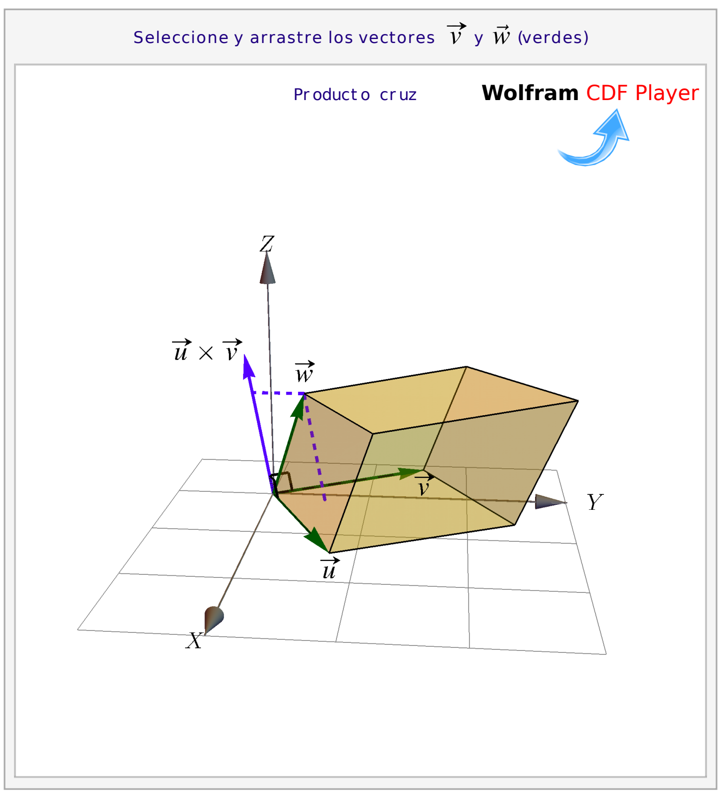
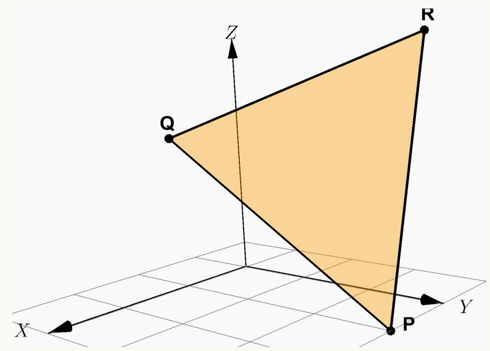


Figura 1.15: Volumen del paralelepípedo

Ejemplo 1.21

El área del triángulo con vértices en $P = (1,3,0)$, $Q = (2,1,2)$ y $R = (-3,1,3)$ es

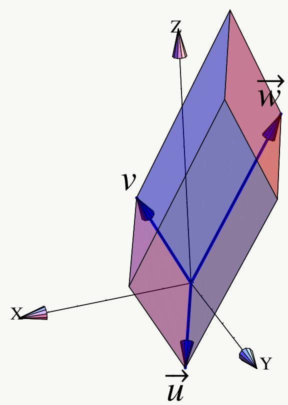
$$\frac{||\mathbf{QP} \times \mathbf{QR}||}{2} = \frac{\left\| \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|}{2} = \frac{||(2,11,10)||}{2} = \frac{15}{2}$$



Ejemplo 1.22

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u} = (1,3,-2)$, $\mathbf{v} = (2,1,4)$, $\mathbf{w} = (-3,1,6)$ es

$$V = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = \left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \right| = 80$$



Nota: En general, dados $n-1$ vectores en $\mathbb{R}^n$, es posible encontrar un vector perpendicular a todos los $n-1$ anteriores. Sin embargo no tenemos un producto cruz (que cumpla las propiedades del teorema 1.7) para *dos vectores* de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$, etc. Si un "producto cruz" cumple las propiedades del teorema 1.7, solo podría existir en en $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^7$.

Ejercicios

1.7.1 Sean $\mathbf{u} = (1,2,1)$, $\mathbf{v} = (2,0,-1)$. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

1.7.2 Determine un vector $\mathbf{v}$ unitario en la dirección del vector $(2,-1,1,3)$.

1.7.3 Hallar un vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = (1,0,1)$ y $\mathbf{v} = (2,-1,1)$.

1.7.4 Demuestre que $P = (-2,1,6)$, $Q = (2,4,5)$ y $R = (-1,-2,1)$ corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo.

1.7.5 Verifique que el triángulo con vértices $A = (2,3,-4)$, $B = (3,1,2)$ y $C = (7,0,1)$ es un triángulo rectángulo. Calcule su área.

1.7.6 Demostrar que los vectores $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ son ortogonales.

1.7.7 Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. Encuentre el coseno del ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\operatorname{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{v}}$.

1.7.8 Sean $A = (1,1,1)$, $B = (3,-1,1)$ y $C = (7/3,-1/3,7/3)$. Verifique que el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo y calcule su área.

1.7.9 Determine el ángulo que forma los vectores $\mathbf{u} = (1,2,-3)$ y $\mathbf{v} = (-3,1,2)$.

1.7.10 Dado el vector $\mathbf{u} = \left(\sqrt{2},1,1\right)$, hallar el ángulo formado entre el vector $\mathbf{u}$ y el eje Y.

1.7.11 Encuentre un vector unitario que forme un ángulo de π radianes con el eje X.

1.7.12 Determine el área de un triángulo cuyos vértices están dados por los puntos

$$A = (1,1,1), B = (2,3,3), C = (3,2,2)$$

1.8 Rectas en $\mathbb{R}^3$.

Consideremos la recta L que pasa por P y por Q $(P \neq Q)$. Esta recta es paralela al vector $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$, por lo tanto, dado un punto $R = (x,y,z) \in L$, se debe cumplir que

$$\mathbf{PR} = t\,\mathbf{v}, \quad \text{o sea} \quad R - P = t\,\mathbf{v};\ \ t \in \mathbb{R}$$

de donde $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \mathbf{OP} + t\,\mathbf{v}\}$. Escribimos $L : (x,y,z) = P + t \cdot \mathbf{v}$

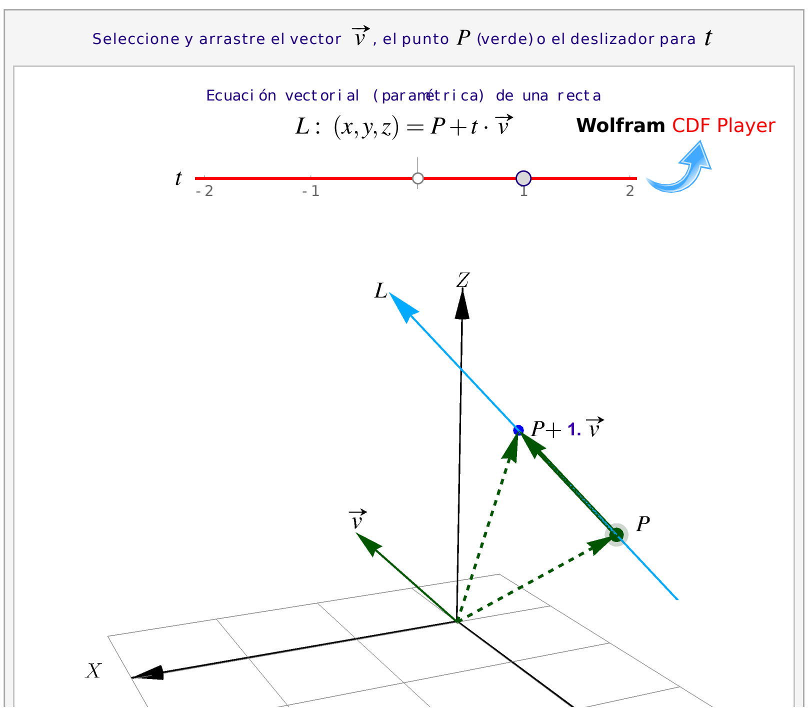


Figura 1.16: Ecuación vectorial de una recta

Definición 1.13 (Rectas).

Si L es una recta que pasa por los puntos distintos $P = (p_1,p_2,p_3)$, $Q = (q_1,q_2,q_3)$ y si $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$, entonces a.) Una ecuación vectorial de L es $(x, y, z) = P + t\,\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. A veces escribimos $L(t) = P + t \cdot \mathbf{v}$.

b.) Despejando x, y y z obtenemos las ecuaciones parámetricas de L :
$$\begin{cases} x(t) = p_1 + t \cdot v_1 \\ y(t) = p_2 + t \cdot v_2 \\ z(t) = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

c.) Si cada $v_i \neq 0$, despejando "t" obtenemos las ecuaciones simétricas de L:
$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Recta que pasa por dos puntos. Si la recta L contiene a los puntos (distintos) P y Q, entonces una ecuación vectorial para L es $L : (x, y, z) = P + t\,\mathbf{PQ}$, $t \in \mathbb{R}$. La ecuacion de una recta no es única. Podemos escoger dos puntos cualesquiera (distintos) de una recta y obtenemos ecuaciones equivalentes.

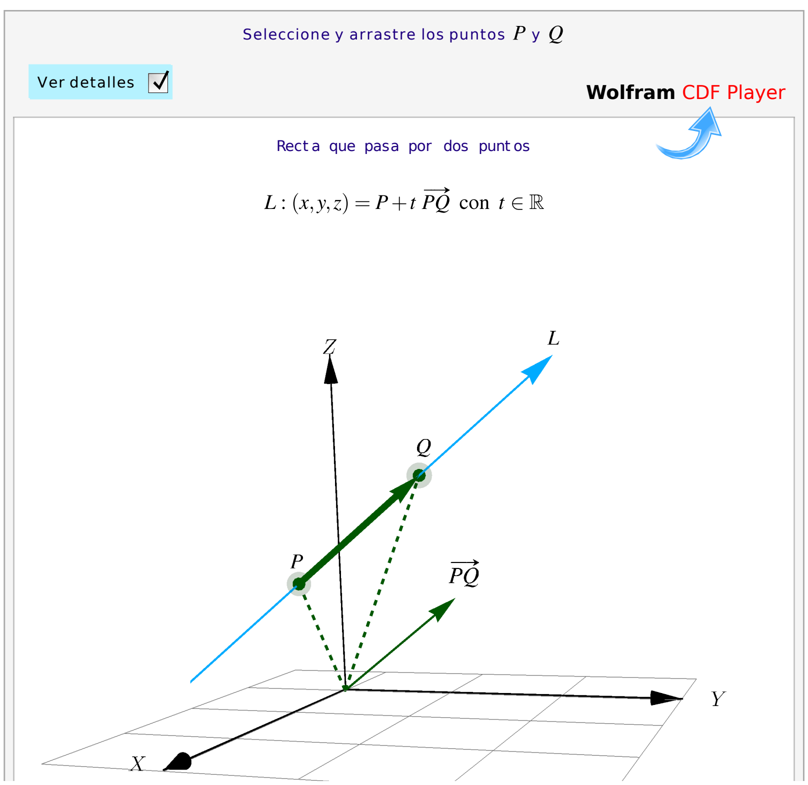
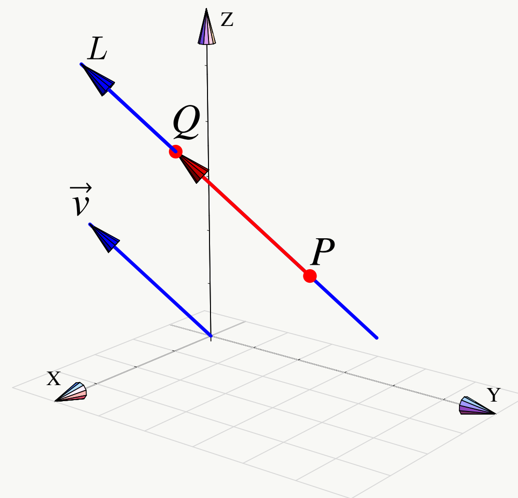


Figura 1.17: Recta que pasa por dos puntos

Ejemplo 1.23

Consideremos la recta L que pasa por $P = (1,3,2)$ y $Q = (2,1,4)$. En este caso $\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = Q - P = (1,-2,2)$, luego



- Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (1,3,2) + t\,(1,-2,2)$
- Ecuaciones parámetricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1+t, \\ y(t) &= 3-2t, \\ z(t) &= 2+2t \end{aligned}$$

- Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}.$$

Ejemplo 1.24

a.) Consideremos la recta L que pasa por $P = (1,3,-2)$ y $Q = (2,1,-2)$. En este caso $\mathbf{v} = Q - P = (1,-2,0)$, luego

- Ecuación vectorial: $L: \ (x,y,z) = (1,3,-2) + t\,(1,-2,0)$
- Ecuaciones parámetricas:

$$L: \begin{cases} x(t) = 1+t, \\ y(t) = 3-2t, \\ z(t) = -2. \end{cases}$$

- Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2}; \quad z = -2.$$

b.) Consideremos la recta L_1 de ecuaciones simétricas,

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = z-1,$$

entonces L_1 va en la dirección de $\mathbf{v} = (3,2,1)$

Punto medio.

- Observe que el segmento que va de P a Q es el conjunto de puntos

$$\{P + t\,(Q - P); \quad t \in [0,1]\}$$

- En particular, si $t = \frac{1}{2}$, obtenemos el punto medio del segmento

$$P + \frac{1}{2}(Q - P) = \frac{P + Q}{2}$$

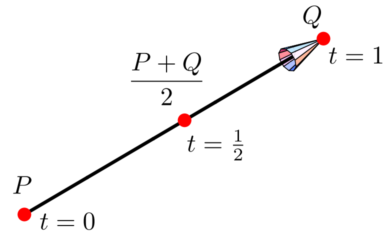


Figura 1.18: Punto medio

Ángulo, paralelismo y perpendicularidad. Consideremos dos rectas,

$$L_1 : (x, y, z) = P + t\mathbf{v}; \quad t \in \mathbb{R} \ \wedge \ L_2 : (x, y, z) = Q + s\mathbf{w}; \quad s \in \mathbb{R}$$

- $L_1 \parallel L_2$ si y sólo si $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$
- $L_1 \perp L_2$ si y sólo si $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$
- El ángulo entre L_1 y L_2 es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

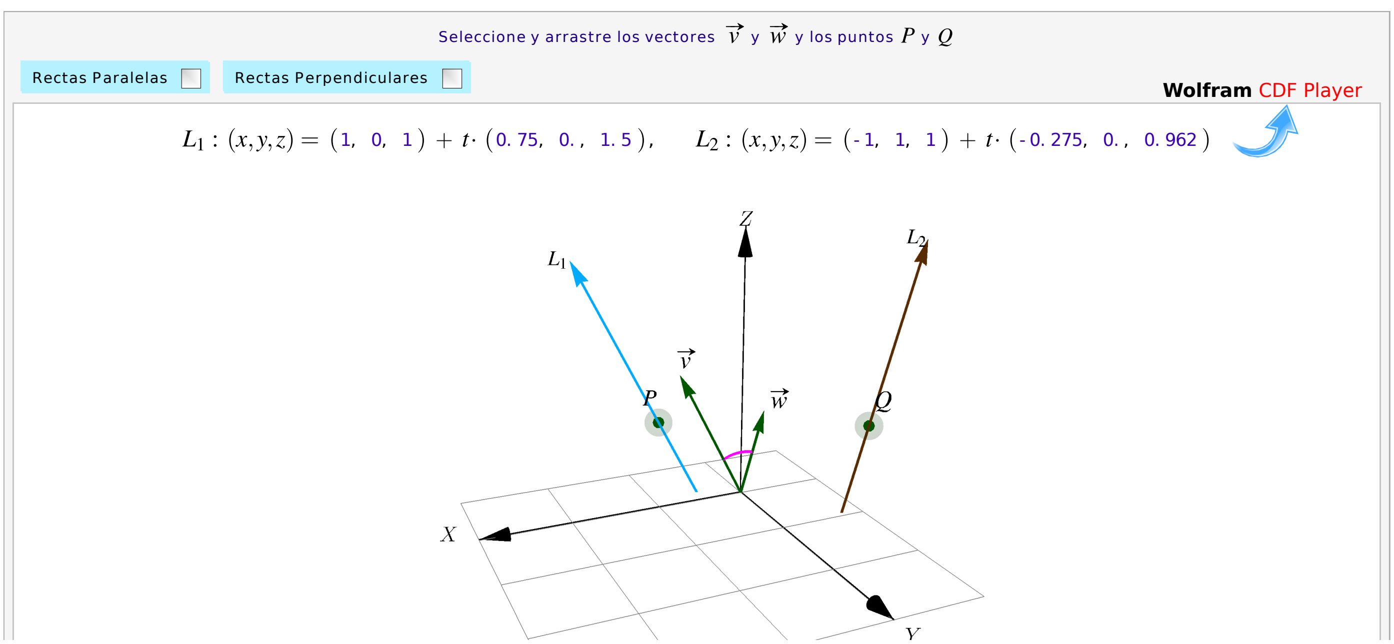


Figura 1.19: Ángulo, paralelismo y perpendicularidad

Ejemplo 1.25

Hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2, 4)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q = (-5, 7, 0)$ y $R = (6, -3, 3)$

Solución: Encontramos el vector director **QR** restando su extremo R de su origen Q

$$\mathbf{QR} = (6+5, -3-7, 3-0) = (11, -10, 3)$$

Una ecuación vectorial de la recta es

$$L: (x, y, z) = (1, -2, 4) + t \cdot (11, -10, 3)$$

1.9 Distancia de un punto a una recta

Sea L una recta, $L: (x, y, z) = P + t\mathbf{u}$. Queremos calcular la distancia mínima de un punto Q a L y, también el punto $Q' \in L$ en el que se *alcanza* este mínimo. Por supuesto, la distancia mínima es la longitud del segmento perpendicular que va desde Q a L.

La distancia (mínima) de Q a la recta L se puede calcular de varias maneras.

Usando proyecciones. La distancia mínima de Q a la recta es $\| \mathbf{PQ} - \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{PQ}} \|$ y esta distancia mínima se alcanza en $Q' = P + \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{PQ}}$.

Usando el área de un paralelogramo. Si $P, R \in L$, el área del paralelogramo determinado por estos tres puntos es

$$A = \text{base} * h = ||\mathbf{PR}|| \cdot h = ||\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}|| \implies d(Q, L) = h = \frac{||\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}||}{||\mathbf{PR}||}$$

Como podemos tomar $R \in L$ tal que $||PR|| = ||\mathbf{u}||$, tenemos la fórmula $d(Q, L) = \dfrac{||\mathbf{PQ} \times \mathbf{u}||}{||\mathbf{u}||}$

Derechos Reservados © 2020 Revista digital Matemática, Educación e Internet (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

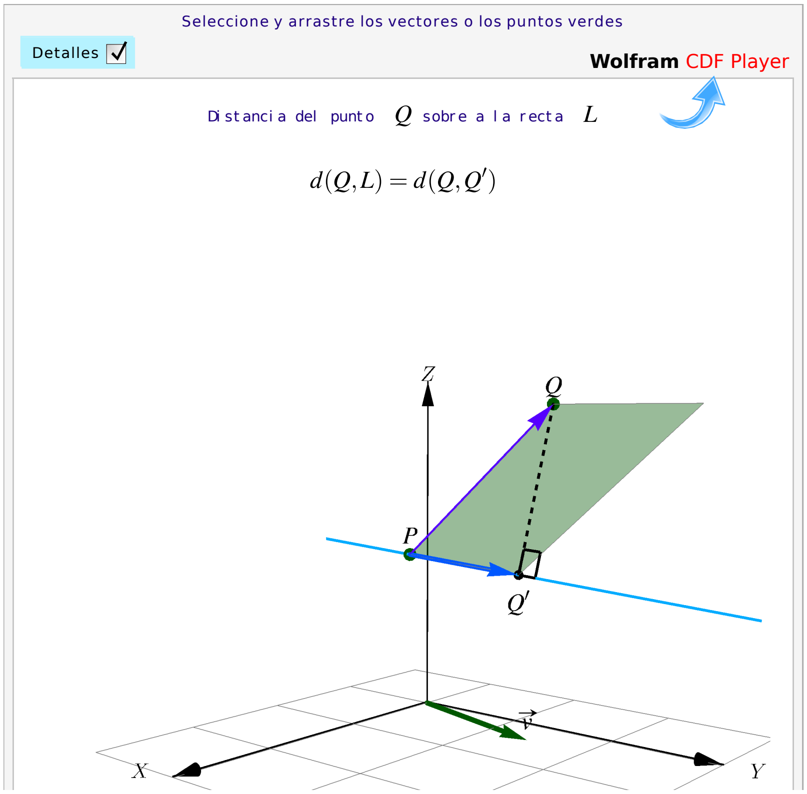


Figura 1.20: Distancia de un punto a una recta.

Cálculo algebraico. Como $d(Q,L) = d(Q,Q')$ con $Q' = P + t_m\mathbf{u}$ y como $\mathbf{QQ'} \perp \mathbf{u}$, entonces

$$(Q - Q').\mathbf{u} = 0 \implies (Q - P - t_m\mathbf{u}).\mathbf{u} = 0 \implies t_m = \frac{(Q-P)\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$$

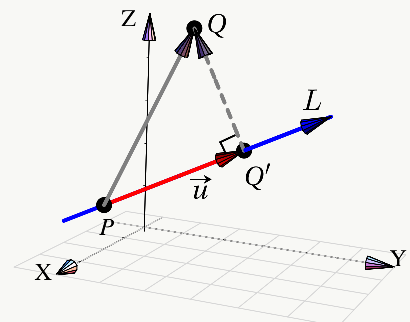
De aquí obtenemos que $d(Q,L) = d(Q,Q')$ con $Q' = P + \dfrac{(Q-P)\cdot\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||^2}\,\mathbf{u} = P + \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{PQ}}$.

Usando cálculo diferencial. Podemos calcular la distancia $d(Q,L)$ resolviendo un problema de optimización: Minimizar $f(t) = ||Q-Q'||^2 = |||Q-P-t\cdot\mathbf{u}||^2$. Derivando respecto a t obtenemos $t = t_m$ igual que en el párrafo anterior.

Ejemplo 1.26

Sea $Q = (2,2,5)$ y consideremos la recta $L: (x,y,z) = (2,0,1) + t \cdot (0,2,1)$. Para calcular la distancia de Q a L, tomamos $P = (2,0,1)$ y $\mathbf{u} = (0,2,1)$. para proyectar. La distancia de $Q = (2,2,5)$ a L es

$$\frac{||\mathbf{PQ} \times \mathbf{u}||}{||\mathbf{u}||} = \left\| \frac{(-6,0,0)}{\sqrt{5}} \right\| = \frac{6}{\sqrt{5}}$$



O también $\| \mathbf{PQ} - \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{PQ}} \| = \left\| \left(0, -\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right) \right\| = \frac{6}{\sqrt{5}}$

La distancia mínima se alcanza en

$$Q' = P + \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{PQ}} = \left(2, \frac{16}{5}, \frac{13}{5}\right) \in L.$$

Ejemplo 1.27

Determine la distancia del punto $P = (1,3,4)$ a la recta

$$L: (x,y,z) = (1,2,-1) + t\,(1,-2,1)\,, t \in \mathbb{R}$$

Solución: Consideremos el punto $Q = (1,2,-1)$ en la recta L. El vector $\mathbf{u} = \mathbf{QP} = (1,3,4) - (1,2,-1) = (0,1,5)$. Ahora determinamos el vector proyección de $\mathbf{QP} = (0,1,5)$ sobre el vector $\mathbf{d} = (1,-2,1)$

$$\text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{QP}} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{QP}}{||\mathbf{d}||^2}\mathbf{d} = \frac{(1,-2,1) \cdot (0,1,5)}{1+4+1}(1,-2,1) = \frac{1}{2}(1,-2,1) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces

$$\mathbf{QP} - \text{proy}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{QP}} = (0,1,5) - \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right)$$

Así, la distancia del punto P a la recta L es

$$\left\| \left(\frac{-1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right) \right\| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicios

1.9.1 Considere las rectas $L_5(t) = (1,1,1) + t(1,-1,1)$ y $L_6(t) = (3,-1,1) + t(-1,1,2)$. ¿Son estas rectas ortogonales (perpendiculares)?

1.9.2 Calcule la distancia del punto $Q = (1,1,2)$ a la recta $L(t): \ (2,3,2) + t(1,2,0)$.

1.9.3 Hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (1, -2, 4)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $B = (-5, 7, 0)$ y $C = (6, -3, 3)$.

1.9.4 Hallar la distancia entre el punto $(-2, 3, 0)$ y la recta $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z+1}{2}$.

1.9.5 Considere la recta $L_1(t) = (1, 1, 1) + t(1, -1, 1)$. Determine dos rectas de ecuación $L_2: (x, y, z) = P + t\,\mathbf{v}$ y $L_3: (x, y, z) = Q + t\,\mathbf{w}$ tal que

a.) L_2 y L_3 están en el plano XY
b.) L_2 y L_3 son perpendiculares
c.) L_2 y L_3 son perpendiculares a L_1

1.10 Ecuación vectorial del plano

Una recta esta determinada por dos puntos distintos y un plano Π está determinado por tres puntos $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$, no colineales. Los vectores $\mathbf{PQ}$ y $\mathbf{PR}$ "generan el plano" y decimos que *una ecuación vectorial* de Π es

$$\Pi: \ (x, y, z) \ = \ P + t\,\mathbf{PQ} + s\,\mathbf{PR}; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

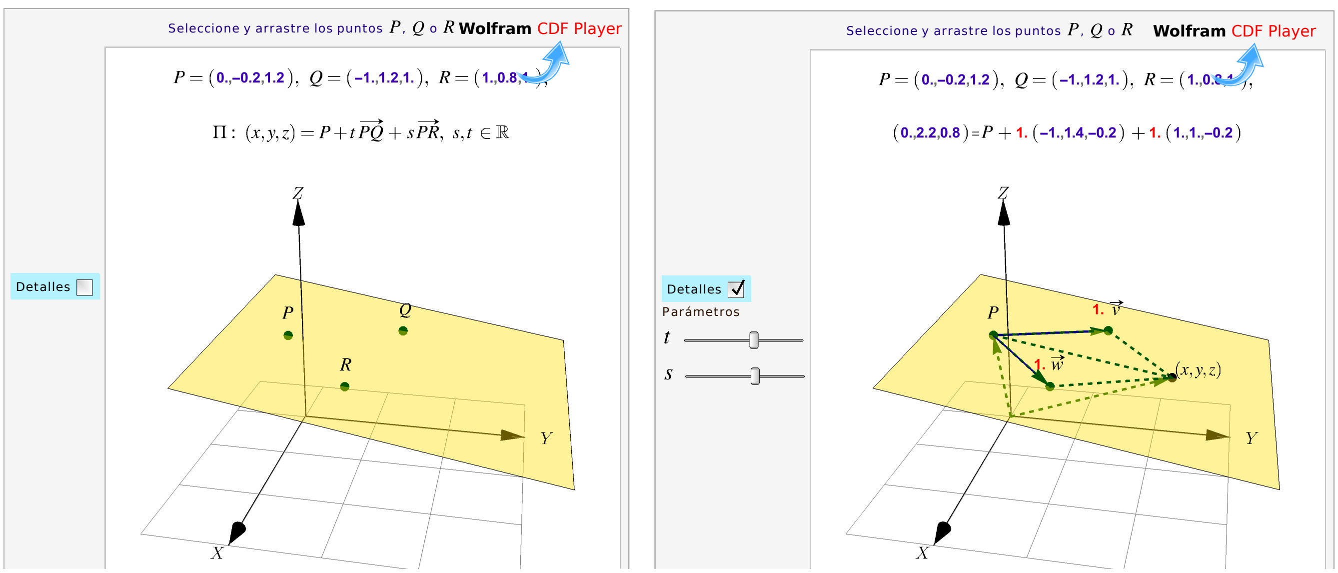


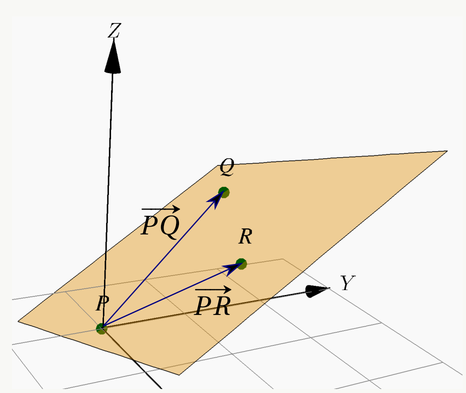
Figura 1.21: Ecuación vectorial $\Pi: \ (x, y, z) = P + t \cdot \mathbf{v} + s \cdot \mathbf{w}$ con $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ no paralelos.

Ejemplo 1.28

Consideremos un plano Π que pasa por los puntos no colineales $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 1)$ y $R = (1, 1, 1)$.

Como $\mathbf{PQ} = (-1, 2, 1)$ y $\mathbf{PR} = ,(1, 1, 1)$ entonces una ecuación vectorial del plano Π es

$$\Pi: \ (x, y, z) \ = \ (0, 0, 0) + t\,(-1, 2, 1) + s\,(1, 1, 1), \ t, s \in \mathbb{R}$$



1.11 Ecuación normal y cartesiana del plano

Un plano Π se puede determinar si se conocer un punto $P \in \Pi$ y un vector normal $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ al plano. Si $P, Q \in \Pi$ entonces el segmento $\overline{PQ}$ esta en el plano, por lo que $\mathbf{n} \perp \overline{PQ}$. De esta manera, un punto $(x, y, z) \in \Pi$ si y sólo si

$$\mathbf{n} \cdot (P - (x, y, z)) = 0, \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{n} \cdot (x, y, z) = \mathbf{n} \cdot P \qquad \text{(Ecuación normal)}$$

Si desarrollamos una ecuación normal, obtenemos una *ecuación cartesiana* del plano Π. Si $\mathbf{n} = (a, b, c)$, entonces

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = \mathbf{n} \cdot P \implies \boxed{ax + by + cz = d} \quad \text{con} \quad d = \mathbf{n} \cdot P \qquad \text{(ecuación cartesiana)}$$

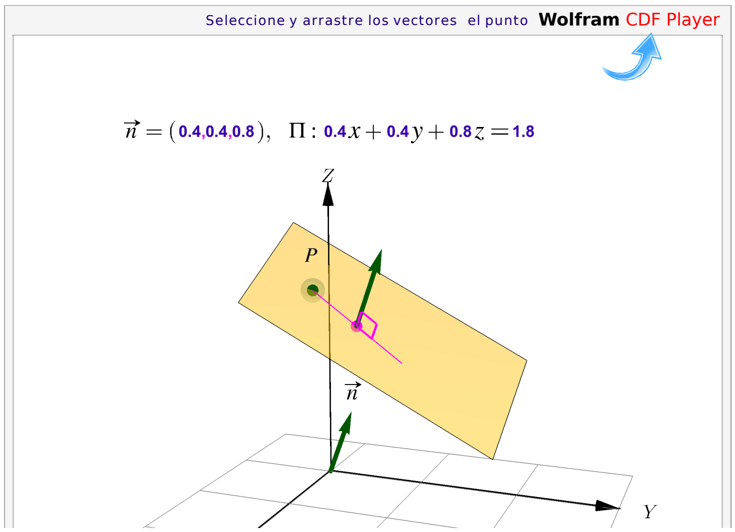


Figura 1.22: Ecuación cartesiana del plano

Ejemplo 1.29

Determine una ecuación cartesiana del plano Π que pasa por los puntos no colineales $P = (0,0,0)$, $Q = (-1,2,1)$ y $R = (1,1,1)$.

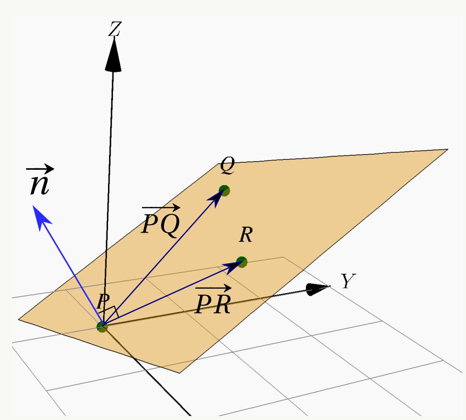
Solución: Como $\mathbf{PQ} = (-1,2,1)$ y $\mathbf{PR} = ,(1,1,1)$, podemos tomar como vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{PR} \times \mathbf{PQ} = (1, 2, -3)$ entonces, como $\mathbf{n} \cdot P = 0$,

$$\Pi: \; 1x + 2y - 3z = 0$$

También podría ser $\mathbf{n} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = (-1, -2, 3)$ y entonces

$$\Pi: \; -x - 2y + 3z = 0$$

Las ecuaciónes son equivalentes (multiplicando por -1 a ambos lados).



Ejemplo 1.30

Determine una ecuación normal de un plano que contiene al punto $(2,-3,1)$*y tiene como un vector normal* $\mathbf{n} = (-3,2,-2)$

Solución: Sean $X = (x,y,z)$ un punto cualquiera del plano y $Q = (2,-3,1)$ el punto contenido en el plano. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{QX}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad ((x,y,z)-(2,-3,1))\cdot(-3,2,-2) = 0\\
&\Longrightarrow \quad (x-2,y+3,z-1)\cdot(-3,2,-2) = 0\\
&\Longrightarrow \quad -3\,(x-2)+2\,(y+3)+-2\,(z-1) = 0\\
&\Longrightarrow \quad -3x+2y-2z+14 = 0.
\end{aligned}$$

Así, una ecuación normal del plano es $-3x+2y-2z+14 = 0$.

Puntos no colineales. Cuando una ecuación del plano requiere tres puntos no colineales, podemos usar la prueba del determinante : Los tres puntos $P = (p_1,p_2,p_3),\ Q = (q_1,q_2,q_3)$ y $R = (r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3$ son *no* colineales si

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplo 1.31

Determinar una ecuación normal del plano que contiene los puntos $P = (1,1,-4)$, $Q = (2,-2,3)$ y $R = (-3,1,4)$.

Solución: Los puntos son no colineales. Para obtener una ecuación normal del plano es necesario hallar un vector normal a este, es decir un vector perpendicular a dicho plano. Supongamos que $\mathbf{n} = (a,b,c)$ es el vector normal. Los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son segmentos en el plano, entonces el vector normal es perpendicular a los vectores **PQ** y **PR**, así

$$\mathbf{PQ}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{PR}\cdot\mathbf{n} = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{PQ} &= (2,-2,3)-(1,1,-4) = (1,-3,7)\\
\mathbf{PQ}\cdot\mathbf{n} &= 0 \quad \Longrightarrow \quad (1,-3,7)\cdot(a,b,c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a-3b+7c = 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{PR} &= (-3,1,4)-(1,1,-4) = (-4,0,8)\\
\mathbf{PR}\cdot\mathbf{n} &= 0\ \ (-4,0,8)\cdot(a,b,c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -4a+8c = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que $a = 2c$ y $b = 3c$ donde c se puede elegir libremente. Entonces $(a,b,c) = (2c,3c,c) = c(2,3,1), c\in\mathbb{R}$. Así, una ecuación normal del plano es

$$\begin{aligned} [(x,y,z)-(1,1,-4)]\cdot(2,3,1) &= 0 \\ \text{La ecuación cartesiana se obtiene así:} \\ (x-1,y-1,z+4)\cdot(2,3,1) &= 0 \\ 2x+3y+z &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.32

Determine una ecuación normal del plano que contiene a los puntos $A = (1,2,3)$, $B = (-3,-1,0)$ y $C = (2,-2,3)$.

Solución: Los puntos son no colineales. Para resolver el problema es posible tomar cualquier combiación de vectores no paralelos, pero por facilidad se recomienda que los mismos tenga un punto de origen en común. Entonces $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{AC}$, así un vector normal $\mathbf{n}$ para el plano buscado es dado por $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Resolvemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{AB} = (-3,-1,0)-(1,2,3) = (-4,-3,-3) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{AC} = (2,-2,3)-(1,2,3) = (1,-4,0) \end{aligned}$$

esto implica que

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ -4 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 19\,\hat{\mathbf{k}} = (-12,-3,19)$$

Como los puntos A, B y C están contenidos en el plano, se puede tomar cualquiera de ellos, para esto considere el punto A. El plano está formado por todos los puntos $X = (x,y,z)$ que cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{AX}\cdot\mathbf{n} = 0 &\implies ((x,y,z)-(1,2,3))\cdot(-12,-3,19) = 0 \\ &\implies (x-1,y-2,z-3)\cdot(-12,-3,19) = 0 \\ &\implies -12x-3y+19z-39 = 0 \end{aligned}$$

una ecuación cartesiana del plano es $-12x-3y+19z-39 = 0$

1.12 Planos: Paralelismo, perpendicularidad y ángulo

El ángulo entre planos lo podemos establecer con los vectores normales, y entre planos y rectas lo podemos establecer con un vector paralelo a la recta (el vector dirección, por ejemplo) y un vector normal.

Definición 1.14 (Planos: Paralelismo, perpendicularidad y ángulo)

Si $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$, son dos vectores normales a Π_1 y Π_2, respectivamente, entonces

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ si y sólo si $\mathbf{n_1} \parallel \mathbf{n_2}$
- $\Pi_1 \perp \Pi_2$ si y sólo si $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{n_2}$
- El ángulo θ entre los planos Π_1 con un vector normal $\mathbf{n_1}$ y Π_2 con un vector normal $\mathbf{n_2}$, es el ángulo entre los vectores normales

$$\theta = \measuredangle\, ''_1, ''_2 = \measuredangle\, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$$

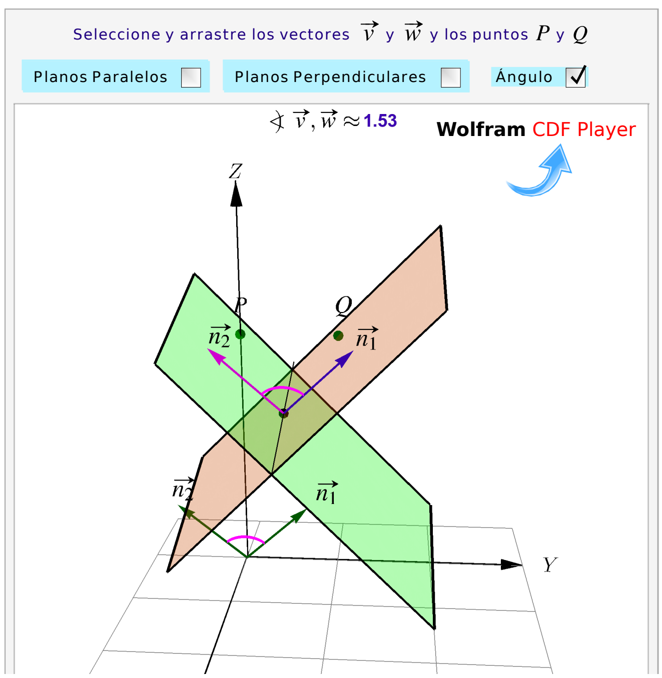


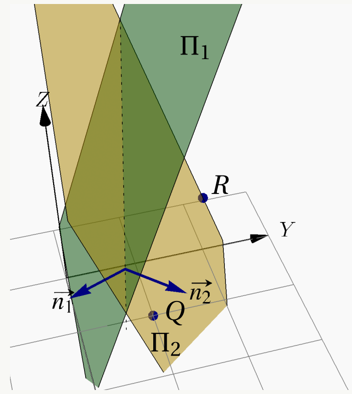
Figura 1.23: Planos: Ángulo, perpendicularidad y paralelismo

Ejemplo 1.33

Considere el plano $\Pi_1 : \ 2x - 3y + z \ = \ 1$. Determine una ecuación cartesiana de *un plano* Π_2 si se sabe que este plano es perpendicular al plano Π_1 y que pasa por $Q = (1,1,0)$ y $R = (0,2,1)$.

Solución: Este problema tiene infinitas soluciones, es decir, hay infinidad de planos que cumplen las condiciones indicadas. Vamos a determinar una solución particular.

$\mathbf{n_1} = (2,-3,1)$ es un vector normal de Π_1. Sea $\mathbf{n_2} = (a,b,c)$ un vector normal a Π_2. Como $\Pi_1 \perp \Pi_2$ entonces $\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} = 0$. Pero también, como $R, Q \in \Pi_2$, entonces $\mathbf{n_2} \cdot \mathbf{QR} = 0$. Son dos ecuaciónes y tres incognitas a, b y c, así que tendremos infinitas soluciones y solo debemos escoger una solución particular.



$$\begin{cases} \mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} = 0 \\ \mathbf{n_2} \cdot \mathbf{QR} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a - 3b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Longrightarrow c = a - b \text{ y } 3a - 4b = 0$$

Una solución particular se obtiene poniendo, por ejemplo, $a = 4$, $b = 3$ y por tanto $c = 1$. De este modo, *un plano* Π_2 que cumple las condiciones, tiene una ecuación cartesiana

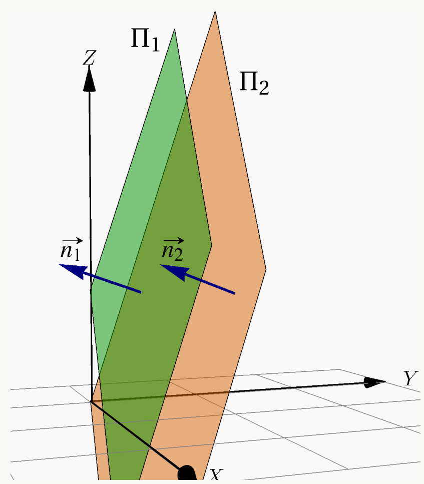
$$4x + 3y + z = (4,3,1) \cdot Q \Longrightarrow \Pi_2 : 4x + 3y + z = 7$$

Ejemplo 1.34

Considere el plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 1$. Determine una ecuación cartesiana del plano Π_2 si se sabe que este plano es paralelo al plano Π_1 y que pasa por $Q = (1,1,1)$.

Solución: $\mathbf{n_1} = (2,-3,1)$ es un vector normal de Π_1. Como $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ entonces podemos tomar como un vector normal de Π_2 a $\mathbf{n_2} = (2,-3,1)$. Entonces una ecuación cartesiana de Π_2 es

$$\begin{aligned} (2,-3,1) \cdot (x,y,z) &= (2,-3,1) \cdot (1,1,1) \\ \Longrightarrow \quad \Pi_2 : 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$



1.13 Rectas y planos

Una recta L_1 está contenida en el plano Π_1 si al menos dos puntos de esta recta están en Π_1. En otro caso, la recta L_1 interseca al plano Π_1 en un punto o es paralela a Π_1 y ajena a él.

Dada una recta $L_1 : (x, y, z) = P + t\,\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}$, hay una infinidad de planos que la contienen: Si $Q \notin L_1$, un plano que contiene a L_1 es el plano Π_1 que pasa por Q y dos puntos P y R de L_1. También podemos tomar como un vector normal a este plano al vector $\mathbf{n}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{PQ}$.

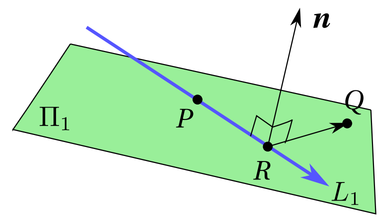


Figura 1.24

Dadas dos rectas diferentes $L_1 : (x, y, z) = P + t\,\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}$, y $L_2 : (x, y, z) = Q + t\,\mathbf{u},\ t \in \mathbb{R}$, siempre es posible encontrar dos planos paralelos Π_1 y Π_2, que contienen a L_1 y L_2, respectivamente. Un vector normal a estos dos planos es $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

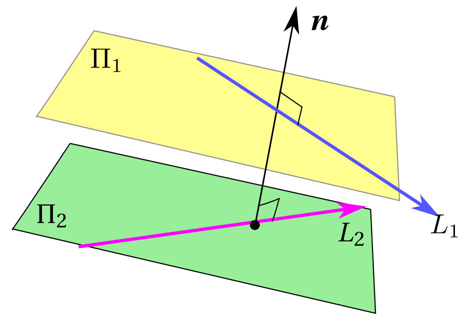


Figura 1.25

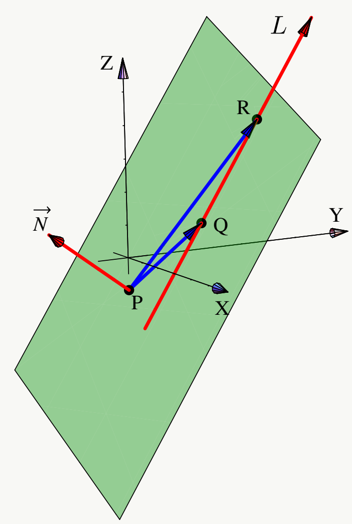
Ejemplo 1.35

Consideremos la recta $L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t\,(0, 2, 3)$. Determine una ecuación cartesiana del plano Π_1 que contenga a la recta L_1 y al punto $P = (0, 0, -1)$ (que *no está* en L_1).

Solución: Para encontrar una ecuación cartesiana del plano Π_1, buscamos tres puntos no colineales en este plano; el punto P que ya tenemos y dos puntos de la recta. Para obtener estos dos puntos de la recta, le damos una par de valores al parámetro t.

En este caso con $t = 0$ y $t = 1$ obtenemos los dos puntos que faltan. Tres puntos no colineales en el plano Π_1 son

$$P = (0, 0, -1),\ Q = (1, 2, 1),\ R = (1, 4, 4)$$



Estos puntos no son colineales pues $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Bien, ahora tomemos

$$\mathbf{n} = \mathbf{QP} \times \mathbf{RP} = (1, 2, 2) \times (1, 4, 5) = (2, -3, 2)$$

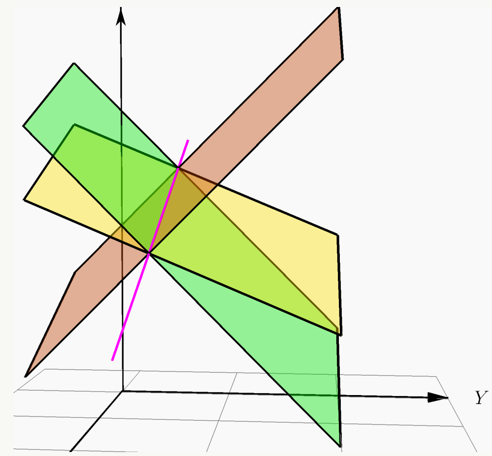
Como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{OP} = -2$, una ecuación cartesiana es

$$\Pi_1 : 2x - 3y + 2z = -2$$

Ejemplo 1.36

Considere los planos $\Pi_1 : \frac{3}{4}x + 2y + 2z = 5$ y $\Pi_2 : \frac{3}{4}x - 2y + 2z = 3$. Como vimos en el ejemplo **??**, estos planos se intersecan, la recta de intersección es $L : (x, y, z) = \left(0, \frac{1}{2}, 2\right) + t \cdot \left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine un plano Π_3, distinto de los dos anteriores, tal que los tres planos Π_1, Π_2 y Π_3 se intersecan en L.

Solución: Como Π_3 contiene a la recta L, tomamos dos puntos de esta recta y un tercer punto fuera de la recta y de los otros dos planos, con estos tres puntos podemos obtener una ecuación cartesiana de este plano.



Sean $P = \left(0, \frac{1}{2}, 2\right)$, $Q = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{13}{8}\right)$ en la recta y $R = (1, 2, 1)$ un punto ajeno a la recta y a los otros dos planos. Entonces tomando $\mathbf{n}_3 = \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \left(\frac{9}{16}, \frac{5}{8}, \frac{3}{2}\right)$ obtenemos la ecución cartesiana

$$\Pi_3 : \frac{9}{16}x + \frac{5}{8}y + \frac{3}{2}z = \frac{53}{16}$$

Definición 1.15 (Rectas y planos: Paralelismo, perpendicularidad y ángulo).

Consideremos la recta $L_1 : (x, y, z) = P + t\,\mathbf{v}$ y el plano $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$. Entonces, siendo $\mathbf{n_1}$ un vector normal a Π_1,

- $L_1 \parallel \Pi_1$ si y sólo si $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{v}$
- $L_1 \perp \Pi_1$ si y sólo si $\mathbf{n_1} \parallel \mathbf{v}$
- Ángulo (agudo): $\sphericalangle\ L, \Pi_1 = \dfrac{\pi}{2} - \sphericalangle\ \mathbf{n_1}, \mathbf{v}$

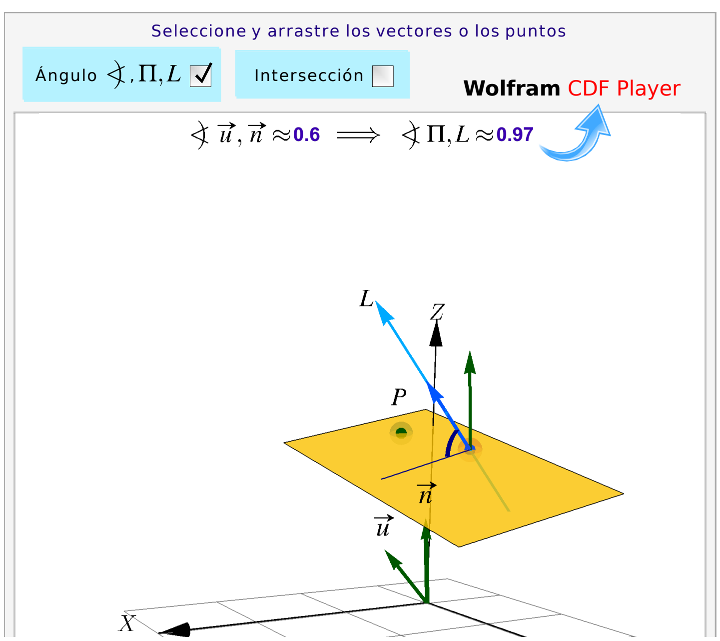


Figura 1.26: Ángulo entre rectas y planos e intersección

Ejemplo 1.37

Determine el ángulo que forma la recta de intersección de los planos

$$\begin{cases} \Pi_1 : x + y - 3 = 0 \\ \Pi_2 : 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\Pi : 2x + y + z + 4 = 0$.

Solución: Sea L la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2. Si $\mathbf{v}$ es el vector director de la recta L, entonces se cumple que

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_{\Pi_1} \times \mathbf{n}_{\Pi_2}$$

donde $\mathbf{n}_{\Pi_1} = (1,1,0)$ y $\mathbf{n}_{\Pi_2} = (3,1,-1)$. Entonces

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,-2)$$

Calculando el ángulo haciendo uno del vector normal al plano Π se tiene que

$$\cos\left(\frac{\Pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{|(2,1,1)\cdot(-1,1,-2)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\Pi}{6}$$

Así, el ángulo que forman la recta L y el plano Π es igual a $\dfrac{\Pi}{6}$.

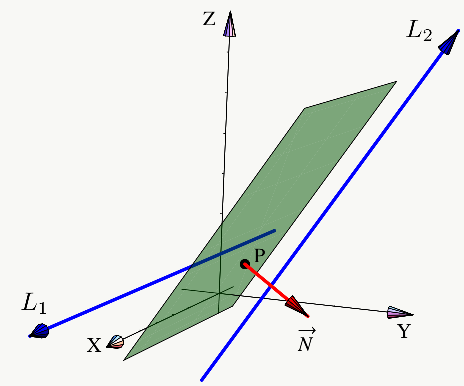
Ejemplo 1.38

Determine una ecuación cartesiana del plano Π_1 si este que contiene al punto $P = (1,1,1)$ y es *paralelo* a las rectas $L_1 : (x,y,z) = (1,2,1) + t\,(0,2,3)$, y $L_2 : (x,y,z) = (1,0,1) + t\,(5,0,0)$

Solución: De acuerdo a la teoría, un vector normal a Π_1 debe ser perpendicular a $(0,2,3)$ y a $(5,0,0)$; entonces para encontrar una ecuación cartesiana del plano Π_1, podemos tomar

$$\mathbf{n} = (0,2,3) \times (5,0,0) = (0,15,-10)$$

Como $\mathbf{n}\cdot\mathbf{OP} = 5$, una ecuación cartesiana es $\Pi_1 : 15y - 10z = 5$

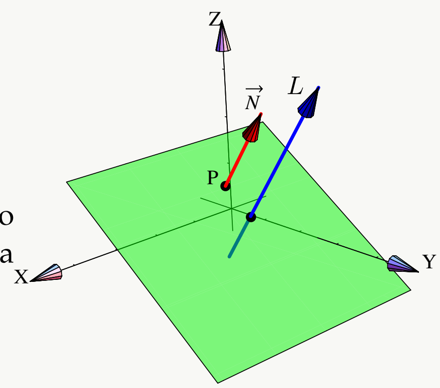


Ejemplo 1.39

Determine una ecuación cartesiana del plano Π_1 que sea *perpendicular* a la recta

$$L_1:\ (x,y,z) = (1,2,1)+t\,(0,2,3)$$

y que contenga al punto $P = (1,1,1)$.



Solución: Para encontrar una ecuación cartesiana del plano Π_1, podemos tomar $\mathbf{n} = (0,2,3)$. Como $\mathbf{n}\cdot\mathbf{OP} = 5$, una ecuación cartesiana es

$$\Pi_1:\ 2y+3z = 5$$

Ejemplo 1.40

Se considera la recta $L:\begin{cases} x+2y &= 7\\ y+2z &= 4\end{cases}$ y el punto $P = (1,2,3)$.

Nos interesa calcular una ecuación paramétrica del plano Π que es perpendicular a la recta L y contiene el punto P.

Consideremos los planos $\Pi_1 : x+2y = 7$ y $\Pi_2 : y+2z = 4$. Es claro que un vector normal al plano Π_1 es $\mathbf{n}_{\Pi_1} = (1,2,0)$ y $\mathbf{n}_{\Pi_2} = (0,1,2)$ corresponde a un vector normal al plano Π_2.
Si el plano Π es perpendicular a la recta L se cumple que $\mathbf{n}_{\Pi_1}\parallel\Pi$ y $\mathbf{n}_{\Pi_2}\parallel\Pi$.

Luego una ecuación vectorial del plano Π está dada por:

$$\Pi:(x,y,z) = (1,2,3)+t\cdot(1,2,0)+s\cdot(0,1,2),\ t,s\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto una ecuación paramétrica del plano Π es

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2+2t+s; \ t,s \in \mathbb{R} \\ z &= 3+2s \end{cases}$$

Ejemplo 1.41

Determinar una ecuación del plano que pasa por el punto $A = (2,-1,1)$ y es paralelo al plano $3x+y-5z+9 = 0$.

Solución: Un plano paralelo al plano $3x+y-5z+9 = 0$ tiene por ecuación $3x+y-5z+d = 0$, esto porque los vectores normales son paralelos, en ese caso es el vector $(3,1,-5)$. Dado que el plano buscado contiene al punto $A = (2,-1,1)$ entonces sustiuyendo obtenemos

$$3x+y-5z+d = 0 \implies 3(2)+-1-5(1)+d = 0 \implies d = 0.$$

Por lo tanto, una ecuación del plano es $3x+y-5z = 0$.

Ejercicios

1.13.1 Sean $A = (1,1,1)$, $B = (-2,1,2)$ y $C = (3,-3,0)$.

a.) Calcule una ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por A y B

b.) Calcule una ecuación vectorial del plano Π_1 que contiene a los puntos A, B y C

c.) Calcule una ecuación *cartesiana* del plano Π_1 que contiene a los puntos A, B y C

1.13.2 Calcule una ecuación cartesiana del plano Π_2 que contiene a la recta $L_3 : (x,y,z) = t\,(1,0,3)$ y pasa por $Q = (-2,-2,2)$.

1.13.3 Calcule una ecuación cartesiana del plano Π_3 que contiene al punto $Q = (-2,-2,2)$ y es paralelo al plano $\Pi_4 : x+2y-z = 1$.

1.13.4 Determine una ecuación cartesiana del plano Π que contiene al punto $(1,1,1)$ y que es que paralelo a las rectas $L_5(t) = (1,1,1)+t(1,-1,1)$ y $L_6(t) = (3,-1,1)+t(-1,1,2)$.

1.13.5 Considere el plano Π de ecuación vectorial $\Pi : (1,2,0)+t\,(-2,4,1)+s\,(1,1,2)$. ¿Cuáles de los siguientes puntos $(0,0,0)$, $(1,2,0)$ y $(2,-3,-3)$, están en el plano Π?

1.14 Coordenadas Polares.

A veces es necesario hacer cambios de variable. En $\mathbb{R}^2$ nos interesa pasar de coordenadas cartesianas (x,y) a otro tipo de coordenadas más adecuado (u,v) para simplificar los cálculos. En particular son muy útiles las *coordenadas polares* para describir figuras con "simetría circular".

Las coordenadas de un punto en el plano también se pueden establecer fijando un punto O, llamado polo u origen y construyendo un eje con punto inicial O. Este eje lo llamamos Eje Polar. Este nuevo sistema de coordendas se llama "sistema de coordenadas polares".

A cada punto P en el plano se le pueden asignar las coordenadas (r, θ) (llamadas *coordenadas polares del punto*) de la manera que se indica en la figura que sigue,

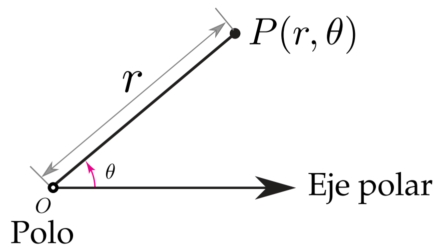


Figura 1.27: Coordenadas polares de P.

- r es la distancia de O a P. Más adelante la tomaremos como una "distancia dirigida", es decir, el signo "$-$" invierte la dirección.
- θ es el ángulo desde el Eje Polar hasta el segmento $\overline{OP}$

Ejemplo 1.42

a.) El punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ está a 2 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta $\overline{OP}$ es $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b.) El punto $Q\left(3, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ está a 3 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta $\overline{OQ}$ es $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

c.) El punto $R\left(3, \dfrac{11\pi}{6}\right)$ está a 3 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta $\overline{OR}$ es $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$.

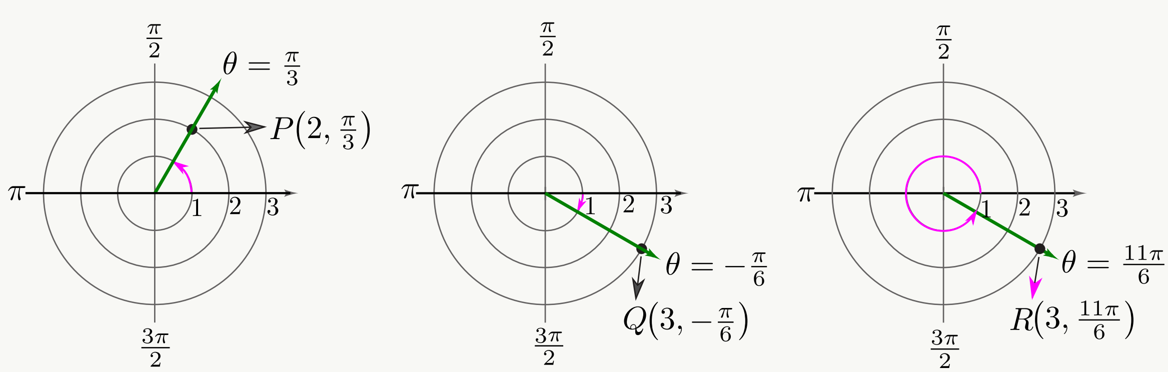


Figura 1.28: Puntos P, Q y R.

Ejemplo 1.43 (r como "distancia dirigida")

a.) El punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ está a 2 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta $\overline{OP}$ es $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b.) El punto $Q\left(-2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ está a 2 unidades del Polo pero en dirección opuesta a P. El ángulo desde el Eje Polar hasta $\overline{OP}$ es $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

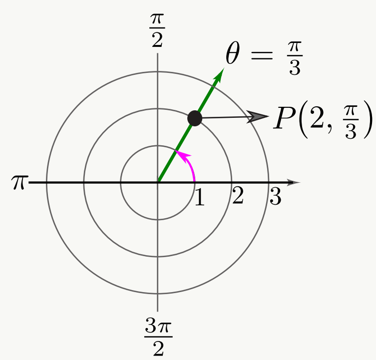


Figura 1.29: r como "distancia dirigida"

c.) El punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ tambien se puede representar como $P\left(2, \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ y como $P\left(-2, \dfrac{\pi}{3} + \pi\right)$

No unicidad. A diferencia de las coordenadas rectángulares de un punto, en coordenadas polares la representación no es única: $P(r,\theta)$ también se puede representar como $P(r, \theta \pm 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Además como r la tomamos como una *distancia dirigida*, entonces $P(r,\theta)$ también se puede representar como $P(-r, \theta \pm (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Adicionalmente, el Polo se puede representar con $O(0,\theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicios

1.14.1 Represente, en un sistema de coordenadas polares, los siguientes puntos,

a.) $(2, \pi)$

b.) $(-2, \pi)$

c.) $(3, \pi/4)$

d.) $(3, 9\pi/4)$

e.) $(-3, 5\pi/4)$

Conversión de coordenadas

Para empezar podemos establecer una relación inicial entre la coordenada (r,θ) de un punto P y sus respectivas coordenadas cartesianas. La relación se puede ver usando una figura,

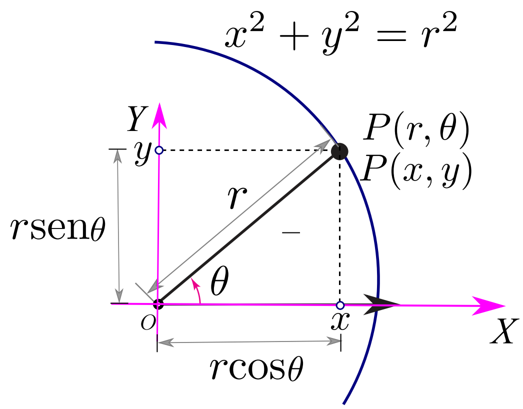


Figura 1.30: Conversión de coordenadas

Conversión de coordenadas polares a coordendas rectangulares. Deducimos que si tenemos las coordenadas polares (r,θ) de un punto P, entonces las coordenadas cartesianas de P son (x,y) con

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Conversión de coordendas rectangulares a coordenadas polares. Si tenemos las coordenadas (x,y) de un punto P, podemos determinar un juego de coordenadas polares con $r\geqslant 0$ y $\theta\in[0,2\pi[$.

La función "arctan" usualmente la tomamos como la inversa de la función tangente, por tanto la función "arctan" devuelve ángulos en el intervalo $]-\pi/2,\ \pi/2]$. Es costumbre hacer algunos ajustes a la función arcotangente de tal manera que, dado u punto punto (x,y), podamos obtener un juego de coordenadas (r,θ) con el ángulo correcto.

Dado en punto (x,y), un juego de coordenadas polares para este punto es (r,θ) con

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si} \quad x>0 \quad \text{(I y IV cuadrante)} \\ \arctan(y/x)\ +\ \pi & \text{si} \quad x<0 \quad \text{(II y III cuadrante)} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x=0 \quad \text{y} \quad y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x=0 \quad \text{y} \quad y<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \quad \text{y} \quad y=0 \quad \text{(convenio)} \end{cases}$$

Ejemplo 1.44 (Conversión de coordenadas polares a coordendas rectangulares)

a.) Consideremos el punto $P(\sqrt{3}, \pi/3)$. Para hacer la conversión a coordenadas rectangulares, usamos la fórmula que establecimos más arriba.

$$(r,\theta) = (\sqrt{3},\ \pi/3) \implies \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\pi/3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\pi/3 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \implies (x,y) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$$

b.) Consideremos el punto $P(-\sqrt{3}, \pi/3)$. Para hacer la conversión a coordenadas rectangulares, usamos la fórmula que establecimos más arriba.

$$(r,\theta) = (-\sqrt{3},\ \pi/3) \implies \begin{cases} x = -\sqrt{3}\cos\pi/3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\pi/3 = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \implies (x,y) = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 1.45 (Conversión de coordendas rectangulares a coordenadas polares)

a.) Consideremos el punto $P(-1,1)$. Para hacer la conversión a coordenadas polares, usamos la fórmula que establecimos más arriba. Observemos que $P(-1,1)$ está en II cuadrante.

$$(x,y) = (-1,\ 1) \implies \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \boldsymbol{\pi} = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \implies (r,\theta) = \left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$$

b.) Consideremos el punto $P(0,2)$. Para hacer la conversión a coordenadas polares, usamos la fórmula que establecimos más arriba. Observemos que $P(0,2)$ está en el eje Y.

$$(x,y) = (0,\ 2) \implies \begin{cases} r = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \implies (r,\theta) = \left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicios

1.14.2 Haga la conversión a coordenadas cartesianas de los siguientes puntos,

a.) $(1,\pi)$

b.) $(-1,\pi)$

c.) $(2,\pi/3)$

d.) $(-2,\pi/3)$

1.14.3 Haga una conversión a coordenadas polares de los siguientes puntos,

a.) $(0,-5)$

b.) $(-5,0)$

c.) $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

d.) $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$

e.) $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

Curvas en coordenadas polares

Para hacer la conversión de la ecuación de una curva en coordenadas rectagulares a una ecuación en coordenadas polares, usamos las relaciones

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

A veces es posible despejar $r=g(\theta)$, con excepción de algunos valores de r, y este despeje aún así es adecuado para nuestros cálculos.

Los dos primeros ejemplos que siguen son las curvas más simples: $r=$constante y $\theta=$ constante.

Ejemplo 1.46 (Circunferencias y rayos)

a.) Las circunferencia $x^2+y^2=a^2$ tiene ecuación polar $r=a$ (función constante).

En efecto, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= a^2 \\ r^2 &= a^2 \\ r &= a \end{aligned}$$

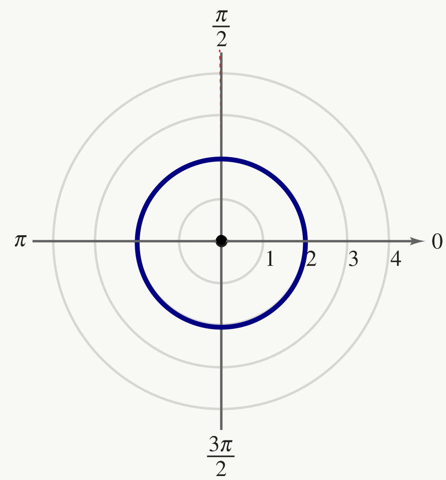


Figura 1.31: Circunferencia $r = 2$

b.) La recta de ecuación $y = mx$ (una recta que pasa por el origen) tiene ecuación $\theta = \arctan(m)$ En efecto, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} y &= m\,x \\ r\,\text{sen}\,\theta &= m\,r\cos\theta \\ \tan\theta &= m \\ \theta &= \arctan(m) \end{aligned}$$

Por ejemplo, la recta $y = \sqrt{3}x$ tiene ecuación en polares $\theta = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

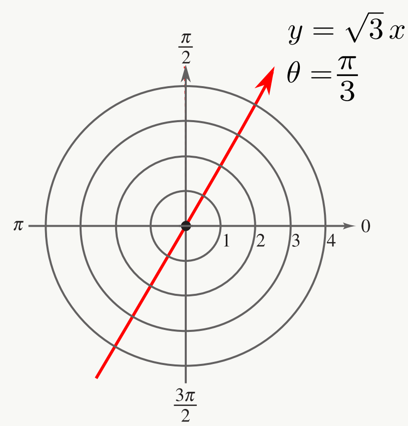


Figura 1.32: Recta $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Ejemplo 1.47 (Ecuación polares de una curva)

Obtener una ecuación en coordenadas polares de la curva $(x^2+y^2)^3 = 2^5x$.

Solución: Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^3 &= 2^5 x\\
(r^2)^3 &= 2^5 r\cos\theta\\
r^6 &= 2^5 r\cos\theta\\
r &= 2\sqrt[5]{\cos\theta}
\end{aligned}$$

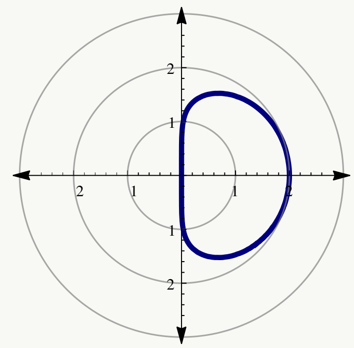


Figura 1.33: Curva $(x^2+y^2)^3 = 2^5 x$.

Ejercicios

1.14.4 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $x^2+y^2=4$.

1.14.5 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $(x-2)^2+y^2=4$.

1.14.6 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $(y-2)^2+(x-1)^2=5$.

1.14.7 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $(y-2)^2+x^2=4$.

1.14.8 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $(x^2+y^2)^3=x^3$.

1.14.9 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $y=\sqrt{3}\,x$

1.14.10 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $(x+1)^2+y^2=1$

1.14.11 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva $x^2+y^2=2\sqrt{x^2+y^2}+x$

Simetría

En el ejemplo 1.50 podemos notar que la gráfica presenta simetría respecto al eje Y. Haber notado esto nos hubiera permitido conocer propiedades de simetría de la gráfica.Hay una manera de verificar si una curva presenta simetría respecto a la línea $\theta=\pi/2$, respecto al Eje Polar y respecto al Polo. Estas pruebas de simetría solo dan "condiciones suficientes", es decir, si la prueba de simetría falla, podría ser todavía que la curva presente simetría. Esto es así porque como las coordenadas en polares no son únicas, las curvas pueden tener ecuaciones alternativas. En algunas de estas ecuaciones las pruebas de simetría funcionan, en otras no.

Pruebas de simetría. En este curso solo consideramos tres pruebas de simetría.

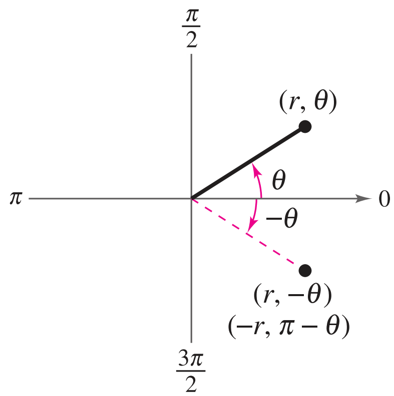


Figura 1.34: Simetría respecto al Eje Polar

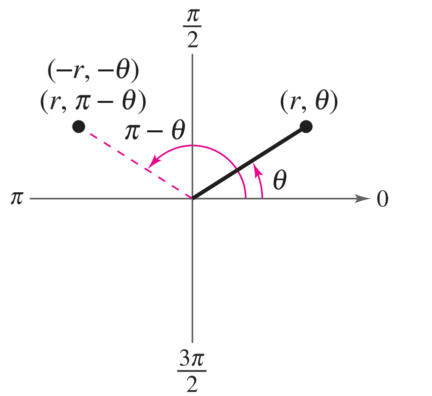


Figura 1.35: Simetría respecto a Eje Copolar

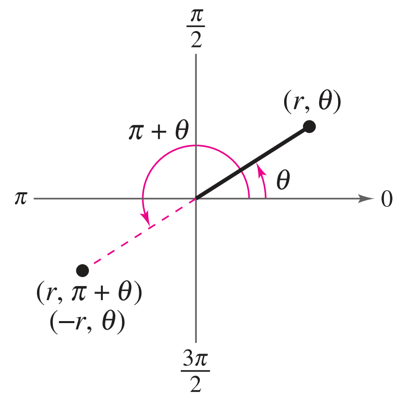


Figura 1.36: Simetría respecto al Polo

(Pruebas de simetría: Suficientes pero no necesarias)

Prueba de simetría	Aplicar a $r = f(\theta)$ y simplificar
Simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$	$f(\pi - \theta) = f(\theta)$ o $-r = f(-\theta))$
Simetría respecto al Eje Polar	$f(-\theta) = f(\theta)$ o $-r = f(\pi - \theta)$
Simetría respecto al Polo	$f(\pi + \theta) = f(\theta)$ o $-r = f(\theta)$

Ejemplo 1.48

La curva de ecuación $r = 3 + 2\cos\theta$ es simétrica respecto al Eje Polar pues

$$f(\theta) = 3 + 2\cos\theta \implies f(-\theta) = 3 + 2\cos(-\theta) = 3 + 2\cos\theta$$

$\therefore\ f(-\theta) = f(\theta)$ ✓

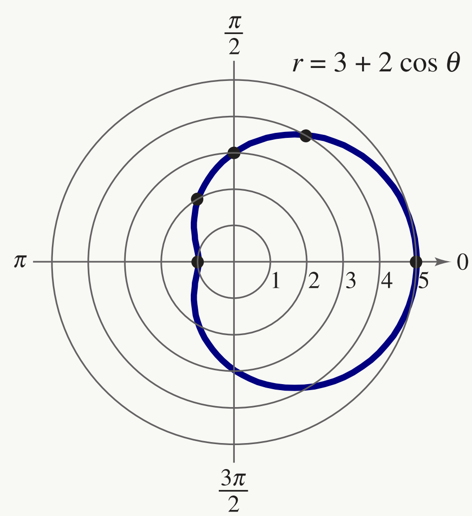


Figura 1.37: La curva $r = 3 + 2\cos\theta$ presenta simetría respecto al Eje Polar

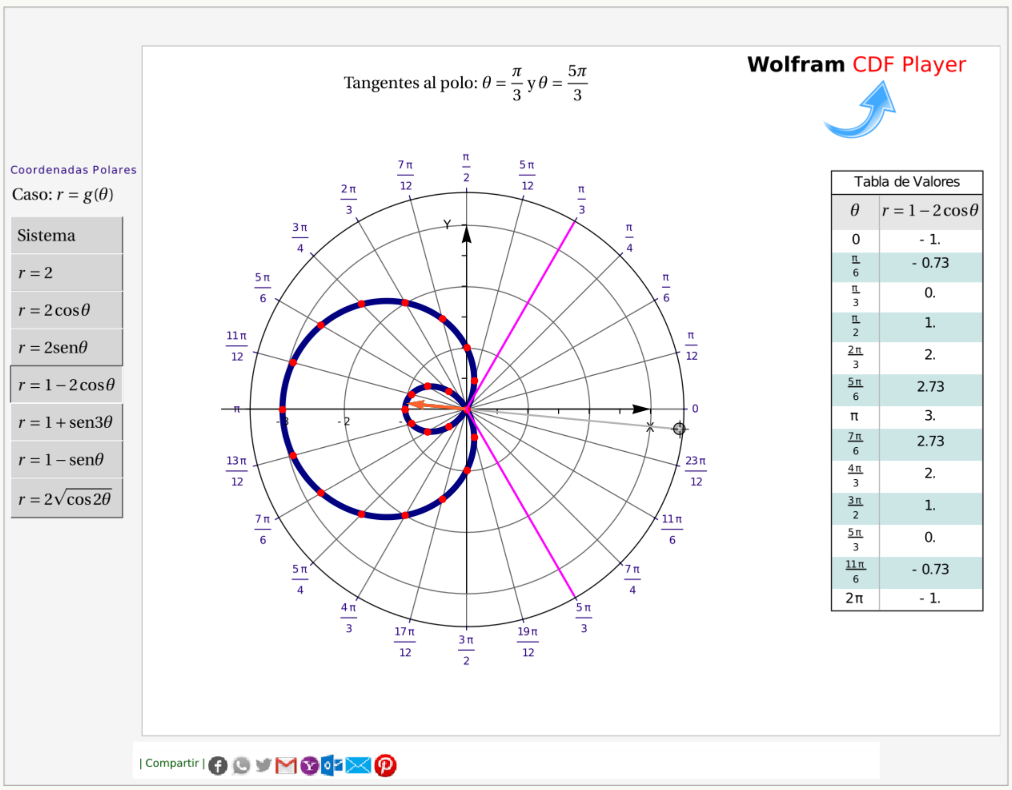
Representación gráfica en coordenadas polares.

En general, en este curso, nos interesan curvas de ecuación $r = g(\theta)$. La manera de hacer la representación gráfica de curvas sencillas es (por ahora) representar algunos puntos de la curva y usar propiedades de simetría para completar el gráfico.

Ejemplo 1.49

Realizar el gráfico de la función $r = 2\cos\theta$

Solución: Hacemos una tabla de valores para esta función tomando valores de θ en $[0,\ 2\pi]$.



Ejemplo 1.50

Realizar el gráfico de la función $r = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$

Solución: Hacemos una tabla de valores para esta función tomando valores de θ en $[0,\ 2\pi]$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$3\pi/2$
r	0	2	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0	-2	-4

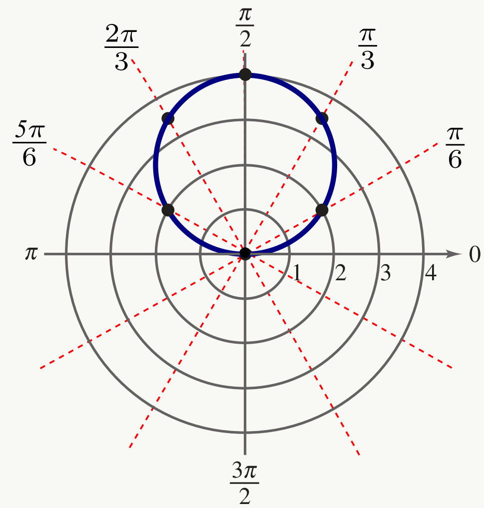


Figura 1.38: Gráfica de $r = 4\,\text{sen}\,\theta$

Nota: Observe que, para esta función, en realidad solo se necesita una tabla de valores en $[0, \pi]$

Máximos, ceros y tangentes al polo.

Una ayuda adicional para realizar el gráfico de una curva con ecuación en coordenadas polares, es conocer los ángulos para los que $|r|$ es máximo y para los cuales $r = 0$ y adicionalmete conocer las *tangentes al polo.*

Máximo valor de $|r|$. Para curvas sencillas podemos obtner el valor máximo de $|r|$ *por inspección*, usando el hecho de que $-1 \leqslant \text{sen}\,\theta \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.

Adionalmente podríamos aplicar cálculo: Los puntos críticos los obtenemos resolviendo la ecuación $\dfrac{dr}{d\theta} = 0$.

Ceros. Resolvemos la ecuación trigonométrica $f(\theta) = 0$

Tangentes al Polo. Sea C una curva de ecuación $r = f(\theta)$ con f una función derivable. Si la gráfica de C pasa por el Polo cuando $\theta = \alpha$ entonces $f(\alpha) = 0$.

Una tangente $\theta = \alpha$ a la curva $r = f(\theta)$ es una "tangente al polo" si $f(\alpha) = 0$.

Como $r = f(\theta)$, $\begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ y entonces, las pendientes de las tangentes vienen dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta} \quad \text{(Cuidado: La pendiente de la tangente no es } f'(\theta)) \quad !!!$$

Así, la recta $\theta = \alpha$ es una tangente a la curva si existe la derivada

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha} = \frac{f'(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha - f(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha}$$

El caso más sencillo es cuando $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$, en este caso: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha}=\tan\alpha.$

Tangentes y Tangentes al Polo

- La línea $\theta=\alpha$ es una *tangente al polo* en la gráfica de la curva $,C$ si $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$
- La línea $\theta=\alpha$ es una *tangente al polo* vertical, en la gráfica de la curva C, si $f(\alpha)=0$ y $\left|\frac{dy}{dx}\right|\longrightarrow\infty$ si $\theta\to\alpha$
- La línea $\theta=\alpha$ es una *tangente al polo* horizontal, en la gráfica de la curva C, si $f(\alpha)=0$ y $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha}=0.$
- También puede pasar que la derivada solo exista como un límite unilateral o que dy/dx se tenga que calcular como una forma indeterminada en el caso de que $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)=0.$

Ejemplo 1.51

Realizar el gráfico de la curva de ecuación $r=1-2\cos\theta$.

Solución: Para realizar la gráfica vamos a aplicar las pruebas de simetría, vamos a calcular los valores máximos, los ceros y las tangentes al polo. Finalmente haremos una tabla de valores.

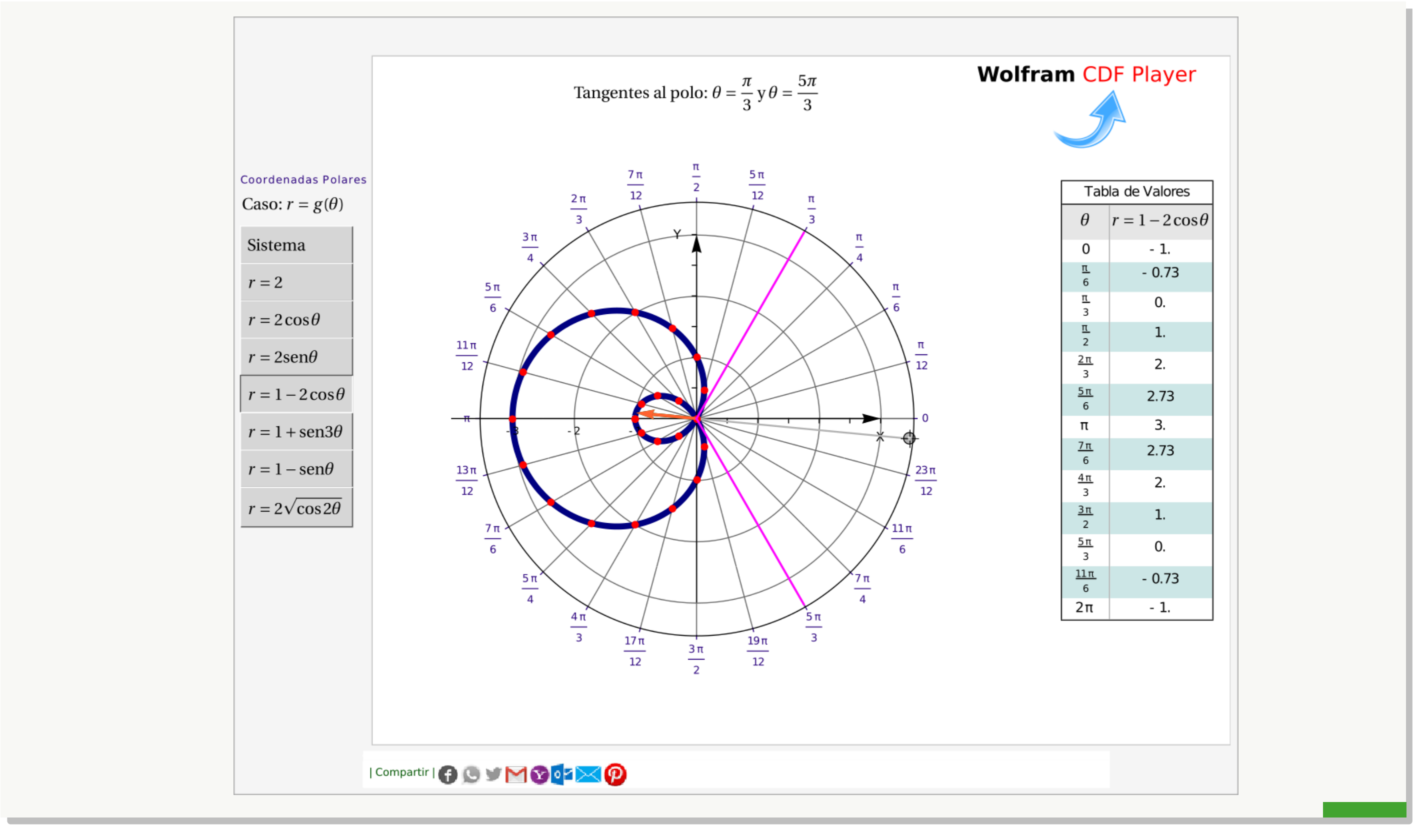
a.) **Simetría**: La curva es simétrica respecto al Eje Polar.

b.) **El valor máximo de** $|r|$: Por inspección: Como $2\geqslant -2\cos\theta \geqslant -2$, entonces el valor máximo es $|r|=3$ cuando $\theta=\pi$

c.) **Ceros en** $[0,2\pi]$: $1-2\cos\theta=0 \implies \cos\theta=\frac{1}{2} \implies \theta=\pi/3$ y $\theta=5\pi/3.$

d.) **Tangentes al Polo en** $[0,2\pi]$: La función se anula en $\alpha=\pi/3,\ 5\pi/3.$ Como $r'(\theta)=2\operatorname{sen}\theta$ y como $r'(\pi/3)\neq 0$ y $r'(5\pi/3)\neq 0$, entonces las rectas $\theta=\pi/3$ y $\theta=5\pi/3$ son dos tangentes al Polo.

e.) **Tabla de valores y gráfico**



Nota sobre tangentes al Polo. Si f' no está definida en el cero $\theta = \alpha$ entonces no se pueden definir tangentes al Polo para este valor del ángulo. Como ya indicamos, puede pasar que la derivada solo exista como un límite unilateral o que dy/dx se tenga que calcular como una forma indeterminada en el caso de que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0$. Por ejemplo, la curva de ecuación $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ tiene ceros en $\theta = \pm\pi/4$ pero su derivada $r'(\theta) = \dfrac{-\text{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$ está definida solo si $\cos(2\theta) > 0$. Aún así, la derivada existe como límite unilateral:

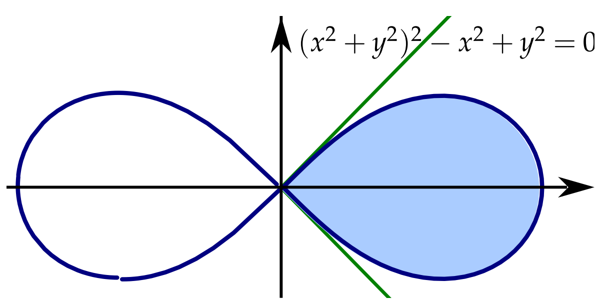


Figura 1.39: Las rectas $\theta = \pm\pi/4$ son tangentes al Polo.

Las rectas $\theta = \pm\pi/4$ son "tangentes en el límite", pues como

$$x = r(\theta)\cos\theta$$
$$y = r(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{r'(\theta)\operatorname{sen}\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\dfrac{-\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta}{\dfrac{-\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\cos\theta - \sqrt{\cos(2\theta)}\operatorname{sen}\theta} \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad \theta \longrightarrow \frac{\pi}{4}^{+}$$

Ejercicios

1.14.12 Realizar el gráfico de las curvas cuya ecuación se indica en la lista que sigue. Usar simetría, ceros, valores máxomo de $|r|$, tangentes al Polo y una tabla de valores.

a.) $r = 2$

b.) $\theta = 3\pi/4$

c.) $r = 3\cos\theta$

d.) $r = 3\operatorname{sen}\theta$

e.) $r = 2 + 3\cos\theta$

f.) $r = 2 - 3\cos\theta$

g.) $r = 4\cos 2\theta$

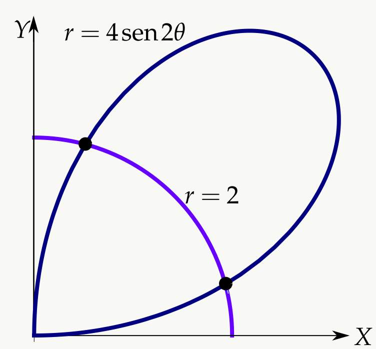
h.) $r = 4\operatorname{sen} 2\theta$

Intersección entre dos curvas

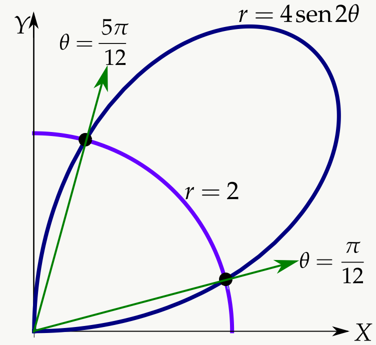
Si tenemos dos curvas $C_1:\ r = g_1(\theta)$ y $C_2:\ r = g_2(\theta)$, si estas curvas se intersecan, entonces la ecuación $g_(\theta) = g_2(\theta)$ podría darlos algunos puntos de intersección entre ambas curvas y en algunos caso no todos (debido a la no unicidad de las coordenadas polares). Si se yiene una representación gráfica, la podemos usar como orientación de los puntos de intersección que se esperan.

Ejemplo 1.52

Determine los dos puntos de intersección entre las curvas $C_1:\ r = 2$ y $C_2:\ r = 4\operatorname{sen}(2\theta)$, *en el I cuadrante.*



Solución: Como $C_1: \ r = 2$ y $C_2: \ r = 4\,\text{sen}(2\theta)$ entonces resolvemos $2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$



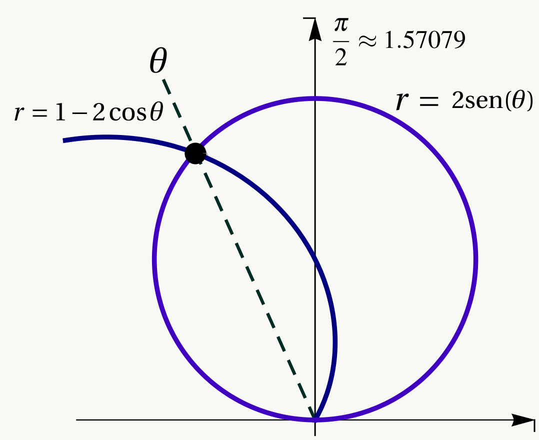
$$2 = 4\,\text{sen}(2\theta) \implies \text{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\implies \begin{cases} \theta = \dfrac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} \end{cases}$$

De estas soluciones, nos sirven $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ y $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$

Ejemplo 1.53

Determine el único punto de intersección, *en el II cuadrante*, entre las curvas $C_1: \ r = 1 - 2\cos\theta$ y $C_2: \ r = 2\,\text{sen}\,\theta$.



Solución: Como $C_1: \ r = 1 - 2\cos\theta$ y $C_2: \ r = 2\,\text{sen}\,\theta$ entonces resolvemos $1 - 2\cos\theta = 2\,\text{sen}\,\theta$

$$1 - 2\cos\theta = 2\,\text{sen}(\theta),$$

elevamos al cuadrado,

$$\begin{aligned} 1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta &= 4\,\text{sen}^2\,\theta \\ -3 - 4\cos\theta + 8\cos^2\theta &= 0, \end{aligned}$$

hacemos sustitución y resolvemos,

$$-3-4u+8u^2 \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \; u=\frac{4\pm\sqrt{112}}{16}$$

$$\cos\theta \;=\; \frac{4\pm\sqrt{112}}{16} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} \theta \;=\; \arccos\left(\dfrac{4\pm\sqrt{112}}{16}\right)+2k\pi \\[2ex] \theta \;=\; -\arccos\left(\dfrac{4\pm\sqrt{112}}{16}\right)+2k\pi \end{cases}$$

De todas las posibilidades, en el II cuadrante el único punto de intersección sería $\theta_1 = \arccos\left(\dfrac{4-\sqrt{112}}{16}\right) \approx 1.994$

Curvas especiales

Hay muchas curvas importantes que tienen una ecuación simple en coordenadas polares. A continuación hacemos un resumen de algunas de estas curvas.

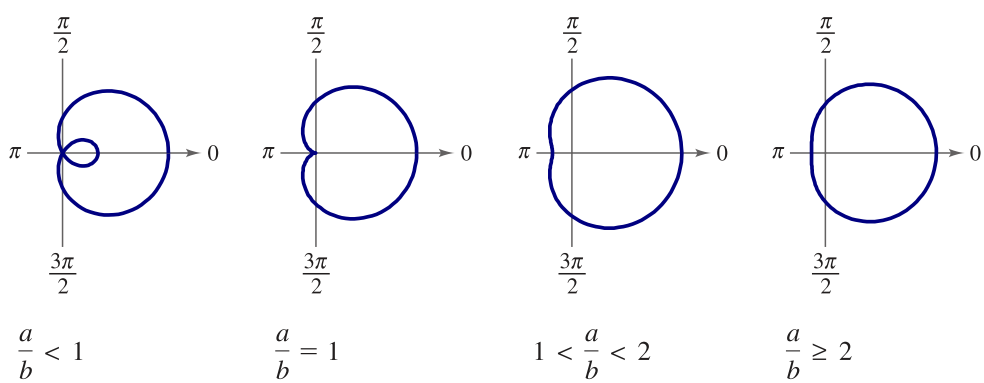


Figura 1.40: Caracoles $r = a \pm b\cos\theta,\quad a>0,\; b>0.$

También son caracoles las curvas de ecuación $r = a \pm b \operatorname{sen}\theta,$ solo que "abren en dirección del eje Y"

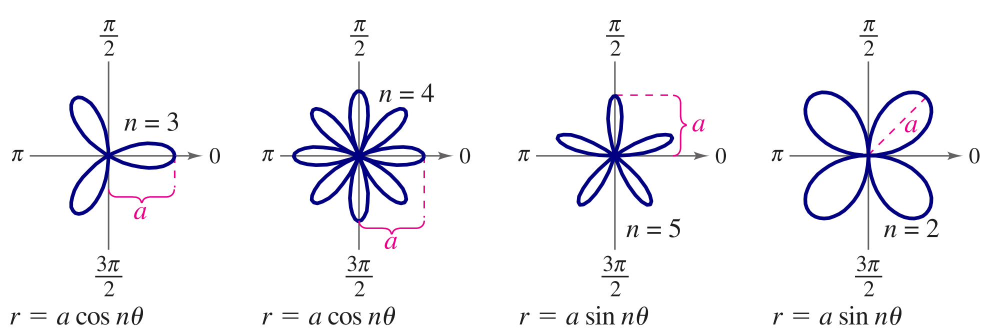
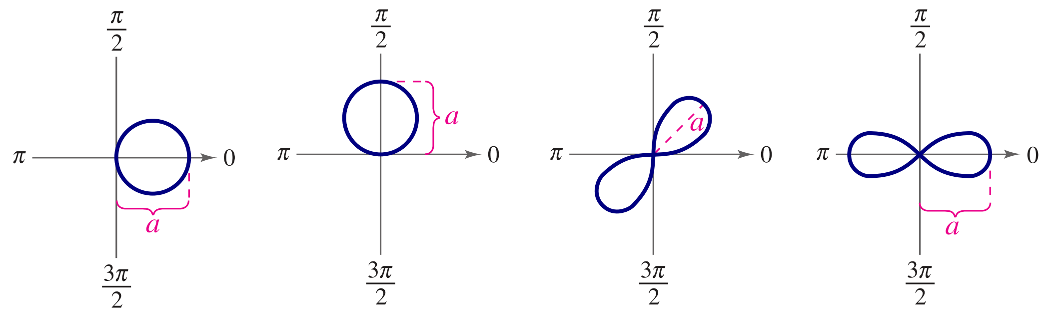


Figura 1.41: Rosas de n pétalos si n es impar y de $2n$ pétalos si n es par



$r = a\cos\theta$ Círculo

$r = a\sin\theta$ Círculo

$r^2 = a^2\sin 2\theta$ Lemniscata

$r^2 = a^2\cos 2\theta$ Lemniscata

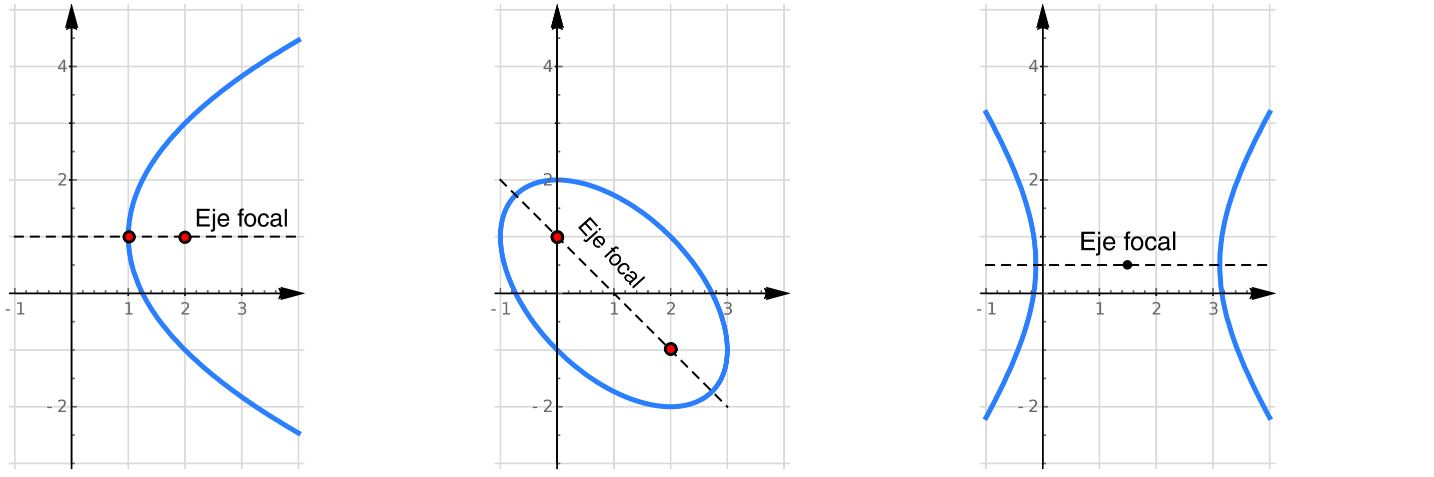
Figura 1.42: Círcunferencias y Lemniscatas

2 — Secciones Cónicas

2.1 Introducción.

Las secciones cónicas son curvas se pueden obtener como curvas de intersección entre un plano y un cono. Las cónicas "propias" son la parábola, la elipse y la hipérbola. La circunferencia es un caso especial de elipse. En coordenadas rectangulares, una cónica tiene "ecuación general"

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0. \tag{2.1}$$



a.) Parábola $y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ **b.)** Elipse $2x^2+2xy-4x+2y^2-2y-4 = 0$ **c.)** Hipérbola $2x^2 - 6x - y^2 + y - 1 = 0$

Sin embargo, hay casos en los que esta ecuación general no tiene soluciones (no hay lugar geométrico) o el conjunto solución es por ejemplo un punto o dos rectas. Estos casos especiales se llaman "cónicas degeneradas".

Usando la teoría de formas cuadráticas podemos obtener un criterio para clasificar las cónicas a partir de su ecuación general.

Teorema 2.1

Sea **C** la cónica de ecuación $A\,x^2+B\,xy+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$. Si $\Delta=4ACF-AE^2-B^2F+BDE-CD^2$, entonces

a.) si $B^2-4AC=0$ y $\Delta\neq 0$, tenemos que **C** una parábola.

b.) si $B^2-4AC<0$ y $\Delta\neq 0$, tenemos que **C** una elipse.

c.) si $B^2-4AC>0$ y $\Delta\neq 0$, tenemos que **C** una hipérbola.

Rotación. Si tenemos una cónica "no degenerada", de ecuación

$$A\,x^2+B\,xy+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0.$$

con $B\neq 0$, el "eje focal" no es paralelo a los ejes X ni Y y la cónica presenta una rotación respecto a estos ejes. Esta rotación se puede "eliminar" haciendo un cambio de variable. Por ejemplo, si la cónica presenta una rotación de ángulo θ respecto al eje X, entonces el cambio de variable $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$ y $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$ nos da una cónica sin rotación, respecto al sistema $X'Y'$, es decir, la ecuación respecto a este sistema tiene la forma

$$A'\,(x')^2+C'\,(y')^2+D'\,x'+E'\,y'+F'=0.$$

Cónica en posición estándar. Si $B=0$, el "eje focal" es paralelo al eje X o es paralelo al eje Y. En este caso decimos que la cónica está en "posición estándar". La ecuación de una cónica en posición estándar es

$$A\,x^2+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0.$$

Si la cónica está en "posición estándar", completando cuadrados podemos obtener la llamada "ecuación canónica". Con esta ecuación es más fácil clasificar la cónica y obtener las características más importantes de la curva.

Preliminares

Completar el cuadrado. En el tema de cónicas es muy útil la "completación de cuadrados" pues nos permite reducir ecuaciones del tipo $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ a una ecuación más natural y con más información. Una manera de completar cuadrados es

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

Ejemplo 2.1

a.) Completar el cuadrado en $4x^2-8x$

Solución:
$$\begin{aligned}4x^2-8x &= 4\left(x+\frac{-8}{2\cdot 4}\right)^2-\frac{(-8)^2}{4\cdot 4}\\ &= 4(x-1)^2-4\end{aligned}$$

b.) Completar el cuadrado en y^2+4y-8

Solución: $$y^2+4y-8 \;=\; \left(y+\frac{4}{2}\right)^2-\frac{(4)^2}{4\cdot 1}-8 \;=\; (y+2)^2-12$$

Lugares geométricos. Informalmente, un "lugar geométrico" es el "rastro" o la "huella" que deja un punto que se mueve de acuerdo a una ley especificada. En lo que a nosotros concierne, usaremos esta definición: Un "lugar geométrico" es el conjunto de todos los puntos (usualmente los puntos de una curva o una superficie) que satisfacen algún criterio o propiedad.

Ejemplo 2.2 (Lugar geométrico).

Una circunferencia en el plano es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto $\mathbf{O}$ llamado "centro".

Nos interesa *la ecuación en coordenadas rectangulares* de la curva que se forma: Una circunferencia de radio a está formada por todos los puntos (x,y) que están a una distancia "a" del centro $\mathbf{O}=(\mathbf{h},\mathbf{k})$. Entonces

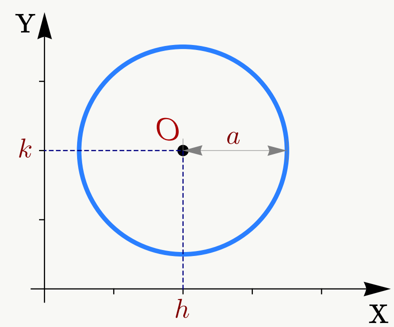


Figura 2.1: Lugar geométrico

$$\|(x,y)-(h,k)\|=a \implies \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=a$$
$$\implies (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ es la versión en coordenadas rectangulares para una circunferencia de centro (h,k) y radio a.

2.2 La Parábola

Definición 2.1 (La parábola como lugar geométrico).
En un plano, una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos Q equidistantes de un punto fijo F (llamado *foco*) y de una recta fija ℓ (llamada *directriz*) que no contiene a F, es decir, $d(Q,F)=d(Q,\ell)$.

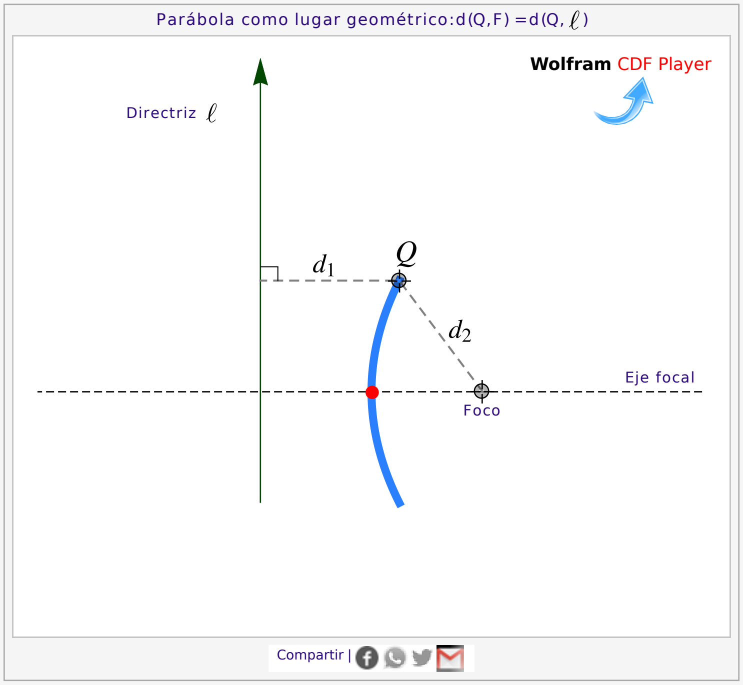
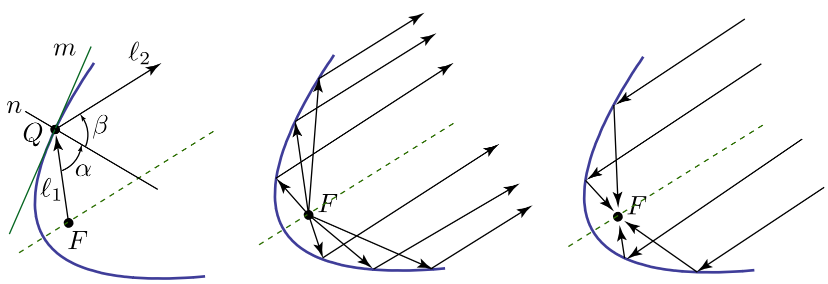
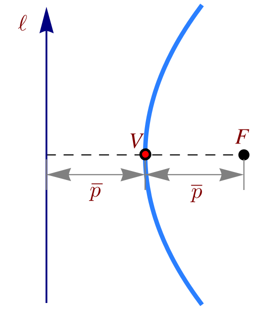


Figura 2.2: Parábola

Propiedad focal de la parábola: En Física, la ley de reflexión establece que si un rayo de luz ℓ_1 toca una superficie pulida m en un punto Q, este rayo es reflejado a lo largo de otra recta ℓ_2 de tal manera que si n es la recta normal a m en Q, el ángulo de incidencia α es igual al ángulo de reflexión β. Esta ley combina muy bien con la llamada "propiedad focal" de la parábola: *La normal a la parábola en cualquier punto Q de la parábola forma ángulos iguales con el segmento FQ (que corresponde a ℓ_1) y la recta que pasa por Q y es paralela al eje de simetría de la parábola (que corresponde a ℓ_2).*



Aplicaciones. Las antenas utilizadas preferentemente en las comunicaciones vía satélite son las antenas parabólicas. Las señales que inciden sobre su superficie se reflejan y alimentan el foco de la parábola, donde se encuentra el elemento receptor (también podría ser un elemento emisor). Son antenas parabólicas de foco primario. La propiedad focal de la parábola también se usa para el diseño de los focos de los automóviles, en este caso se debe usar un lente para desviar la luz de tal manera que no afecte a los conductores que vienen de frente,



Directriz, eje, vértice y foco. La recta que pasa por F y es perpendicular a L se llama "eje" o "eje de simetría". El punto de la parábola que está sobre este eje transversal se llama *vértice* y lo denotamos con V. Por la definición de la parábola, el vértice está a la misma distancia de la recta ℓ y del Foco. Esta distancia la denotamos con $\overline{p}$

Ecuación canónica.

En coordenadas rectangulares, una parábola tiene ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad B^2 - 4AC = 0 \quad \text{y} \quad \Delta \neq 0$$

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la parábola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ y $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$.

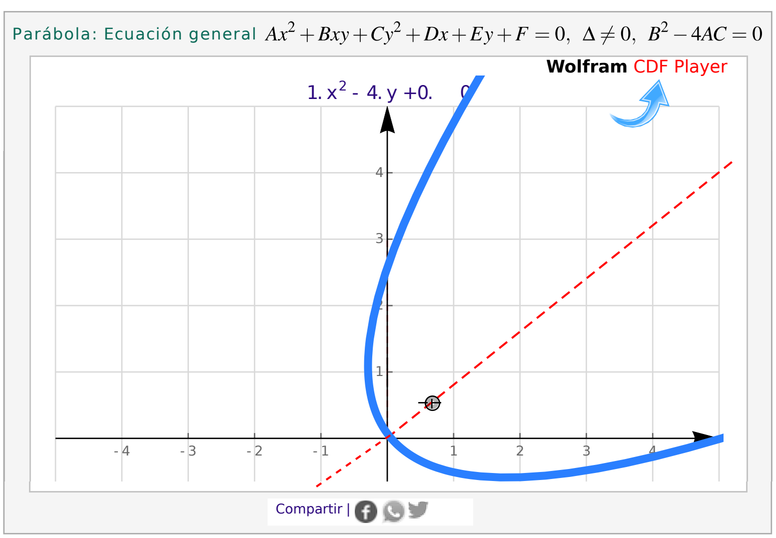


Figura 2.3: Parábola con rotación: $B \neq 0$

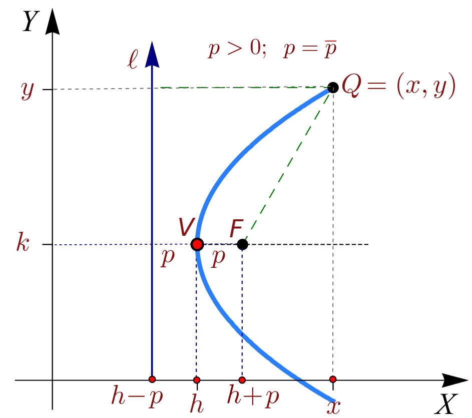
Si $B = 0$, la cónica está en posición estándar y la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y.

Parábola en posición estándar: Directriz paralela al eje Y.
Si la directriz es paralela al eje Y y si $V = (h,k)$, entonces hay dos posibilidades: la parábola abre a la izquierda o abre a la derecha.

En el caso de que la parábola abre a la derecha, el foco es

$$F = (h+\overline{p}, k)$$

Los puntos $Q = (x,y)$ de la parábola satisfacen $d(Q,F) = d(Q,\ell)$, es decir,



$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2} &= x-h+\overline{p} \\
(x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2 &= (x-h+\overline{p})^2 \\
(y-k)^2 &= 4\overline{p}(x-h)^2
\end{aligned}$$

Como $\overline{p} > 0$, entonces $x \geqslant h$ como se espera. Así, si la parábola abre hacia la derecha, su *ecuación canónica* es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \text{con} \quad p > 0.$$

En el caso de que la parábola abra a la izquierda, el foco es $F = (h-\overline{p}, k)$. Los puntos $Q = (x,y)$ de la parábola satisfacen $d(Q,F) = d(Q,L)$. Procediendo como antes,

$$\sqrt{(x-h+\overline{p})^2+(y-k)^2} \ = \ x-h-\overline{p} \implies (y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \text{con} \quad p = -\overline{p}.$$

Como $p = -\overline{p}$, el foco es $F = (h+p, k)$ nuevamente.

En ambos casos, la ecuación simplificada es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ donde $\overline{p} = |p|$. Con esta notación, si $p > 0$, la parábola abre a la derecha y si $p < 0$, la parábola abre a la izquierda. Esta ecuación es llamada *ecuación canónica* o *natural*. Esta ecuación es especial pues contiene la información del vértice, el foco y la directriz.

Parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

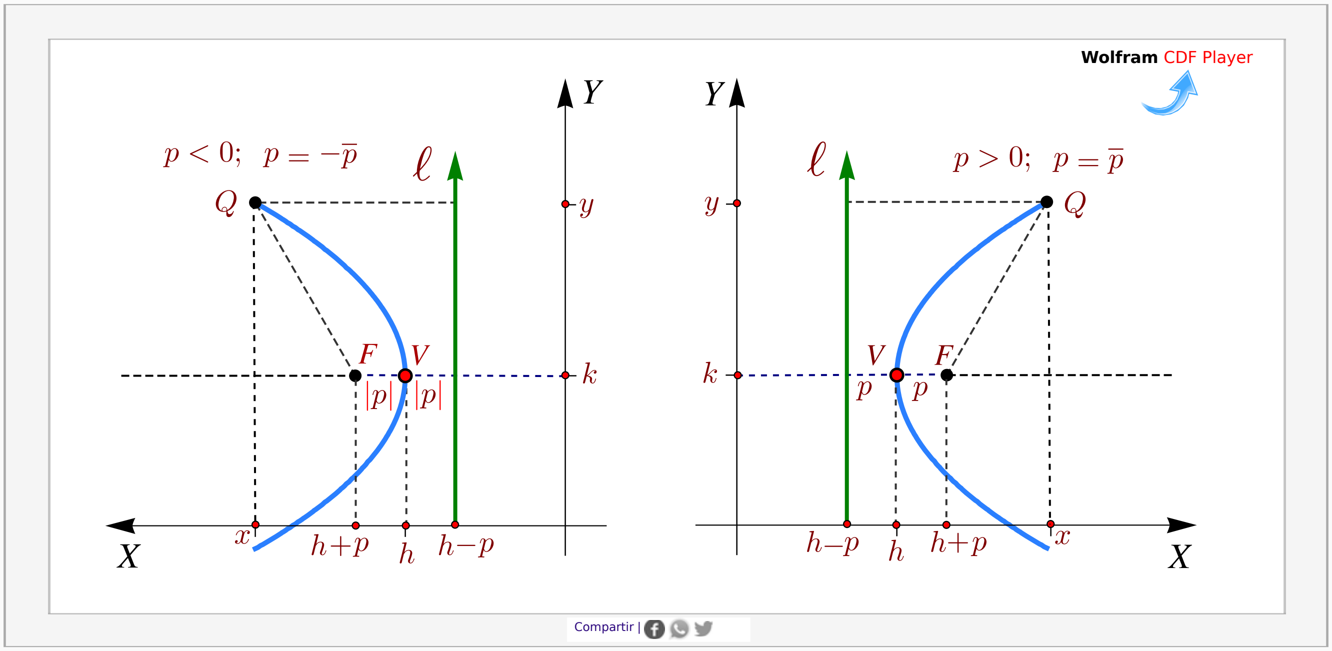


Figura 2.4: Parábola con directriz $\ell: \ y = h - p$, paralela al eje Y.

Ejemplo 2.3

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6y - 2x + 17 = 0$. Además realice la gráfica.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$\begin{aligned}
y^2 - 6y - 2x + 17 &= 0 \\
\left(y + \frac{-6}{2\cdot 1}\right)^2 - \frac{6^2}{4\cdot 1} - 2x + 17 &= 0 \\
(y-3)^2 - 9 - 2x + 17 &= 0 \\
(y-3)^2 &= 2\,(x-4)
\end{aligned}$$

- El vértice es $V = (4,3)$ y como $4p = 2 \ \Rightarrow \ p = 1/2 > 0$.
- La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F = (4 + \frac{1}{2},\ 3)$.
- La directriz es la recta de ecuación $\ell: \ x = 4 - \frac{1}{2}$. La gráfica se muestra en la figura.

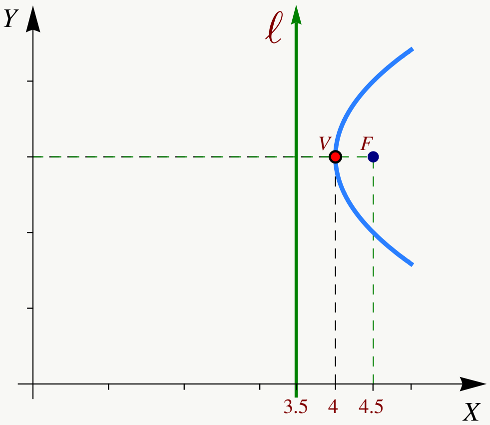
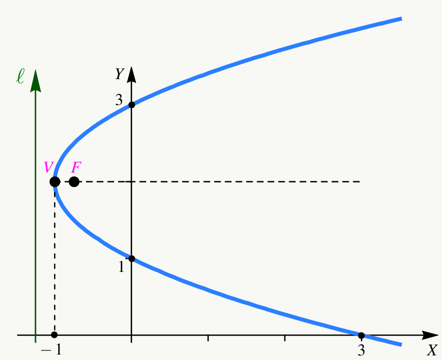


Figura 2.5: Parábola $(y-3)^2 = 2\,(x-4)$

Ejemplo 2.4

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,2)$ y que contiene los puntos $(0,3)$ y $(0,1)$. Indique las características principales y realizace la representación gráfica.

Solución: Es conveniente hacer un dibujo y representar los datos. De acuerdo a la figura a al derecha, lo que tenemos es una parábola que abre a la derecha y su ecuación sería



$$(y-2)^2 = 4p(x+1)$$

Para determinar p usamos el hecho de que el punto $(0,3)$ está en la parábola y, por tanto, satisface la ecuación: Sustituyendo $x=0$ y $y=3$ obtenemos

$$(3-2)^2 = 4p(0+1) \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la parábola es $(y-2)^2 = (x+1)$

Observe que el otro punto $(0,1)$ solo lo usamos para establecer que la parábola abre a la derecha.

Características principales:

- Vértice $(-1,2)$
- Foco $\left(-1+\frac{1}{4},\, 2\right)$
- Directriz: La recta vertical de ecuación $x = -1 - \frac{1}{4}$
- a.) Intersección con el eje X en $x=3$
  b.) Intersección con el eje Y en $y=1$ y $y=3$

Parábola en posición estándar: Directriz paralela al eje X. De manera análoga al caso anterior, si la directriz es paralela al eje X, entonces la *ecuación canónica* de la parábola es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

de tal manera que si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. En resumen, si la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y, y si el vértice es $V = (h,k)$, la ecuación canónica es

Parábola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

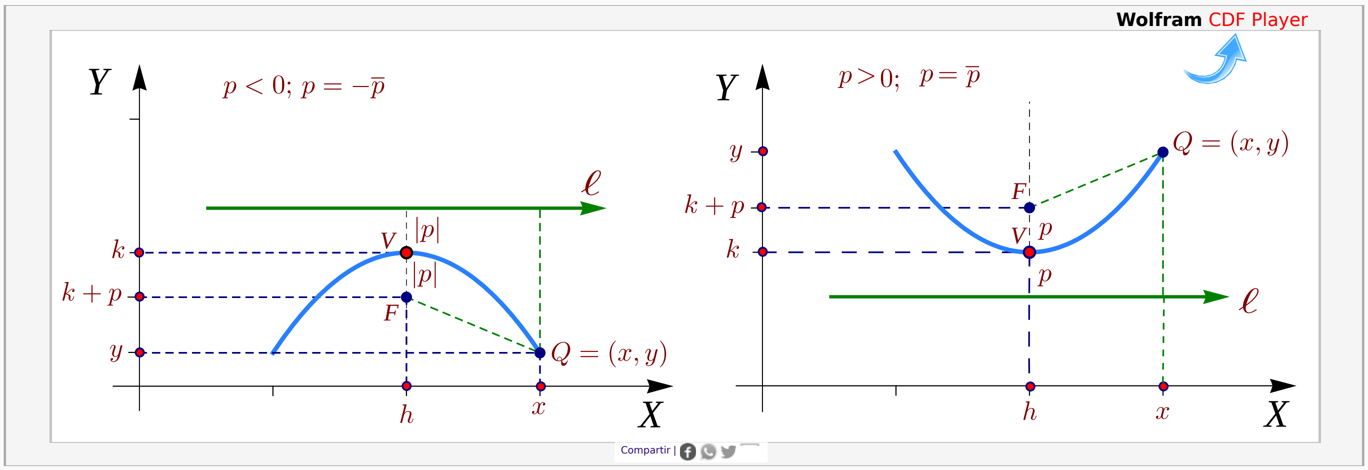


Figura 2.6: Parábola con directriz $\ell: \ y = k - p$, paralela al eje X.

Ejemplo 2.5

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $2x^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Además realice la gráfica.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4x - 2y - 4 &= 0 \\
2\left(x + \frac{-4}{2\cdot 2}\right)^2 - \frac{4^2}{4\cdot 2} - 2y - 4 &= 0 \\
2\,(x-1)^2 - 2 - 2y - 4 &= 0 \\
(x-1)^2 &= (y+3)
\end{aligned}$$

- El vértice es $V = (1,-3)$ y como $4p = 1 \ \Rightarrow \ p = 1/4 > 0$.
- La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F = (1, \ -3 + \frac{1}{4})$.

- La directriz es la recta de ecuación $\ell:\ y=-3-\frac{1}{4}$.
- Intersección eje $X:\ 2x^2-4x-4=0 \implies x = 1\pm\sqrt{3}$
- Intersección eje $Y:\ -2y-4=0 \implies y=-2$

La gráfica se muestra en la figura.

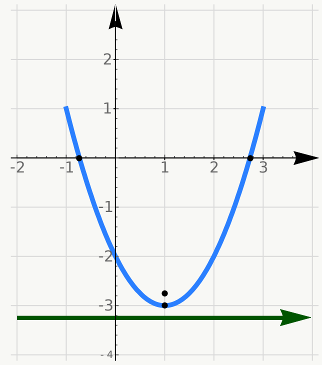


Figura 2.7: Parábola $(x-1)^2 = (y+3)$

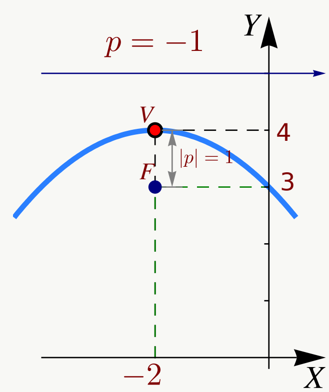
Ejemplo 2.6

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-2,4)$ y foco en $(-2,3)$. Realizar la gráfica.

Solución: Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa, el eje de la parábola es vertical, además las distancia entre el foco y el vértice es $|p|=1$ y como abre hacia abajo, $p=-1$. Entonces la ecuación canónica es,

$$(x+2)^2 = -4(y-4)$$

La directriz es la recta $y=5$. La gráfica se muestra en la figura.



Ejercicios

2.2.1 Determine la ecuación canónica de las siguientes parábolas,

a.) $y=2x^2-4x+1$.

b.) $-9\,y^2-8\,x-3=0$

c.) $y^2+2y-4x=7$

d.) $x^2+2x-2y+5=0$

e.) $x^2-y+2=0$

2.2.2 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$.

2.2.3 Determine la ecuación canónica de la parábola con eje focal paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(-1,2)$ y $(-2,-2)$

2.2.4 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,1)$ y directriz $y=0$.

2.2.5 Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en $(3,4)$ y directriz $x=7$.

2.2.6 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(2,3)$, eje focal paralelo al eje Y y que pasa por el punto $(4,5)$.

2.2.7 Determine la ecuación canónica y el foco de la parábola (o las parábolas) que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) vértice en $(2,0)$,

b.) contiene al punto $P=(8,b)$ con $b>0$,

c.) la distancia de P a la directriz es 10,

d.) eje de simetría paralelo al eje Y.

2.2.8 Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica (incluye foco e intersecciones con los ejes) de la parábola con vértice está en $(5,-2)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $x=\dfrac{47}{9}$

2.2.9 Hay *tres* parábolas que satisfacen simultáneamente las condiciones que siguen. Determine la ecuación canónica de cada una de estas parábolas y el valor de b en cada caso.
a.) Vértice en $(2,0)$,
b.) contiene al punto $P=(b,8)$ con $b>2$,
c.) la distancia de P a la directriz es 10.

2.2.10 En la definición de la parábola como un lugar geométrico se indica que el foco no está en la directriz. ¿Qué pasa si el foco está en la directriz?

2.2.11 Verificar que el vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ es el punto $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

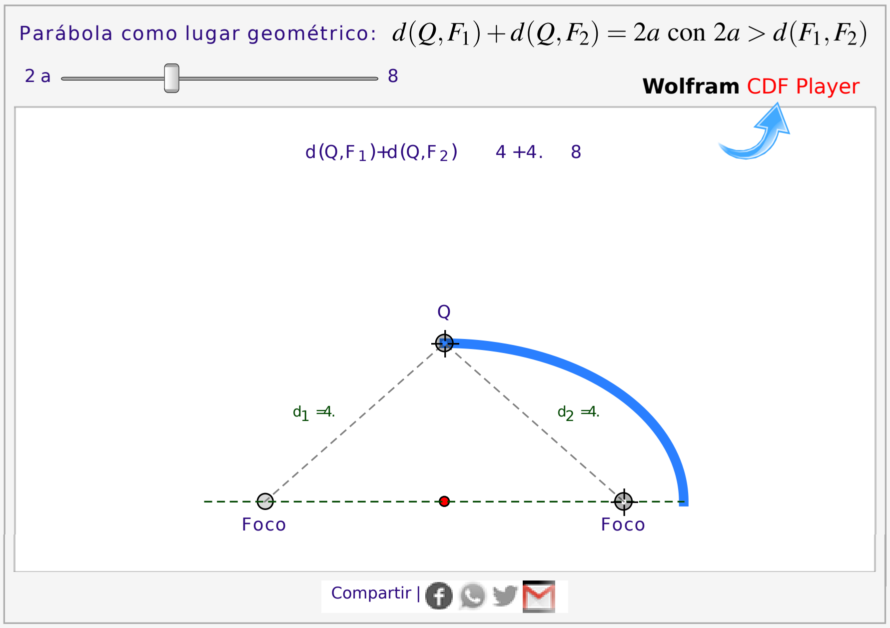
2.2.12 Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos Q del plano XY tales que equidistan del punto $(2,3)$ y de la recta de ecuación $x=4$.

2.3 La Elipse

Definición 2.2 (La elipse como lugar geométrico).

En un plano, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos Q cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante mayor que $d(F_1,F_2)$). Si la suma es la constante $2a$, con $2a > d(F_1,F_2)$, entonces

$$d(Q,F_1) + d(Q,F_2) = 2a$$



Propiedad focal de la elipse. La elipse también tiene una "propiedad focal" análoga a la de la parábola: *La normal a la elipse en cualquier punto* Q *de la elipse forma ángulos iguales con el segmento* F_1Q *y el segmento* F_2Q

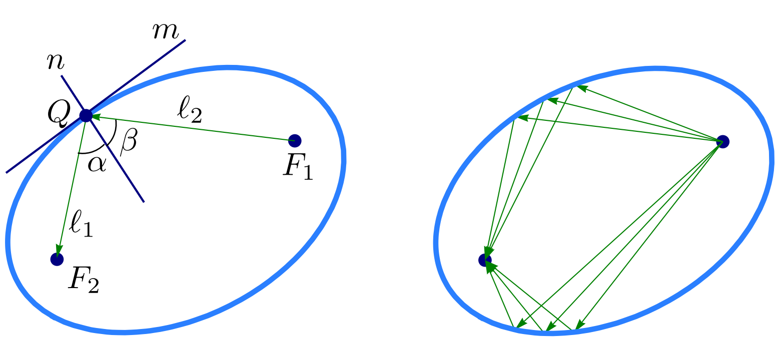
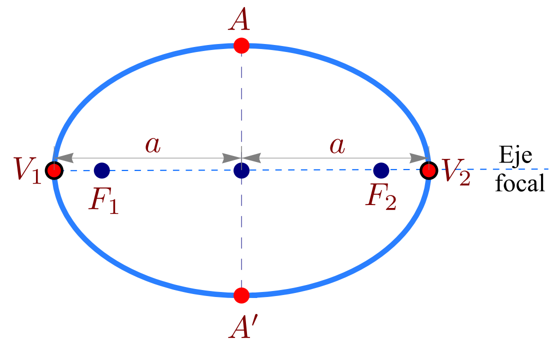


Figura 2.8: Propiedad focal de la elipse

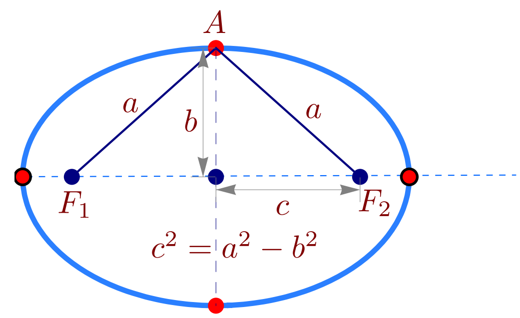
Como en el caso de la parábola, también la propiedad focal de la elipse se usa para el diseño de focos para automóvil y de reflectores para las lámparas que vemos en el consultorio del dentista,

Eje menor, eje mayor, centro y vértices. Supongamos que los focos de la elipse son F_1 y F_2. Además, $d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$ con $2a>d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la elipse en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje mayor.* El punto en la mitad del eje mayor se llama *centro* de la elipse. El *eje normal* es el eje que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Este eje normal corta a la elipse en dos puntos A y A'. El segmento que une estos dos puntos se llama *eje menor.*



De acuerdo a la definición de la elipse, la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro.

Si la longitud del semieje menor es b, entonces como el triángulo $\triangle F_1AF_2$ es isósceles, entonces $d(A,F_1)=a$ y se obtiene que la distancia de cada foco al centro es c con $c^2=a^2-b^2$.



Ecuación canónica.

En coordenadas rectangulares, una elipse tiene ecuación general

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{con} \quad B^2-4AC<0 \quad \text{y} \quad \Delta \neq$$

Si $B\neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la elipse presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable

$$x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta.$$

Si $B=0$, la cónica está en posición estándar y la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y.

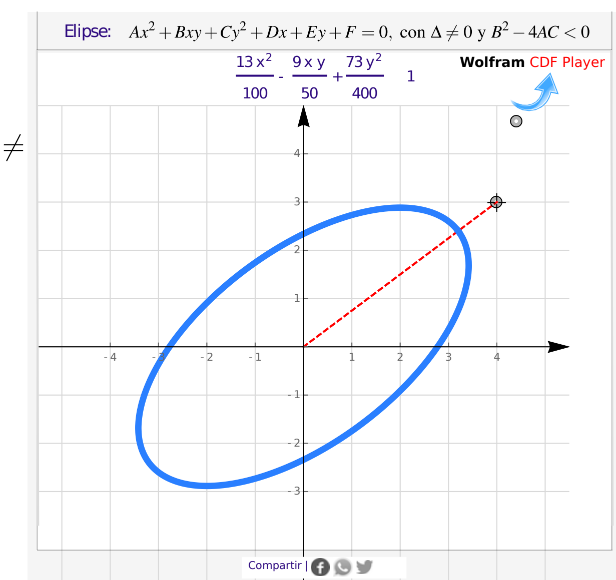
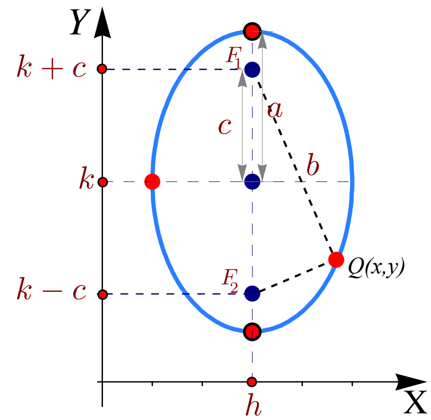


Figura 2.9: Elipse con rotación

Elipse en posición estándar: Directriz paralela al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h,k+c)$ y $F_2=(h,k-c)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen



$$d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}+\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}=2a$$

Ahora simplificamos la ecuación,

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right)^2\\
a^2-c(y-k) &= a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2},\\
&\text{elevamos al cuadrando,}\\
a^4+2a^2c(y-k)+c^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^2c^2,\\
&\text{sustituyendo } c^2=a^2-b^2,\\
-b^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2-a^2b^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1
\end{aligned}$$

La ecuación simplificada $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$, se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices.

Eje mayor paralelo al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h-c,k)$ y $F_2=(h+c,k)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen

$$d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}=2a.$$

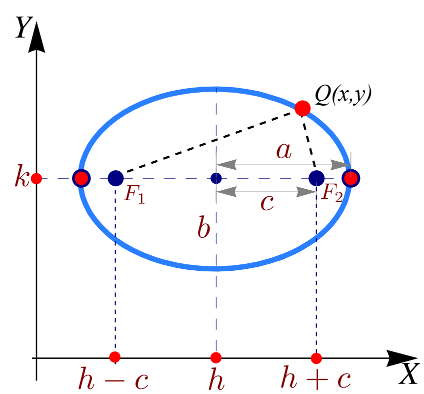
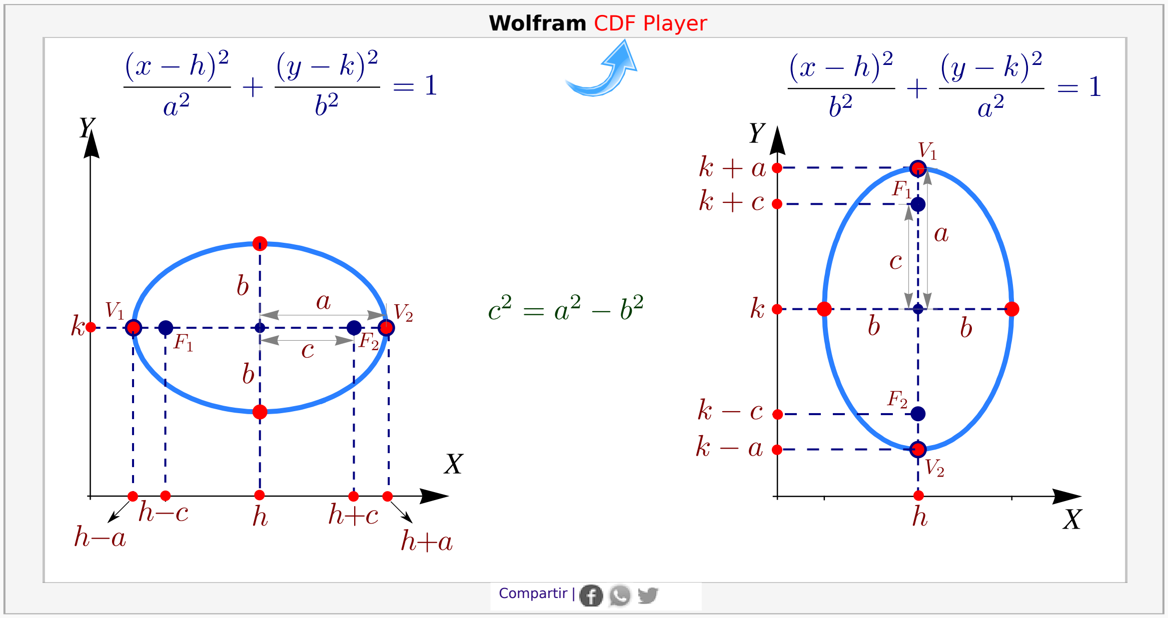


Figura 2.10: Elipse con eje mayor paralelo al eje X

Como antes, la ecuación simplificada queda $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$. A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices.,En resumen,

Elipse sin rotación. “ a ” es la longitud del semieje mayor



Circunferencia de radio a. Formalmente, la curva que delimita un círculo se llama *circunferencia.* Por abuso del lenguaje se habla de un “círculo de radio a”. La circunferencia es un caso especial de elipse en la que los focos son iguales y coinciden con el centro de la circunferencia. En este caso, $a^2 = b^2 = a^2$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de un círculo con centro en $O = (h, k)$ y radio a, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{o también} \quad (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

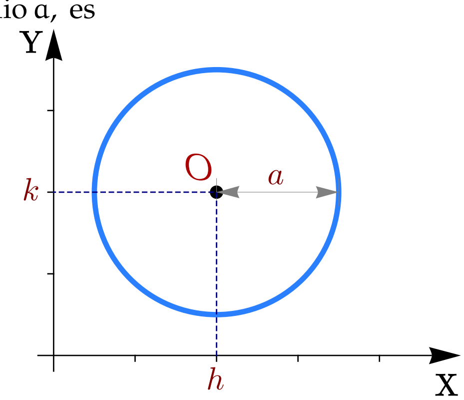
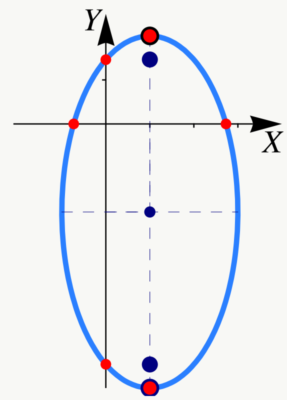


Figura 2.11: Circunferencia de radio a centrada en (h, k)

Ejemplo 2.7

Hallar la ecuación canónica de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos y el centro.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables x e y.



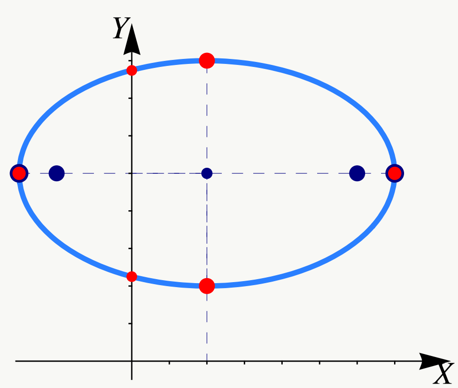
$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 &= 0 \\ 4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 &= 0 \\ 4(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 16 \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

- El centro es $(h,k) = (1,-2)$. La elipse tiene eje mayor paralelo al eje Y.
- Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 4$ y $b = 2$.
- Ahora, $c^2 = 16 - 4 \implies c = \sqrt{12}$. Los focos son $(1, -2 \pm \sqrt{12})$ y los vértices son $(1,-6)$, $(1,2)$.
- Las intersecciones con los ejes son $y \approx -5.46$, $y \approx 1.46$, $x \approx -0.73$ y $x \approx 2.73$.

Ejemplo 2.8

Determine la ecuación canónica y las características más importantes de la elipse cuyo eje mayor tiene extremos $(-3,5)$ y $(7,5)$ y cuyo eje menor tiene extremos $(2,2)$ y $(2,8)$.

Solución: El centro es el punto medio entre $(-3,5)$ y $(7,5)$, es decir, $(2,5)$. El semieje mayor mide $a = 5$ y el semieje menor mide $b = 3$.

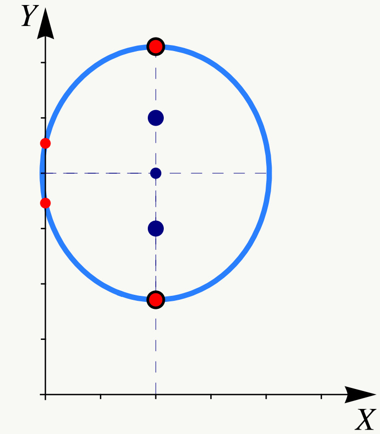


- Como el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación canónica es,
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$
- Como $c^2 = 25 - 9$, entonces $c = 4$ y los focos son $(2 \pm 4, 5)$. Los vértices son $(2 \pm 5, 5)$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx 2.25$ y $y \approx 7.75$.

Ejemplo 2.9

Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en $(2,5)$ y $(2,3)$ y que contiene al punto $(3,6)$. Realizar la gráfica.

Solución: Por la posición de los focos, el eje mayor es paralelo al eje Y. Además también deducimos que el centro es $(h,k)=(2,4)$ y que $c=1$. Como $c^2=a^2-b^2$, tenemos $b^2=a^2-1$. Hasta ahora tenemos que la ecuación canónica es



$$\frac{(x-2)^2}{b^2}+\frac{(y-4)^2}{a^2}=1$$

Como $b^2=a^2-1$ y como la elipse contiene al punto $(3,6)$, este punto satisface esta ecuación, es decir,

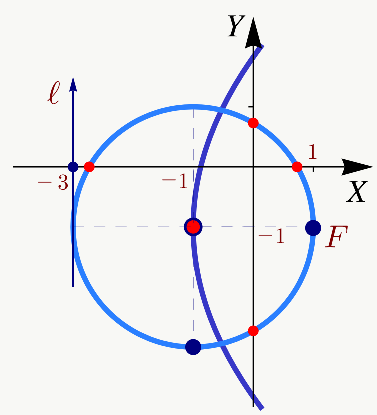
$$\begin{aligned}\frac{(3-2)^2}{b^2}+\frac{(6-4)^2}{a^2} &= 1,\\ \frac{1}{a^2-1}+\frac{4}{a^2} &= 1 \implies a^2=3\pm\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Como $b^2=a^2-1>0$, la única solución es $\dfrac{(x-2)^2}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{(y-4)^2}{3+\sqrt{5}}=1$. Las intersecciones con el eje Y son $y\approx 3.46,\ y\approx 4.54$.

Ejemplo 2.10

Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco $(1,-1)$ y directriz $x=-3$. Realizar la gráfica.

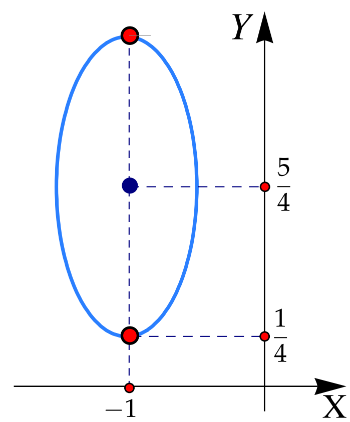
Solución: Como el vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz entonces $(h,k)=(-1,-1)$. La ecuación de la circunferencia es



$$(x+1)^2+(y+1)^2=4.$$

Las intersecciones con el eje X son $x\approx -2.73$ y $x\approx 0.73$. Las intersecciones con el eje Y son $y\approx -2.73$ y $y\approx 0.73$.

Ejercicios



2.3.1 Considere la elipse a la derecha. Si se sabe que el punto $(-1/2,\ 5/4)$ está en la elipse, determine su ecuación canónica, sus focos y sus vértices.

2.3.2 En cada caso, obtener la ecuación canónica de la elipse.

a.) $\dfrac{(y-1)^2}{2}+\dfrac{5(x+2)^2}{3}=2$

b.) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{4}+y+1=0$

c.) $\dfrac{x^2}{4}+x+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{y}{2}+1=0$

d.) $x^2+\dfrac{y^2}{2}-2y+1=0$

2.3.3 Considere la cónica $4x^2+y^2-16x-6y+21=0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la intersección con los ejes.

2.3.4 Determine la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen, contiene al punto $(-1,3)$ y uno de sus vértices es $(0,5)$. Realizar la gráfica.

2.3.5 Determine la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3,1)$, $(3,9)$ y eje menor de longitud 6. Realizar la gráfica.

2.3.6 Determinar la ecuación canónica de la elipse si se sabe que es tangente a los ejes en el primer cuadrante y uno de sus vértices es $(8,2)$.

2.3.7 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor horizontal y los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$ están en la elipse.

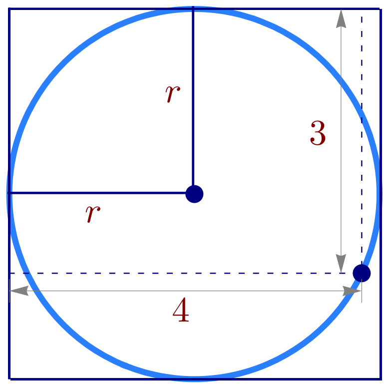
2.3.8 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(2,1)$, longitud del eje menor $2\,ul$ y eje mayor vertical y de longitud $6\,ul$.

2.3.9 Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola $y^2+4x=32$ y que tiene su otro foco en el origen.

2.3.10 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los puntos $(\pm 3,0)$ es 16.

2.3.11 Considere la cónica de ecuación $9y^2+16x^2+54y-64x+1=0$. Verifique que se trata de una elipse e indique sus características principales.

2.3.12 Se tiene un círculo inscrito en un cuadrado tal y como se muestra en la figura que sigue. Determinar el radio.



2.3.13 Considere la cónica **C** de ecuación $x^2-4x+8y+12=0$. Determine la ecuación canónica y las características más importantes, de la elipse que cumple simúltaneamente con las siguientes condiciones,

a.) Su centro coincide en el vértice de la cónica **C**
b.) La distancia entre sus focos es 4 y están en la recta $x=2$
c.) La distancia de un foco al vértice más cercano es 3

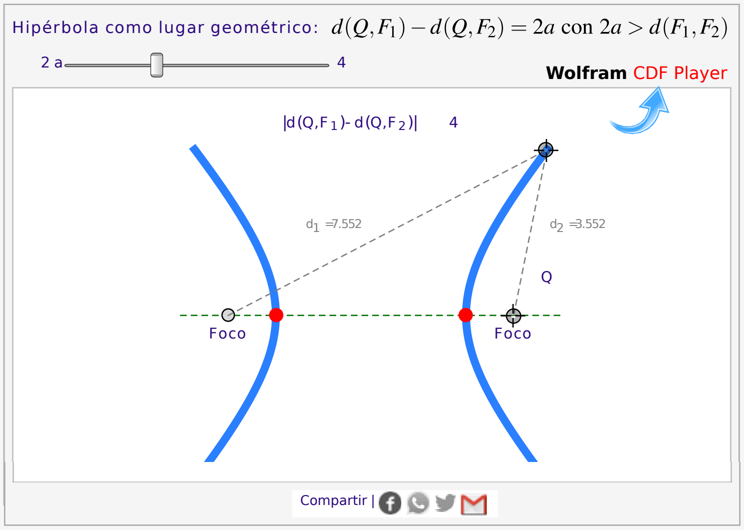
2.3.14 Determine la ecuación canónica de la elipse que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) El vértice V_1 de la elipse coincide con el foco de la parábola de ecuación $(x-2)^2=-4y+24$.
b.) El vértice V_2 de la elipse coincide con el centro de la hipérbola de ecuación $x^2-4x-y^2+2y=-2$.
c.) La elipse contiene el punto $(1,2)$.

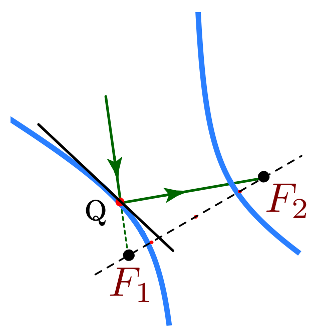
2.3.15 En la definición de la elipse como un lugar geométrico se indica que $2a>d(F_1,F_2)$. ¿Qué pasa si $2a\leqslant d(F_1,F_2)$?

2.4 La Hipérbola.

Definición 2.3 (La hipérbola como lugar geométrico).
En un plano, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos Q tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante menor que $d(F_1,F_2)$). Si la diferencia es la constante $2a$, con $2a<d(F_1,F_2)$, entonces $|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a$

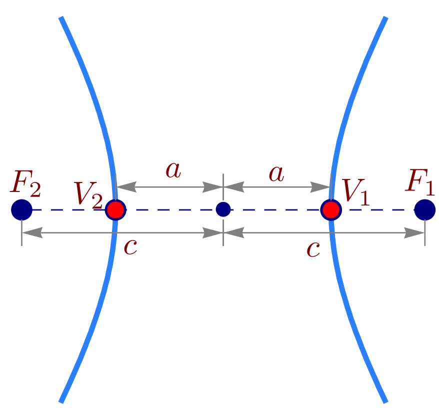


Propiedad focal de la hipérbola. La hipérbola también tiene una "propiedad focal" análoga a la de la elipse y la parábola: *La normal a la hipérbola en cualquier punto* Q *de la hipérbola, forma ángulos iguales con el segmento* F_1Q *y el segmentos* F_2, Q



La propiedad focal de la hipérbola tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, en la construcción de telescopios.

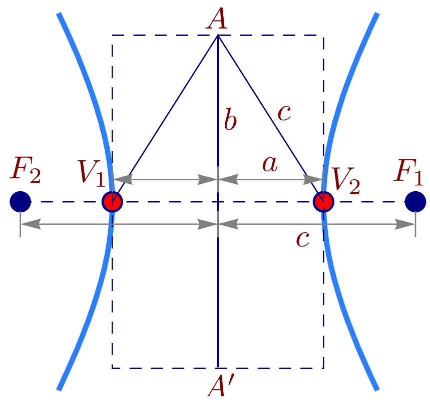
Ejes, centro y vértices. Supongamos que los focos de la hipérbola son F_1 y F_2. Además, $|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a$ con $2a<d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la hipérbola en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje transverso.* El punto medio de este eje se llama *centro* de la hipérbola.



De la definición de la hipérbola se puede deducir que la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro.

Si la distancia del centro a cada uno de los focos es c, como $c > a$, podemos formar el triángulo isósceles $\triangle V_1V_2A$ que se muestra en la figura de la derecha. La altura de este triángulo la denotamos con b. El *eje conjugado* es el segmento AA' (en la figura de la derecha) y mide $2b$. Este segmento pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Claramente, este el semieje conjugado tiene longitud b y, por pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Ecuación canónica.

En coordenadas rectangulares, una hipérbola tiene ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad B^2 - 4AC > 0 \quad \text{y} \quad \Delta \neq 0$$

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la hipérbola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ y $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

Si $B = 0$, la cónica está en posición estándar y la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y.

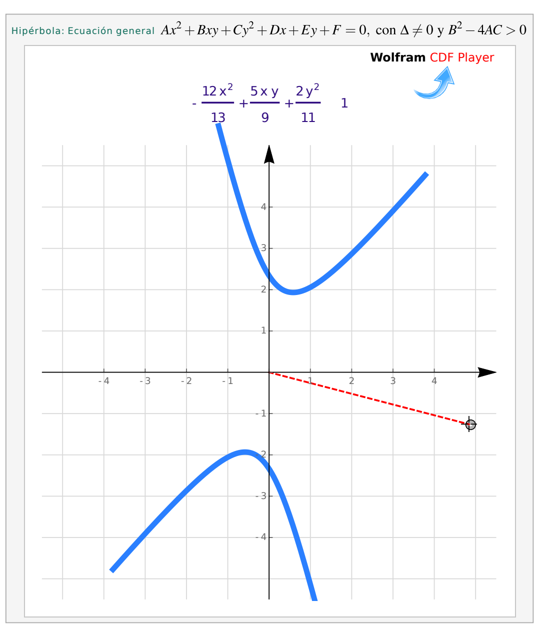
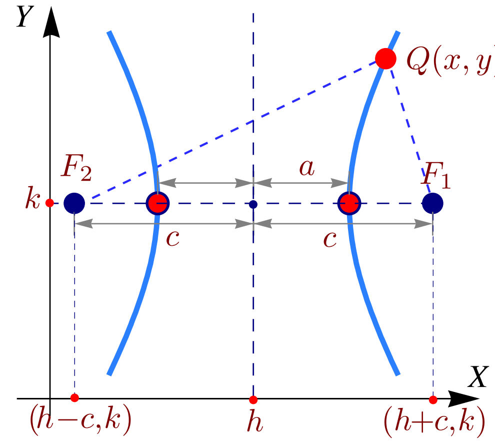


Figura 2.12: Hipérbola con rotación

Hipérbola en posición estándar: Directriz paralela al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h+c,k)$ y $F_2=(h-c,k)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la hipérbola satisfacen



$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a,$$

es decir,

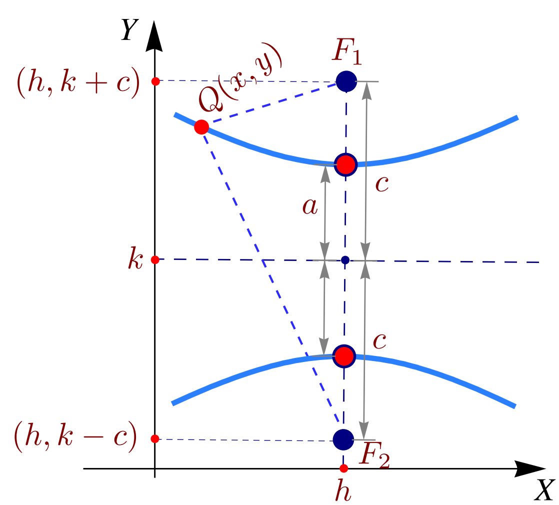
$$\left|\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right|=2a$$

Para simplificar un poco el cálculo, supongamos que $d(Q,F_1)-d(Q,F_2)>0$ (el otro caso es es totalmente similar), entonces

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right)^2,\\
c(x-h)-a^2 &= a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2},\\
&\text{elevamos al cuadrado,}\\
(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2 &= a^2(c^2-a^2),\\
\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{c^2-a^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Poniendo $b^2=c^2-a^2$, la ecuación simplificada sería $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$; esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c, focos y vértices.

Hipérbola en posición estándar: Directriz paralela al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h,k-c)$ y $F_2=(h,k+c)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la hipérbola satisfacen



$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}-\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right|=2a.$$

Como antes, la ecuación simplificada queda $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$. A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c, focos y vértices.

Asíntotas de la hipérbola. Consideremos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. La recta $y = k \pm \dfrac{a}{b}(x-h)$ y la recta $y = k \pm \dfrac{b}{a}(x-h)$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola correspondiente. Para verificar esto, solo necesitamos despejar y en ambas ecuaciones,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{a}{b}\sqrt{(x-h)^2 + b^2},$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2 - a^2}.$$

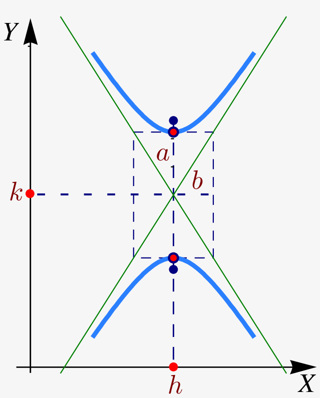
De aquí podemos calcular y obtener el siguiente resultado,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x\to\pm\infty} y - \left(k \pm \frac{a}{b}(x-h)\right) = 0,$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x\to\pm\infty} y - \left(k \pm \frac{b}{a}(x-h)\right) = 0.$$

Teorema 2.2 (Asíntotas de la hipérbola).

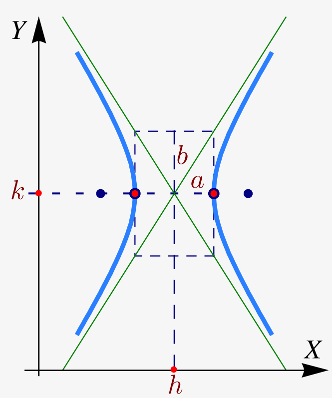
La hipérbola de ecuación $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$$



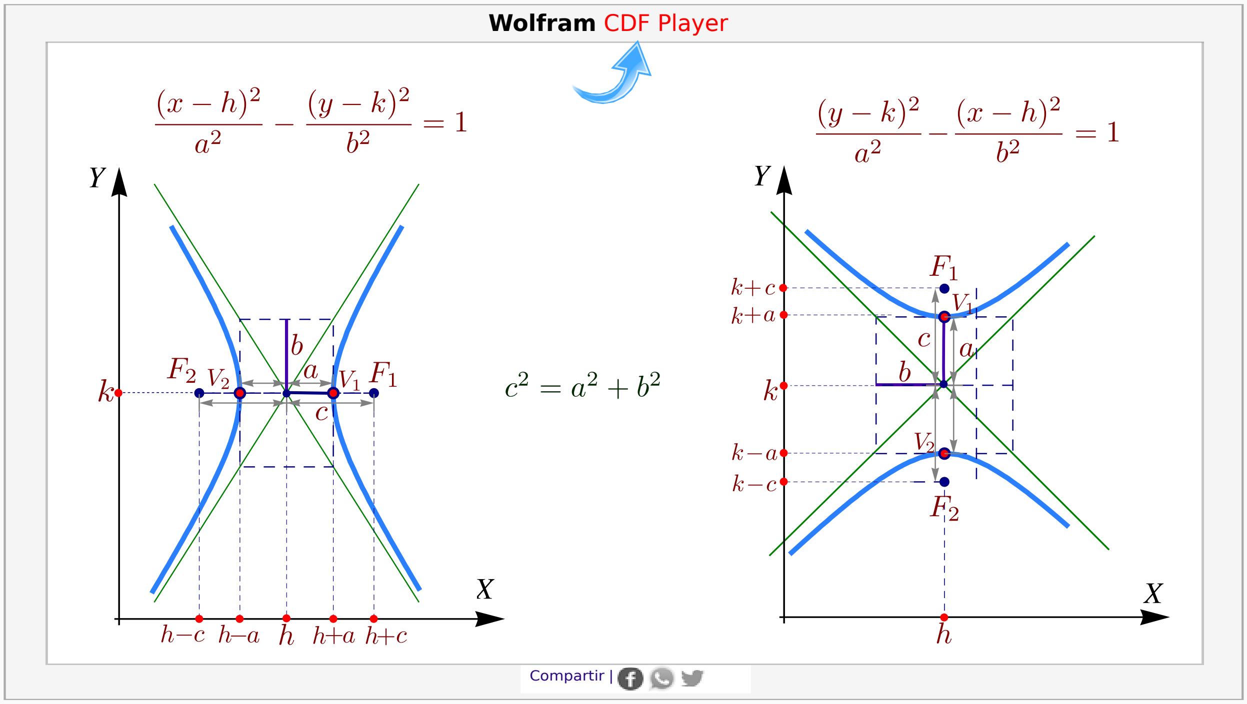
La hipérbola de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$



En resumen,

Hipérbolas.



Ejemplo 2.11

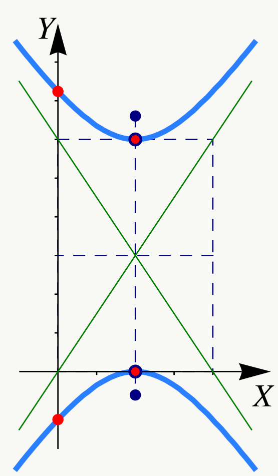
Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación $4y^2-9x^2+36x-24y-36=0$, indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

Solución: Completando cuadrados obtenemos

$$4(y-3)^2-9(x-2)^2=36$$

por lo que la ecuación canónica es

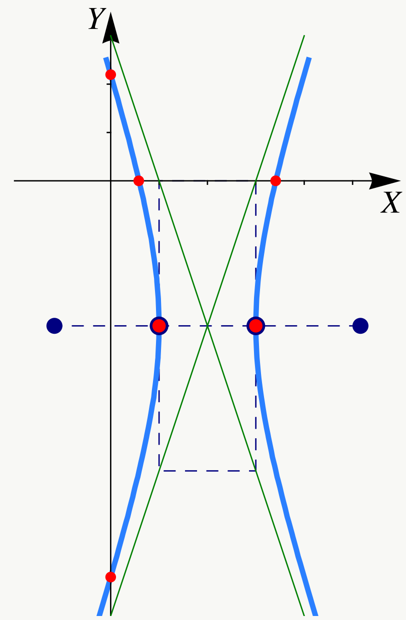
$$\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$$



Se trata de un hipérbola con eje transversal vertical y centro en $(2,3)$. Como $a=3$ y $b=2$ entonces $c=\sqrt{13}$. Los vértices son $v_1=(2,0)$ y $v_2=(2,6)$ y los focos son $F_1=(2,3-\sqrt{13})$ y $F_2=(2,3+\sqrt{13})$. Las intersecciones con los ejes: $y\approx-1.24$, $y\approx 7.24$ y $x=2$.

Ejemplo 2.12

Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$. Realizar la gráfica.



Solución: Completando el cuadrado en ambas variables,

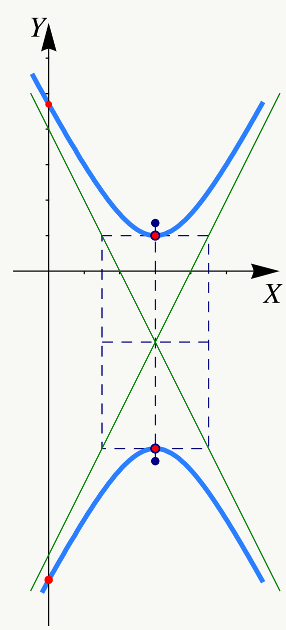
$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - \left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 18 &= 0 \\ 9(x-2)^2 - (y+3)^2 &= 9 \\ \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el centro está en $(2,-3)$, $a = 1$, $b = 3$ y $c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = 10 \implies c = \sqrt{10}$

Los vértices están en $(1,-3)$, $(3,-3)$, los focos en $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$ y las asíntotas son $y = \pm 3(x-2) - 3$. Las intersecciones con los ejes son $y \approx -8.19$, $y \approx 2.196$, $x \approx 0.58$ y $x \approx 3.41$.

Ejemplo 2.13

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$ y asíntotas $y = 2x - 8$ y $y = -2x + 4$. Además calcule los focos y realice la gráfica.



Solución: Como los vértices son vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$, el centro es $(3,\ -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a = 3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas,

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \implies b = \frac{a}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{45}{4} \Longrightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3, -2 - \frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3, -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx -8.70$, $y \approx 4.70$.

Ejercicios

2.4.1 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de las hipérbolas de ecuación

a.) $36x^2 - 64y^2 = 2304$

b.) $x^2 - 2x - y^2 - 6y + 9 = 0$

c.) $-\frac{9}{5} + 2x + x^2 - \frac{6y}{5} - \frac{y^2}{5} = 0$

d.) $\frac{4x^2}{3} - \frac{16x}{3} - \frac{y^2}{5} + 2y - \frac{2}{3} = 0$

2.4.2 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con focos en $(1,4)$ y $(1,-4)$ y con $a = 3$.

2.4.3 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(-4,1)$ y un vértice en $(2,1)$ y semieje conjugado de longitud 4.

2.4.4 Determine la ecuación canónica de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

2.4.5 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(0,2)$ y $(6,2)$ y asíntotas $y = 2/3x \wedge y = 4 - 2/3x$.

2.4.6 Determine la ecuación canónica de la hipérbola que contiene al punto $(4,6)$ y cuyas asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}\,x$.

2.4.7 Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que contiene los puntos $(3,1)$ y $(9,5)$.

2.4.8 Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X, el centro es $(2,0)$, una asíntota tiene ecuación $y = 2x - 4$ y un foco está a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del centro.

2.4.9 Determine la ecuación canónica de de la hipérbola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones,

a.) El centro de la hipérbola coincide con el vértice de la parábola de ecuación $y^2 - 2y + 8x + 17 = 0$.

b.) Uno de sus focos se ubica en $(3,1)$

c.) Uno de sus vértices se ubica en $(1,1)$.

Realice la gráfica e indique sus principales características.

2.4.10 Determine el tipo de cónica representada por la ecuación $\dfrac{x^2}{k}+\dfrac{y^2}{k-16}=1$ en los casos

a.) Si $k>16$

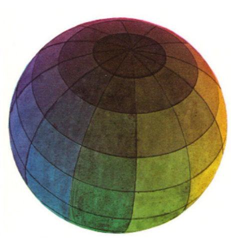
b.) Si $0<k<16$

c.) Si $k<0$

2.4.11 Determine la ecuación canónica y las características de la cónica que contiene a los puntos $P=(x,y)$ para los cuales $|d(P,A)-d(P,B)|=2$ donde $A=(-3,0)$ y $B=(-3,3)$. Realizar la gráfica.

2.4.12 Realice el dibujo de la sección cónica de ecuación $9(x-1)^2-(y+1)^2=9$. Indique además todas sus características.

2.4.13 En la definición de la hipérbola como un lugar geométrico se indica que $2a<d(F_1,F_2)$. ¿Qué pasa si $2a\geqslant d(F_1,F_2)$?



Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

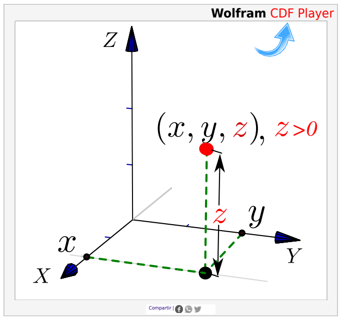
3 — Superficies y Sólidos.

3.1 Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número $x \in \mathbb{R}$ puede ser usado para representar un punto en una línea, un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se puede usar para representar un punto en un plano,

(a) Punto en una línea **(b)** Punto en el plano

De manera análoga, un triple $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede usar para representar un punto en el espacio tridimensional. Tomamos un punto fijo cualquiera O, llamado *origen*, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por O. Los planos se intersecan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por O llamadas X, Y y Z. Para hacer la representación en un plano podemos trazar el eje Y y el eje Z de frente y la parte positiva del eje X se representa en una dirección aproximadamente sur-oeste, para simular profundidad (perpectiva). Dibujamos (x, y) en el plano XY y, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje Z y orientado de acuerdo al signo de z y de longitud $|z|$, como se muestra en la figura.



Ejemplo 3.1

Los puntos en el eje X tienen coordenadas $(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, los puntos en el eje Y tienen coordenadas $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$ y los puntos en el eje Z tienen coordenadas $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. En la figura que sigue se muestran cinco ejemplos de puntos en el espacio.

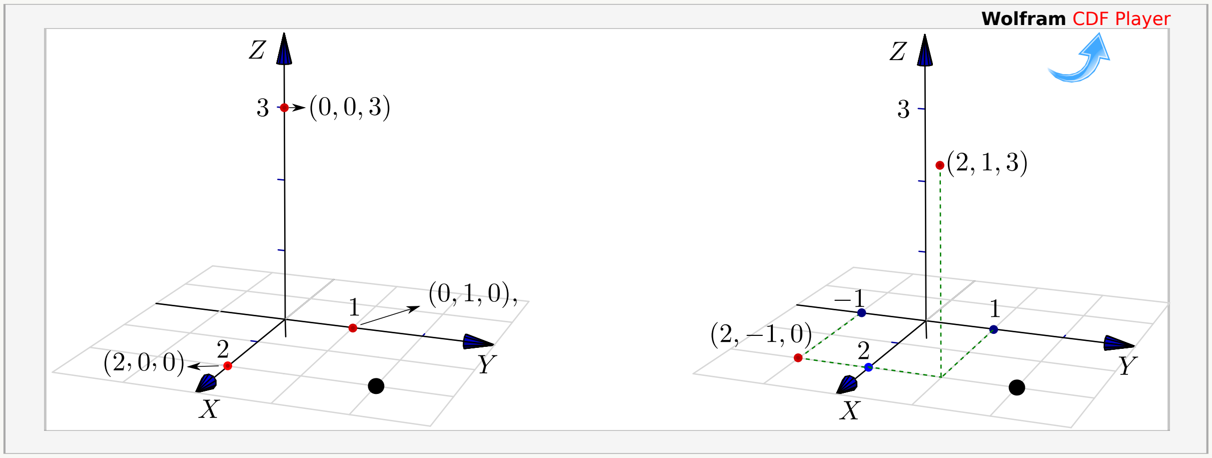


Figura 3.1: Puntos $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,3)$, $(2,1,3)$ y $(2,-1,0)$.

Planos XY, XZ **y** YZ**.** Hay tres planos que contienen un par de ejes coordenados: El plano XY es el plano que contiene el eje X y el eje Y, el plano XZ es el plano que contiene el eje X y el eje Z y el plano YZ es el plano que contiene el eje Y y el eje Z.

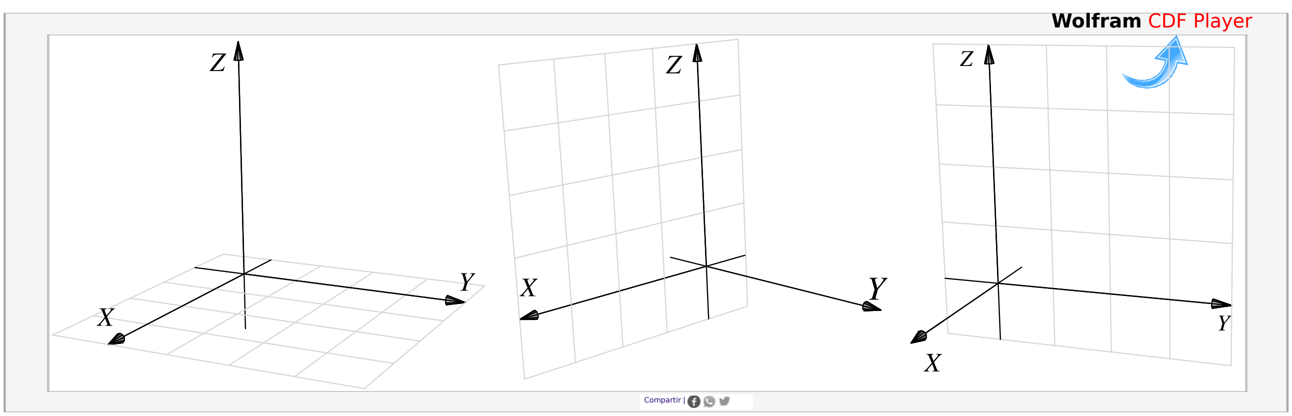


Figura 3.2: Planos XY, XZ y YZ

El primer octante. Los planos XY, XZ y YZ dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. El primer octante corresponde a la parte positiva de los ejes.

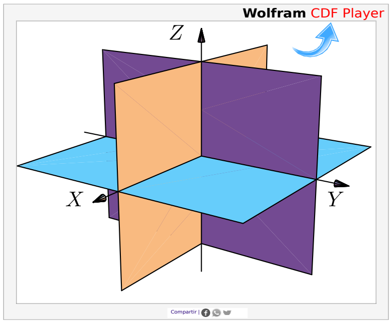


Figura 3.3: Octantes

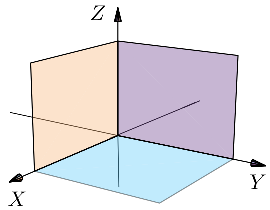


Figura 3.4: Primer octante

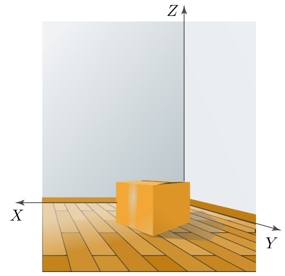
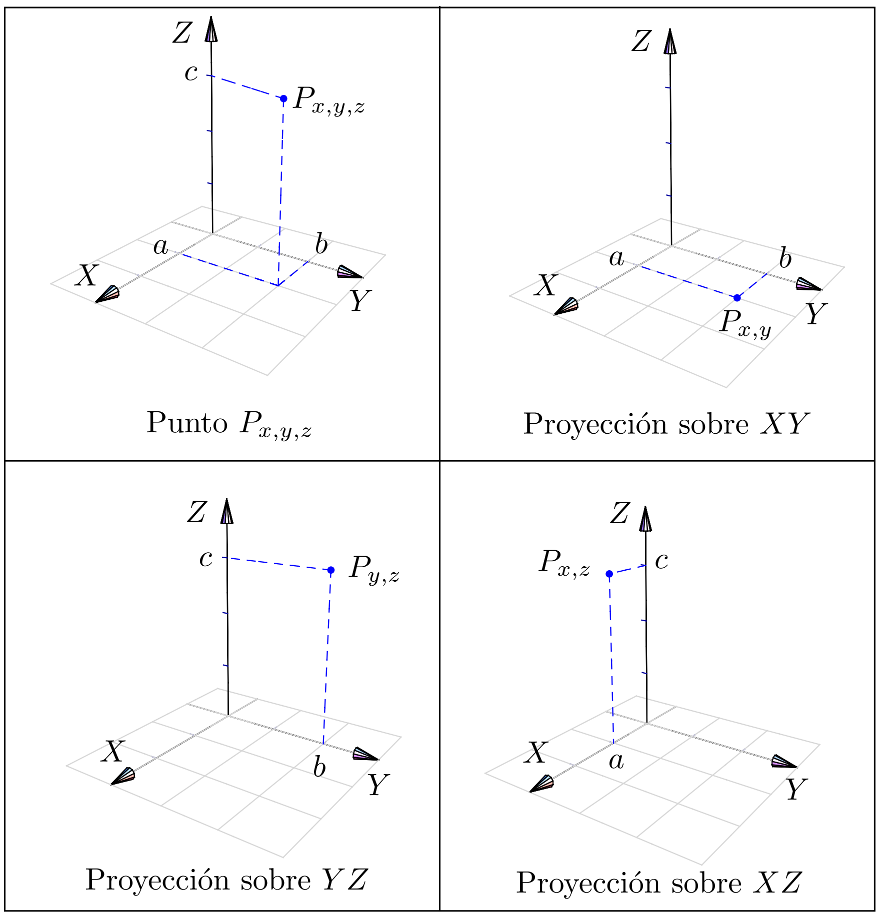


Figura 3.5: Habitación en el primer octante

Vistas isométricas de un punto. Considere el punto $P_{x,y,z} = (a,b,c)$ en el espacio tridimensional, se define *la vista* de este punto en el plano XY como el punto $P_{x,y} = (a,b,0)$. Análogamente se define la vista en el plano YZ como $P_{y,z} = (0,b,c)$ y la vista en el plano XZ como $P_{x,z} = (a,0,c)$. Estas vistas también se denominan "proyecciones perpendiculares" del punto en el plano respectivo.



3.2 Funciones escalares de dos variables

Definición 3.1

Una función escalar de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, asigna a cada par $(x,y) \in D$, un único número real denotado con $f(x,y)$. El gráfico de f es el conjunto $G_f = \{(x,y,z) \;:\; x,y \in D \quad y \quad z = f(x,y)\}$.

La **representación gráfica** de f en un dominio D, corresponde a la representación de todos los puntos (x,y,z) que satisfacen la ecuación $z = f(x,y)$ o $F(x,y,z) = 0$, con $(x,y) \in D$.

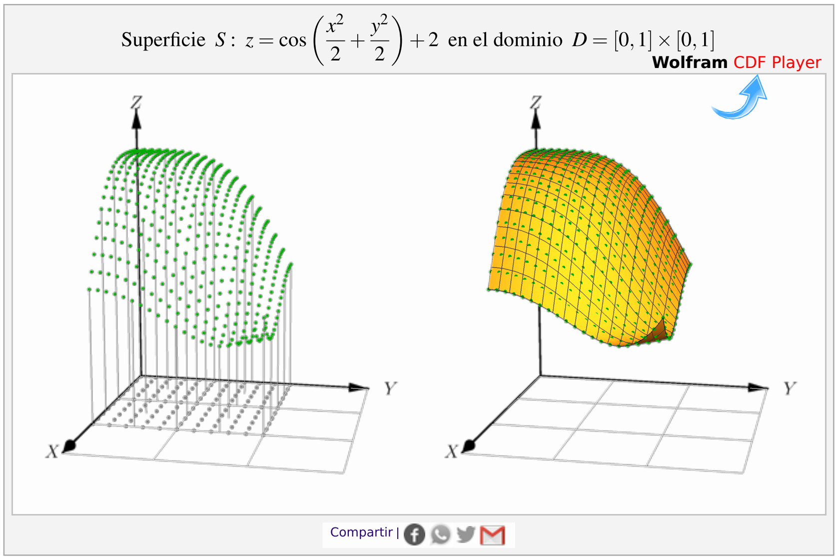


Figura 3.6: Representación gráfica de la superficie $S: \; z = \cos\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+2$ en el dominio $D = [0,1]\times[0,1]$

El criterio (fórmula) que define a f puede ser explícito o implícito. Para hablar de una función de dos variables se escribe $z = f(x,y)$ o $F(x,y,z) = 0$. Es usual asociar la representación gráfica de f con su ecuación y hablar informalmente de "la superficie" S de ecuación $z = f(x,y)$, o brevemente, "la superficie $S: \; z = f(x,y)$"

Ejemplo 3.2

- Forma explícita: Sea $S: \; z = x^2+y^2$ o equivalentemente $S: \; f(x,y) = x^2+y^2$.

  a.) $f(1,2) = 1^2+2^2 = 5 \implies (1,2,5) \in S$

  b.) $f(0,3) = 0^2+3^2 = 9 \implies (0,3,9) \in S$

- Forma implícita: Sea $S: \; x^2+y^2+z^2 = 1$, entonces $S: \; F(x,y,z) = 0$ con $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

  a.) Como $1^2+0^2+0^2-1 = 0 \implies F(1,0,0) = 0 \implies (1,0,0) \in S$

  b.) Si $(1,1,z) \in S \implies 1^2+1^2+z^2-1 = 0 \implies z = \pm 1$

Dominio y representación gráfica del dominio

Como en funciones de una variable, el **dominio máximo** de f es el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $z = f(x,y)$ esté bien definida. Escribimos $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \exists\, z \in \mathbb{R} \text{ con } z = f(x,y)\right\}$. En el caso de funciones definidas de manera implícita, tenemos $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \exists\, z \in \mathbb{R} \text{ con } F(x,y,z) = 0\right\}$.

Ejemplo 3.3

El dominio de la función $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ es $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

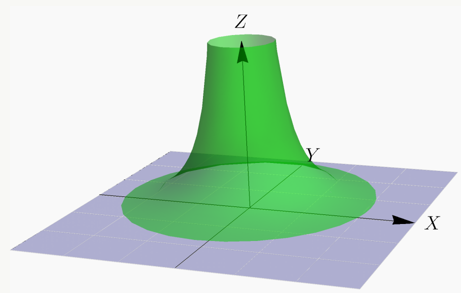


Figura 3.7: Dominio de la función $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

Representación gráfica de dominios definidos por desigualdades. El dominio de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es a veces una región en el plano, definida por desigualdades y por igualdades. Para hacer la representación gráfica del dominio de f, necesitamos dibujar regiones con ecuaciones del tipo $x \lesseqgtr g(y)$ o $y \lesseqgtr h(x)$.

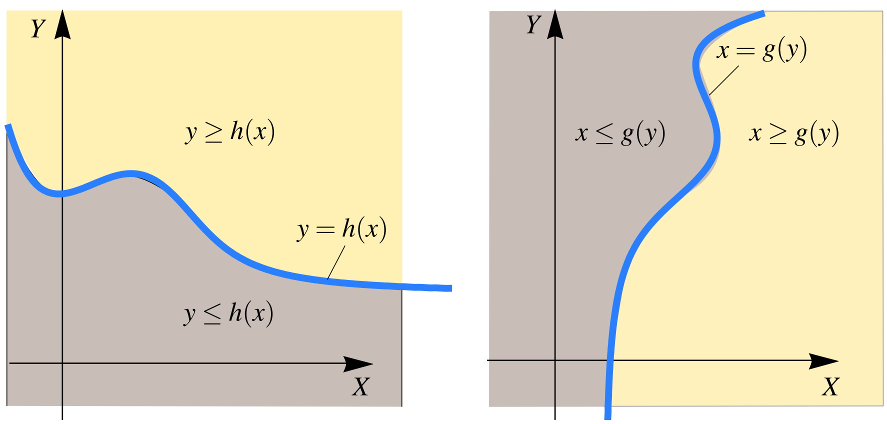


Figura 3.8: Representación de regiones definidas por desigualdades

Ejemplo 3.4

Determine el dominio de la función $z = \dfrac{\sqrt{x-y+1}+\sqrt{y}}{\ln(x^2-y)}$ y realice la representación gráfica de este dominio.

Solución: El dominio de esta función esta conformado por pares ordenados (x,y) que satisfacen las siguientes restricciones:

- Para $\sqrt{x-y+1}$ necesitamos $x-y+1 \geqslant 0$
- Para $\sqrt{y}$ necesitamos $y \geqslant 0$
- Para $\ln(x^2-y)$ necesitamos $x^2-y \neq 1 \ \wedge \ x^2-y > 0$

Dominio: $\quad D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad x - y + 1 \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 - y > 0 \ \wedge\ x^2 - y \neq 1\right\}$

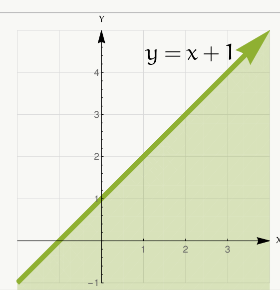
Representación gráfica. Para realizar la representación gráfica del dominio debemos realizar la representación gráfica de cada una de las regiones que se indican y obtener la intersección de estas tres regiones.

- Región 1: $\quad x - y + 1 \geqslant 0 \quad \begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = x + 1 \\ \text{Región 1:} & y \leqslant x + 1 \end{cases}$

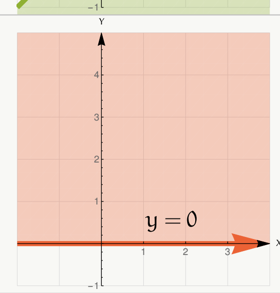
- Región 2: $\quad y \geqslant 0 \quad \begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = 0 \\ \text{Región 2:} & y \geqslant 0 \end{cases}$

- Región 3: $\quad x^2 - y \neq 1 \ \wedge\ x^2 - y > 0 \quad \begin{cases} \text{El borde es la curva} & y = x^2 \\ \text{Región 3:} & y < x^2 \\ \text{Eliminar la curva} & y = x^2 - 1 \end{cases}$

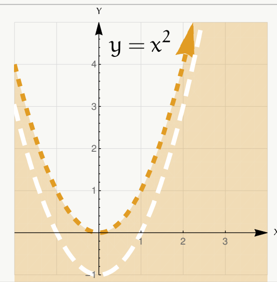
$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = x + 1 \\ \text{Región 1:} & y \leqslant x + 1 \end{cases}$



$\begin{cases} \text{El borde es la recta} & y = 0 \\ \text{Región 2:} & y \geqslant 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} \text{El borde es la curva} & y = x^2 \\ \text{Región 3:} & y < x^2 \\ \text{Eliminar la curva} & y = x^2 - 1 \end{cases}$$



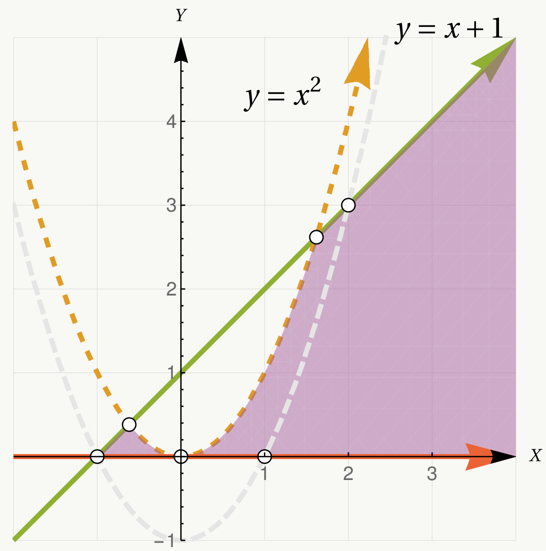


Figura 3.9: Representación gráfica del dominio de la función

Ejemplo 3.5

Determine y realice la representación gráfica del dominio de la función $f(x,y) = \ln(x-y^2) + \sqrt{1 - y^2 - \dfrac{x^2}{2}}$

Solución: Necesitamos que $x - y^2 > 0$ y que $1 - y^2 - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0,$ es decir,

$$D_f \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \text{tal que} \;\; x > y^2 \quad \text{y} \quad y^2 + \frac{x^2}{2} \leqslant 1 \right\}$$

Representación gráfica: El dominio de f es la *intersección* de la región $x > y^2$ (región a la derecha de la parábola $x = y^2$, sin incluirla) y de la región $y^2 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant 1$ (el interior de la elipse $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = 1$ incluyendo la elipse).

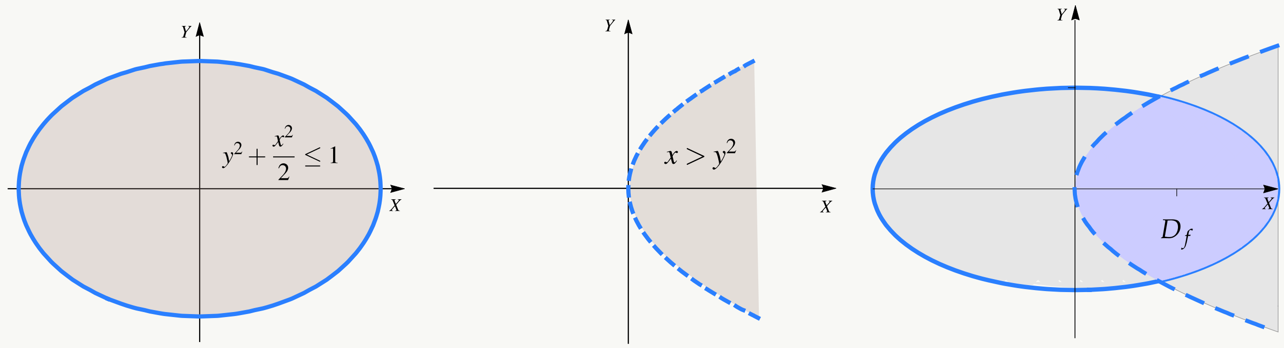


Figura 3.10: $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } x>y^2 \text{ y } y^2+\frac{x^2}{2}\leqslant 1\right\}$

En la figura que sigue aparece la superficie y su dominio.

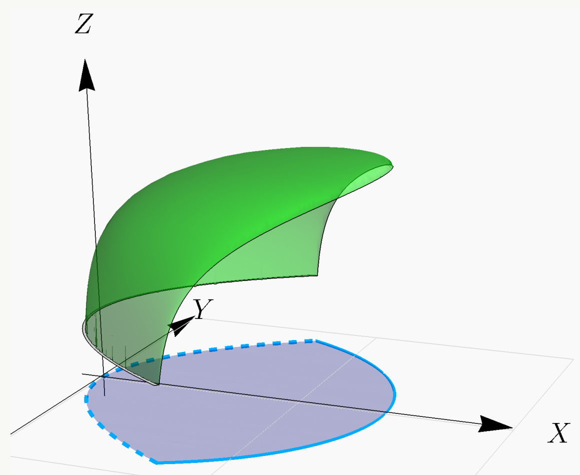


Figura 3.11: Suerficie $f(x,y)=\ln(x-y^2)+\sqrt{1-y^2-\frac{x^2}{2}}$ y su dominio

Ejercicios

3.2.1 Considere la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+y^2-1}}{xy}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

3.2.2 Considere la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(y+1)^2-x-1}}{\log(x-y)}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

3.2.3 Considere la función $f(x,y)=\dfrac{3y-6x+3}{\ln(1-x)+1}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

3.2.4 Considere la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}}{x-y}+\sqrt{x-y}$. Indique el dominio máximo de f y realice la representación gráfica.

3.3 Curvas y Superficies en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Nos interesan las superficies de ecuación $z = f(x, y)$, es decir, las superficies formadas por los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ o también en la forma $F(x, y, z) = 0$.

A veces decimos "superficie de ecuación (explícita) $z = f(x, y)$" o "superficie de ecuación (implícita) $F(x, y, z) = 0$". Un bosquejo de una superficie se puede hacer con un conjunto de curvas; a estas curvas se les llama 'trazas' o 'cortes verticales y horizontales'. En esta sección vamos a ocuparnos con superficies simples: Planos, superficies cilíndricas y superficies cuádricas.

Curvas en el espacio.

Hay curvas en el plano XY que se pueden describir por medio de una ecuación cartesiana $F(x, y) = c$. Por ejemplo, una circunferencia de radio a tiene ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$. Desde este punto de vista, una curva C definida por esta ecuación es un conjunto de puntos, a saber,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = c\}$$

Las curvas en $\mathbb{R}^3$ podrían ser definidas por un par de ecuaciones (como intersección de dos superficies),

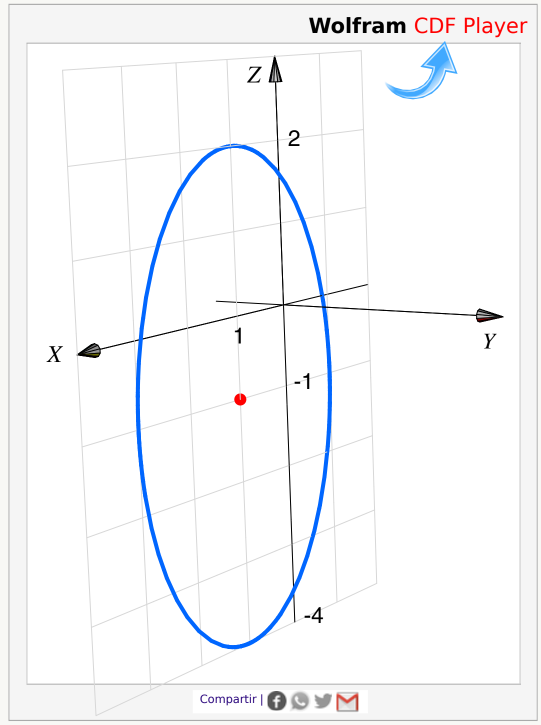
$$F_1(x, y, z) = c_1 \; ; \quad F_2(x, y, z) = c_2,$$

Curvas en los planos XY, XZ y YZ. Es usual asumir que una curva de ecuación $F(x, y) = 0$, está en el plano XY. En el espacio tridimensional indicamos la ecuación de la curva y el plano dónde esta curva "vive". En general, "$F(x, y) = 0;\ z = 0$" es la ecuación de una curva en el plano XY. De manera análoga, "$F(x, z) = 0;\ y = 0$" corresponde a una curva en el plano XZ y "$F(y, z) = 0;\ x = 0$" corresponde a una curva en el plano YZ.

Ejemplo 3.6

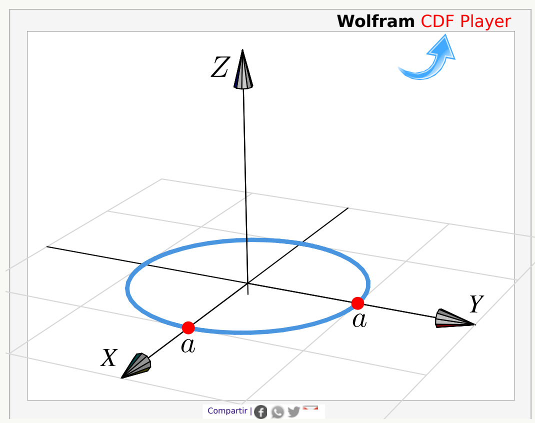
a.) Un elipse de ecuación $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(z+1)^2}{9}=1$ (en el plano XZ), en el espacio tridimensional tendría ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{9}=1; \quad y=0.$$



b.) Una circunferencia en el plano XY, de radio a y centrada en el origen, tiene ecuación cartesiana $x^2+y^2=a^2$. En el espacio tridimensional tendría ecuación

$$x^2+y^2=a^2; \;\; z=0$$



Ejemplo 3.7

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva $C_1 \,:\, x+y=3;\; z=0$

Solución:

La curva $C \,:\, x+y=3;\;\; z=0$, corresponde a una recta en el plano XY. Interseca al eje X en $x=3$ y al eje Y en $y=3$.

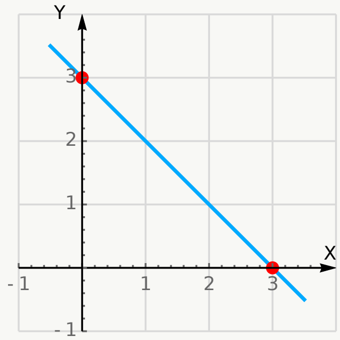


Figura 3.12: Recta $x + y = 3$ en el plano XY

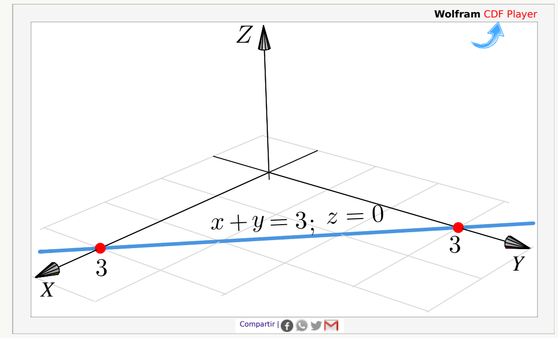
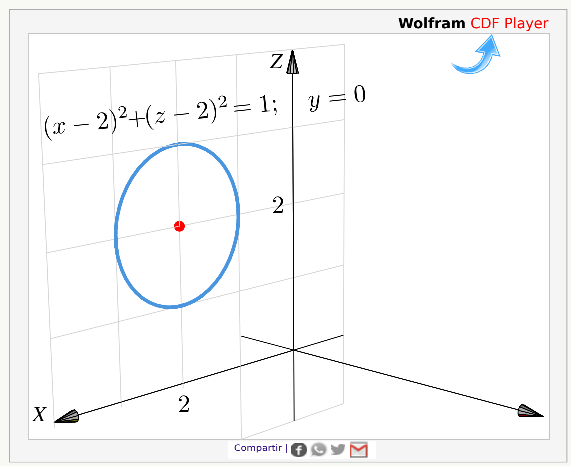


Figura 3.13: Recta $x + y = 3$ en el espacio tridimensional

Ejemplo 3.8

Realizar la representación gráfica, de la curva $C\ :\ (x-2)^2+(z-2)^2=1;\ y=0.$

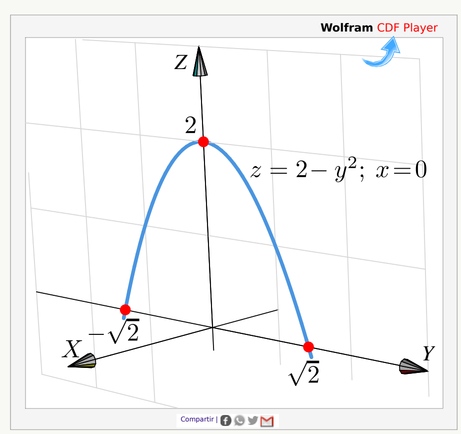
Solución: La curva $C\ :\ (x-2)^2+(z-2)^2=1;\ \ y=0$ corresponde a una circunferencia de radio 1 en el plano XZ. Su centro es $(2,0,2)$.



Ejemplo 3.9

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva $C_3\ :\ z=2-y^2;\ \ x=0.$

Solución: La curva C_3 es la parábola $:\ y^2=-(z-2)$ (cóncava hacia abajo) en el plano YZ. El vértice es $(0,0,2)$ e interseca al eje X en $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$.



Ejercicios

3.3.1 Realizar la representación gráfica, en el espacio, de las curvas

a.) $z = 4 - x^2;\;\; y = 0.$

b.) $(z-2)^2 + (y-2)^2 = 4;\;\; x = 0.$

c.) $\dfrac{(y-1)^2}{4} + x^2 = 1;\;\; z = 0.$

d.) $z + 2y = 4;\;\; x = 0.$

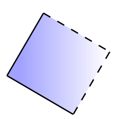
e.) $z^2 - y^2 = 4;\;\; x = 0.$

f.) $z^2 - x^2 = 4;\;\; y = 0.$

g.) $y^2 - x^2 = 4;\;\; z = 0.$

3.3.2 ¿Es $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 0$ la ecuación de una curva?

Planos



Posiblemente los planos son las superficies más sencillas de dibujar. La ecuación cartesiana de un plano es $ax + by + cz = d$ con con $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ (se prohíbe el caso $a = b = c = 0$). Para realizar la representación gráfica de un plano Π nos basamos en el hecho de que si P, Q son dos puntos en este plano, entonces la recta (o cualquier segmento de ella) que contiene a estos puntos, está en el plano. En la práctica necesitamos al menos dos segmentos de recta para dibujar una parte del plano, mediante un triángulo o un paralelogramo.

Planos de ecuación cartesiana con dos variables ausentes.

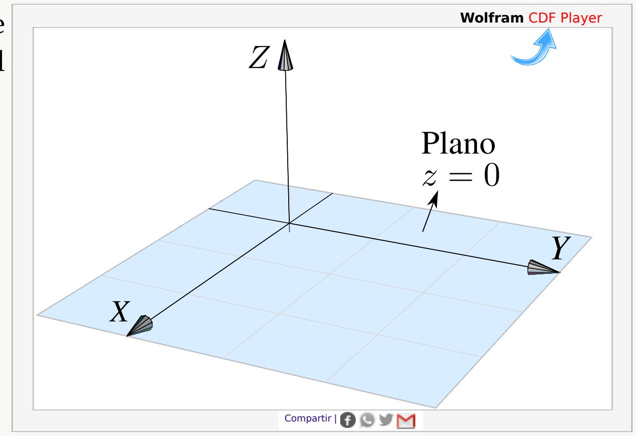
La ausencia de variables en la ecuación solo significa que estas variables tienen coeficiente nulo y, por tanto, estas variables pueden tomar valores arbitrarios.

Por ejemplo el plano $\Pi:\; 0\cdot x + 0\cdot y + z = 2$ es el plano $z = 2$, es decir, $\Pi = \{(x,y,2)\; : \; x,y \in \mathbb{R}\}$. De aquí en adelante,

- El plano $x = a$ es el plano $\Pi = \{(a,y,z)\; : \; y,z \in \mathbb{R}\}$.
- El plano $y = b$ es el plano $\Pi = \{(x,b,z)\; : \; x,z \in \mathbb{R}\}$.
- El plano $z = c$ es el plano $\Pi = \{(x,y,c)\; : \; x,y \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 3.10

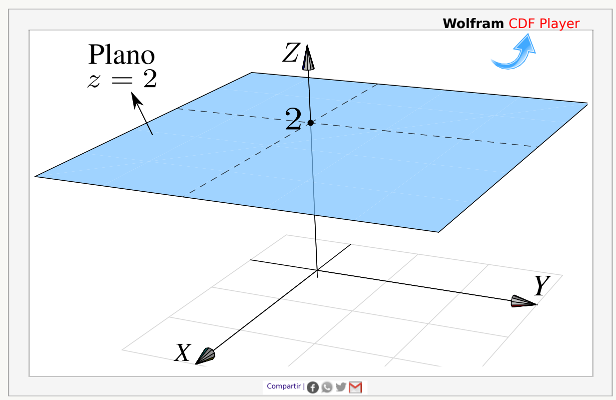
El plano $\Pi: \ z=0$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,y,0)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, es decir, el plano $z=0$ es el plano XY.



Ejemplo 3.11

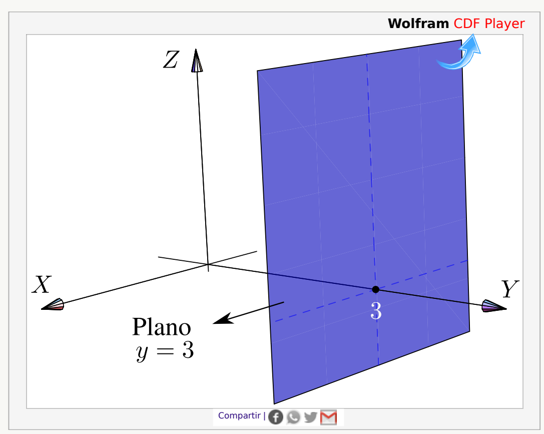
a.) Dibujar el plano $z=2$.

Solución: El plano $z=2$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,y,2)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, es decir, es un plano paralelo al plano XY que pasa por la coordenada $z=2$.



b.) Dibujar el plano $y=3$.

Solución: El plano $\Pi: \ y=3$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x,3,z)$ con $x,z \in \mathbb{R}$, es decir, es un plano paralelo al plano YZ que pasa por la coordenada $y=3$.



Planos de ecuación cartesiana con una variable ausente.

Cuando hay una variable ausente (*i.e.*, una variable con coeficiente nulo), el plano está 'generado' por la recta determinada por las variables presentes.

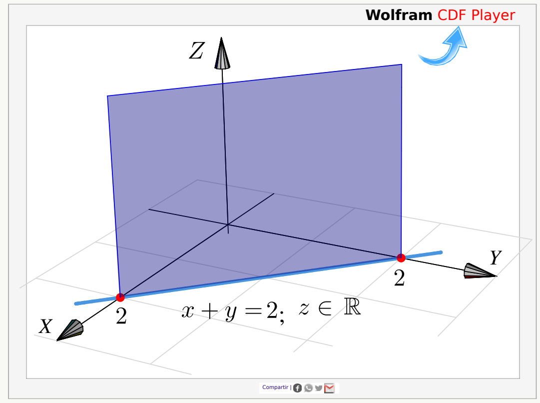
Ejemplo 3.12

a.) Dibujar el plano $x+y=2$.

Solución: El plano $\Pi : x+y=2$ es el conjunto de puntos

$$\{(x,y,z) \ : \ x+y=2, \ z\in\mathbb{R}\}$$

Las coordenadas x e y están sobre la recta $x+y=2$, $z=0$ y la coordenada z es arbitraria.

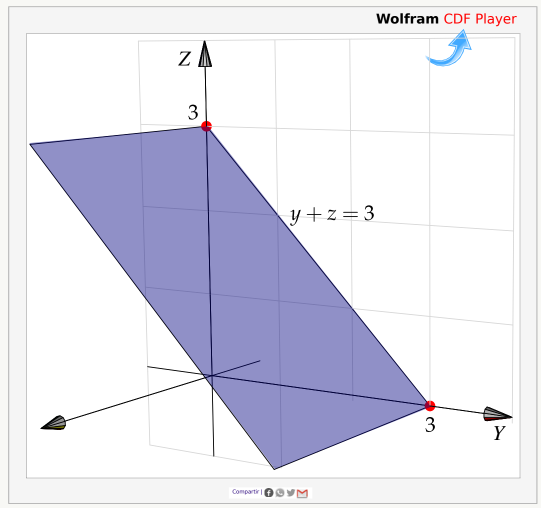


b.) Dibujar el plano $y+z=3$.

Solución: El plano $\Pi : y+z=3$ es el conjunto de puntos

$$\{(x,y,z) \ : \ y+z=3, \ x\in\mathbb{R}\}$$

Las coordenadas y y z están sobre la recta $y+z=3$, $x=0$ y la coordenada x es arbitraria.



Planos de ecuación cartesiana sin variables ausentes. Podemos distinguir entre los que pasan por el origen y los que no.

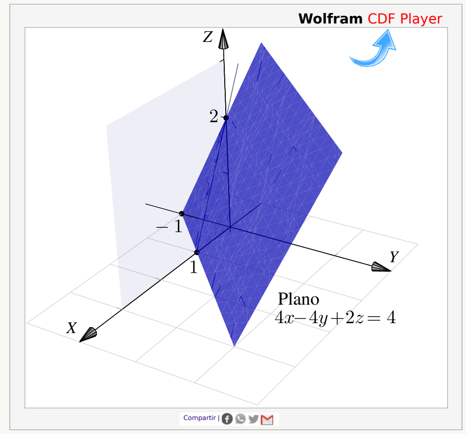
Una forma sencilla para dibujar planos que *no* contienen el origen consiste en determinar la intersección del plano con cada eje coordenado y trazar los segmentos de recta que unen estos puntos (estos segmentos están contenidos en el plano). En caso necesario, se pueden extender dos de estos segmentos y formar un paralelogramo.

Los planos que pasan por el origen se pueden dibujar determinando un par de rectas en el plano (al anular una variable en la ecuación cartesiana del plano se obtiene la ecuación de una recta contenida en el plano).

Ejemplo 3.13

Dibujar el plano $4x - 4y + 2z = 4$

Solución: El plano interseca a los ejes coordenados en $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$. Podemos usar el segmento que va de $x = 1$ a $y = -1$ y el segmento que va de $y = -1$ a $z = 2$. Con estos dos segmentos podemos dibujar un paralelogramo.



Planos que contienen el origen. Para dibujar planos que contienen el origen se anula una de las variables y se dibuja una primera recta resultante en el plano correspondiente. Luego se anula otra variable y se dibuja una segunda recta en el plano correspondiente. Tomamos dos segmentos, uno en cada recta y formamos un paralelogramo.

Ejemplo 3.14

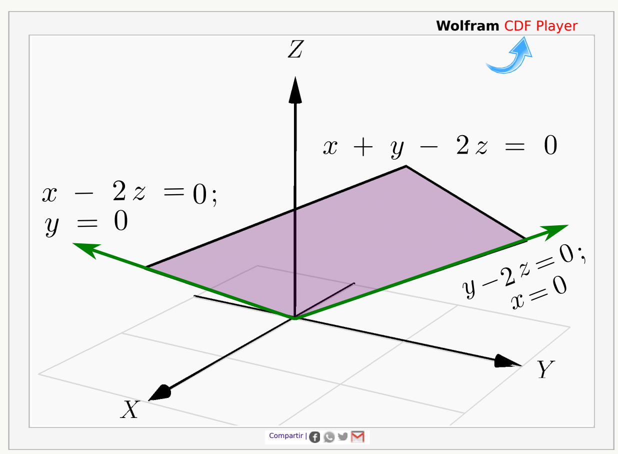
Dibujar el plano $x + y - 2z = 0$.

Solución: El plano $x + y - 2z = 0$ pasa por el origen.

- Si $y = 0$, la recta $x + 0 - 2z = 0;\ y = 0$ está en el plano.

- Si $x = 0$, la recta $0 + y - 2z = 0;\ x = 0$ está en el plano.

Podemos usar un segmento de la recta $x - 2z = 0;\ y = 0$ y un segmento de la recta $y - 2z = 0;\ x = 0$, para dibujar un paralelogramo que represente al plano.



Ejercicios

3.3.3 Dibujar los planos que se indican a continuación:

a.) $2z+y=2$

b.) $x=2$

c.) $x-y-z=0$

d.) $x+y-z=2$

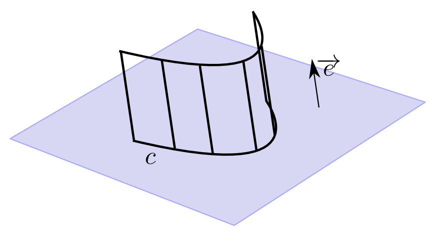
e.) $2x+2y+2z=2$

3.3.4 Dibujar el plano $4x-4y+2z=4$ en el primer octante.

Superficies cilíndricas o "cilindros".

El término "cilindro" tiene varios significados relacionados y puede ser un concepto algo confuso. La palabra "cilindro" probablemente evoque la imagen de un cilindro circular recto, pero en cálculo en varias variables *un cilindro* (cilindro generalizado) se refiere a una superficie generada por una curva: Un cilindro es una superficie formada por una familia de rectas paralelas, llamadas *generatrices*, que pasan por los puntos respectivos de una cierta curva *directriz.* Si la directriz vive en un plano y si la generatriz es perpendicular a este plano, el cilindro se le dice "cilindro recto". Un cilindro es un caso particular de una superficie *reglada.*

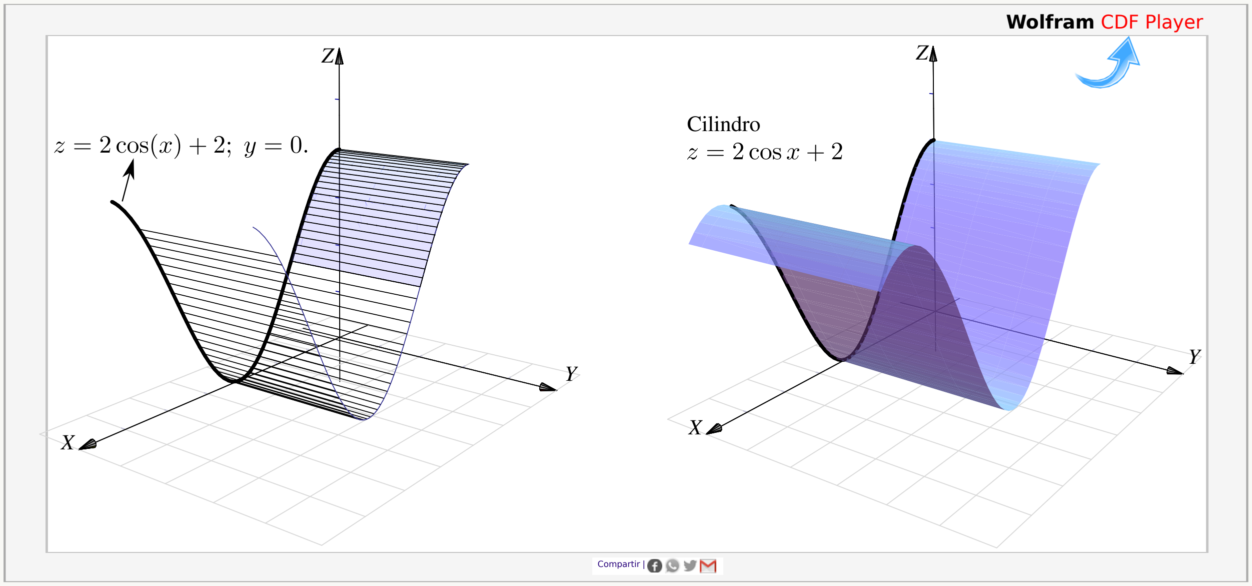
En este libro solo se consideran cilindros (generalizados) de ecuación $r(t,s)=c(t)+s\cdot\overrightarrow{e};\ t\in I,\ s\in\mathbb{R}$ donde $c(t)$ es la parametrización de una curva que está en alguno de los plano XY, YZ o XZ y $\overrightarrow{e}$ es un vector perpendicular al plano correspondiente.



Es decir, en nuestro caso, las superficies con ecuación en *dos* de las tres variables x,y y z van a ser cilindros rectos, con recta generatriz paralela al eje asociado con la variable ausente (en este libro, la recta generatriz es el eje asociado a al variable ausente!). Por ejemplo, el cilindro de ecuación $z=1-x^2$ tiene generatriz paralela al eje Y mientras que el cilindro $y^2+(z-1)^2=1$ tiene generatriz paralela al eje X.

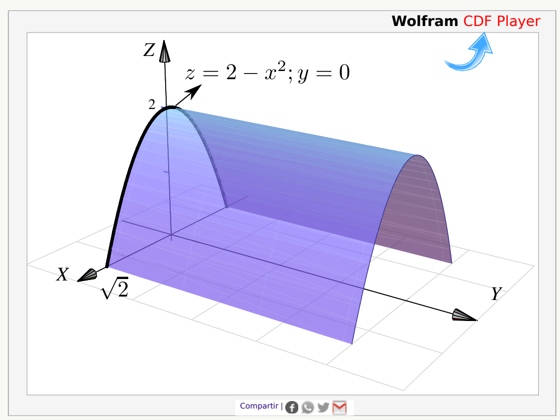
Ejemplo 3.15

Para dibujar el cilindro de ecuación $z=2\cos(x)+2$ primero dibujamos la curva de ecuación $z=2\cos(x)+2;\ \ y=0.$ Luego, según nuestro convenio, la superficie cilíndrica $z=2\cos(x)+2$ tiene recta generatriz paralela al eje Y.



Ejemplo 3.16

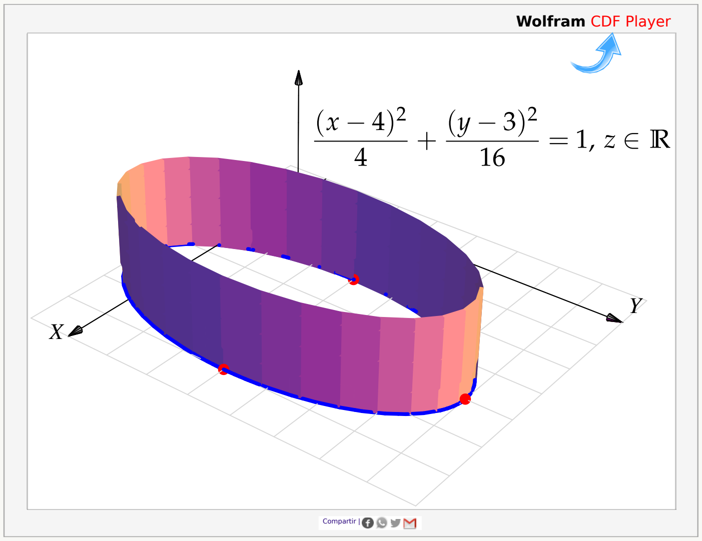
El cilindro de ecuación $z = 2 - x^2$ es una superficie cilíndrica generada por la parábola $z = 2 - x^2, y = 0$; con recta generatriz paralela al eje Y.



Ejemplo 3.17

Dibujar el cilindro de ecuación $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$.

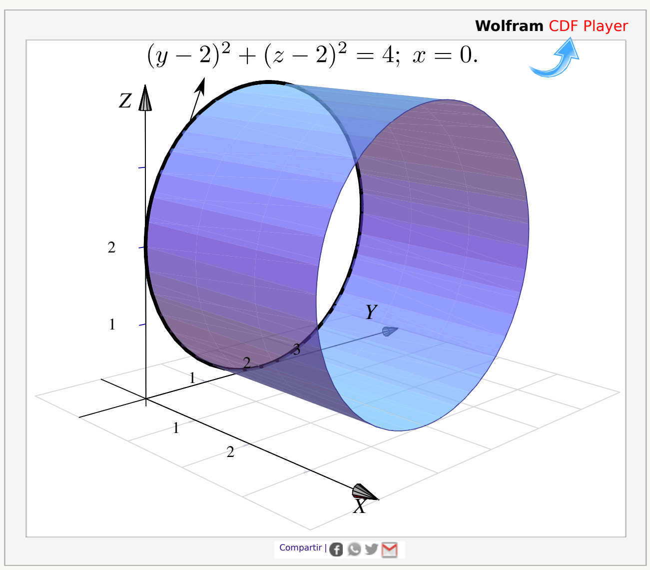
Solución: La superficie cilíndrica generada por la elipse de ecuación $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ tiene su recta generatriz paralela al eje Z.



Ejemplo 3.18

Dibujar el cilindro de ecuación $(y-2)^2+(z-2)^2=4$.

Solución: La superficie cilíndrica generada por la circunferencia $(y-2)^2+(z-2)^2=4$ tiene su recta generatriz paralela al eje X.



3.4 Superficies cuadráticas.

Rotar una cónica (no degenerada) alrededor de su eje focal, por ejemplo, produce un caso especial de un conjunto más general de superficie llamadas *superficies de segundo orden*. Estas superficies satisfacen una ecuación de segundo grado en x, y y z y también son llamadas *superficies cuadráticas* o *cuádricas* [16].

La curva de intersección entre un plano y una superficie cuadrática es una cónica. Hay 17 tipos estándar de cuádricas, algunas de ellas son: paraboloide, esfera, esferoide, elipsoide, cono, hiperboloide, cilindro, cono elíptico, cilindro elíptico, hiperboloide elíptico, paraboloide elíptico, etc.

Aquí solo consideramos cuádricas en posición estándar (sin rotación). Estas superficies tienen ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Curvas de nivel y trazas.

Si S es una superficie en el espacio de ecuación $F(x,y,z) = 0$, todos los pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $F(x,y,c) = 0$ definen una curva en el plano XY (siempre y cuando este conjunto no sea vacío). A esta curva se le llama una *curva de nivel* de la superficie. Geométricamente corresponden a la proyección sobre le plano XY, de el corte del plano $z = c$ con la superficie S.

También nos interesa dibujar la curva como una curva en el espacio. Por abuso del lenguaje se dice "la curva de nivel $z = c$" para indicar la curva de nivel "$F(x,y,c) = 0$; $z = 0$". A las curvas "$F(x,y,c) = 0$; $z = c$" (si existen) les llamamos 'trazas' o 'cortes' de la superficie. También son trazas las curvas "$F(c,y,z) = 0$; $x = c$" y "$F(x,c,z) = 0$; $y = c$" (si existen)

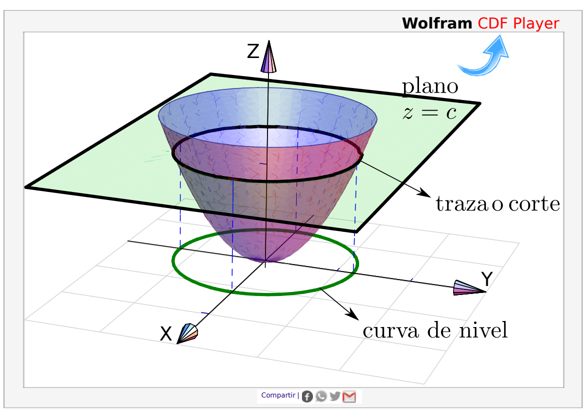


Figura 3.14: Traza o corte $z = c$ y curva de nivel.

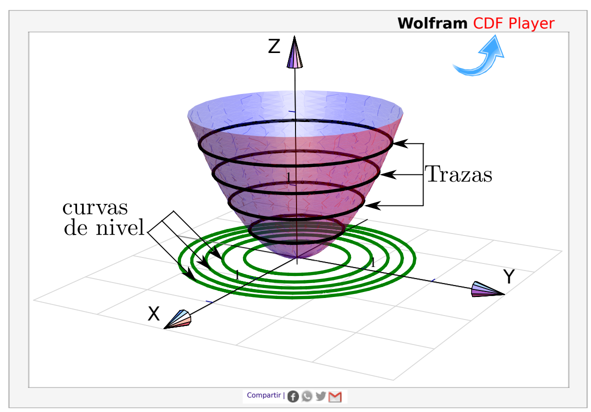


Figura 3.15: Algunas curvas de nivel y algunas trazas.

Como se deduce fácilmente, si nos movemos sobre una curva de nivel $z = c$, la función se mantiene constante.

Ejemplo 3.19

A continuación se muestra tres superficies con algunas de sus curvas de nivel y algunas de sus trazas:

a.) $S_1: \ z = \operatorname{sen} x \cos y + 3$,
b.) $S_2: \ z = x^2 + y^2$
c.) $S_3: \ z = -3600.x^2 + 0.02974x^4 - 5391.90y^2 + 0.275x^2y^2 + 0.125y^4$

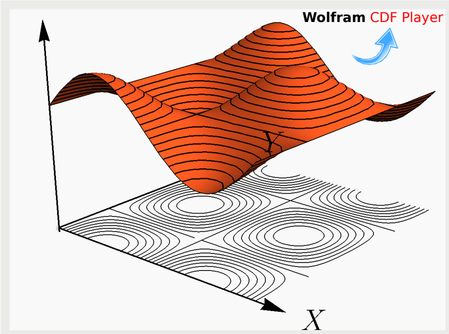


Figura 3.16: Superficie S_1

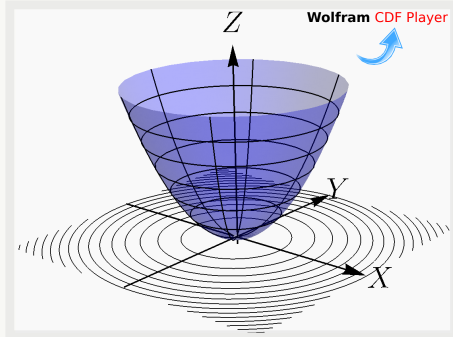


Figura 3.17: Superficie S_2

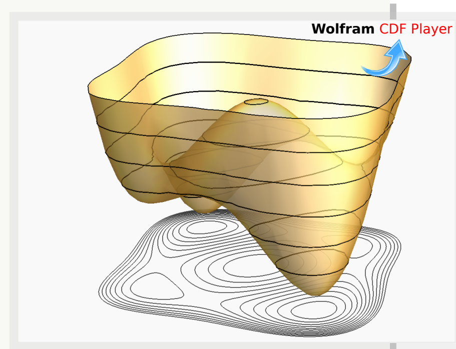
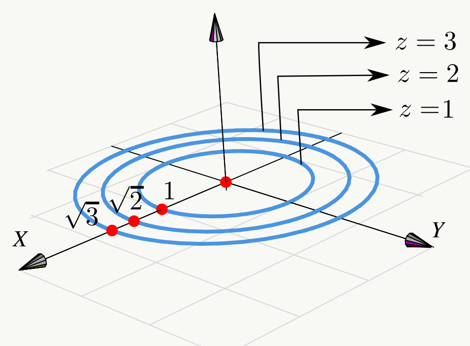


Figura 3.18: Superficie S_3

Ejemplo 3.20

Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Como z es una suma de cuadrados, z debe ser $\geqslant 0$. Vamos a dibujar las curvas de nivel correspondientes a $z = 0, 1, 2$ y $z = 3$.

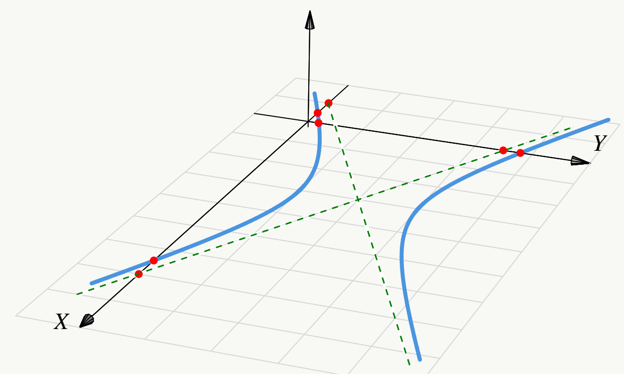
- La curva de nivel $z = 0$ es el punto $(0, 0, 0)$
- La curva de nivel $z = 1$: circunferencia $1 = x^2 + y^2$; $z = 0$.
- La curva de nivel $z = 2$: circunferencia $2 = x^2 + y^2$; $z = 0$.
- La curva de nivel $z = 3$: circunferencia $3 = x^2 + y^2$; $z = 0$.



Ejemplo 3.21

Consideremos la superficie de ecuación $z = (y-2)^2 - \dfrac{(x-3)^2}{4}$. Vamos a dibujar las curvas de nivel correspondientes a $z = 0$ y $z = 1$.

- Si $z = 0$ tenemos $(y-2)^2 = \dfrac{(x-3)^2}{4}$, es decir, un par de rectas: $y = 2 \pm \dfrac{(x-3)}{2}$; $z = 0$.
- La curva de nivel $z = 1$ es la hipérbola $1 = (y-2)^2 - \dfrac{(x-3)^2}{4}$; $z = 0$.

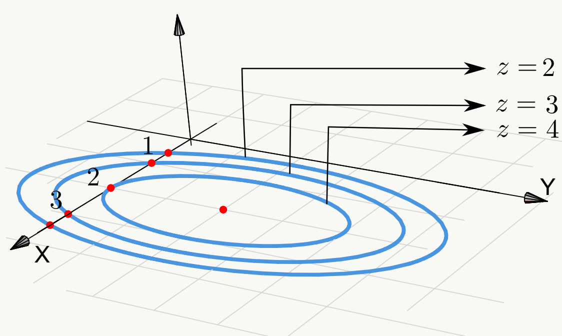


Ejemplo 3.22

Consideremos la superficie de ecuación $z-1=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$. Dibujar las curvas de nivel correspondientes a $z=1,2,3$ y $z=4$.

Solución:

- La curva de nivel $z=1$ es el punto $(2,2,0)$.



- La curva de nivel $z=2$ es la elipse $1=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$.
- La curva de nivel $z=3$ es la elipse $2=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$, es decir,
  $1=\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{8}$.
- La curva de nivel $z=4$ es la elipse $3=(x-2)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}$, es decir, $1=\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{12}$.

Dibujar Trazas (o cortes). Con el fin de realizar el dibujo de una superficie S de ecuación explícita $z=f(x,y)$ o de ecuación implícita $F(x,y,z)=0$, procedemos a realizar cortes a esta superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas son llamadas *trazas o cortes* y producen un dibujo 'de alambre' de la superficie a dibujar.

Para describir las trazas por ecuaciones se procede de la siguiente manera:

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $x=c$, entonces su ecuación es "$z=f(c,y)$; $x=c$" o "$F(c,y,z)=0$; $x=c$," y se representa en el plano $x=c$.

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $y=c$, entonces su ecuación es "$z=f(x,c)$; $y=c$" o "$F(x,c,z)=0$; $y=c$," y se representa en el plano $y=c$.

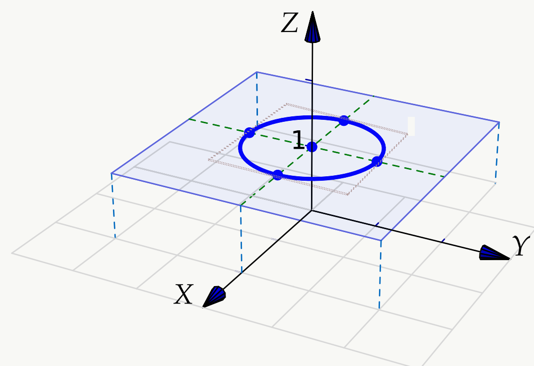
- Si la traza resulta de la intersección de la superficie S con el plano $z = c$, entonces su ecuación es "$c = f(x,y)$, $z = c$" o "$F(x,y,c) = 0$, $z = c$" y se representa en el plano $z = c$.

Ejemplo 3.23

Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Dibujar la traza $z = 1$.

Solución: La traza $z = 1$ es la circunferencia

$$1 = x^2 + y^2; \quad \text{con} \quad z = 1.$$



La curva se representa en el plano $z = 1$. Como la circunferencia vive en el plano $z = 1$, para dibujarla ubicamos su centro $(0,0,1)$ y trazamos un par de rectas paralelas a los ejes X e Y que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar como "ejes" para dibujar este tipo de elipse.

La "caja" punteada que pasa por los vérticies de la curva, nos ayuda a hacer el trazo de la curva "en perspectiva"

Estrategia general: Trasladar los ejes. Para dibujar trazas, una estrategia consiste en trasladar los ejes al plano de dibujo: $x = c$; $y = c$ o $z = c$.

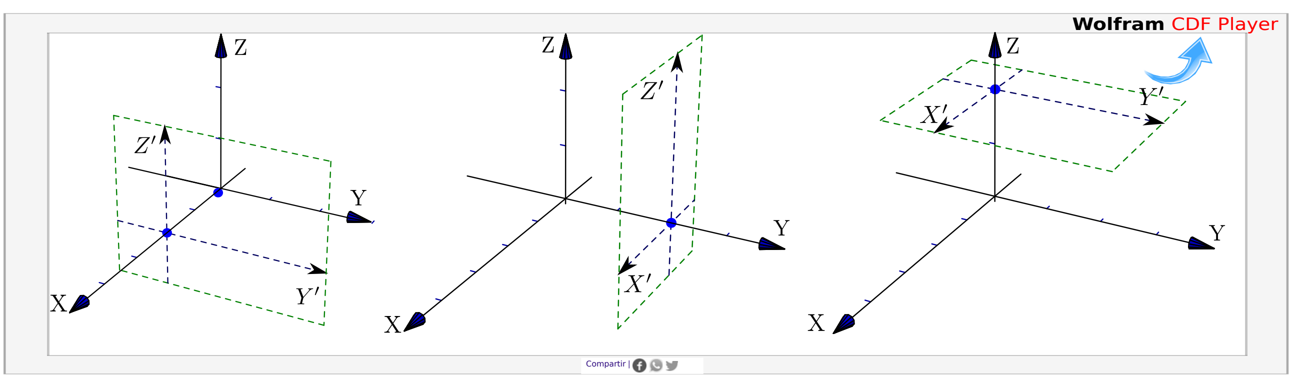


Figura 3.19: Traslación de ejes

Ejemplo 3.24

Consideremos la superficie S de ecuación $4(y-1)^2 + 4(z-1)^2 = x^2$. Dibujar la traza $x = 2$.

Solución: La traza $x = 2$ es la curva $(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$; $x = 2$.

Para dibujar la traza primero trasladamos los ejes al plano $x = 2$, luego dibujamos la curva en el plano YZ. Finalmente dibujamos la curva "$(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1;\ x = 2$" usando los ejes $Y'Z'$

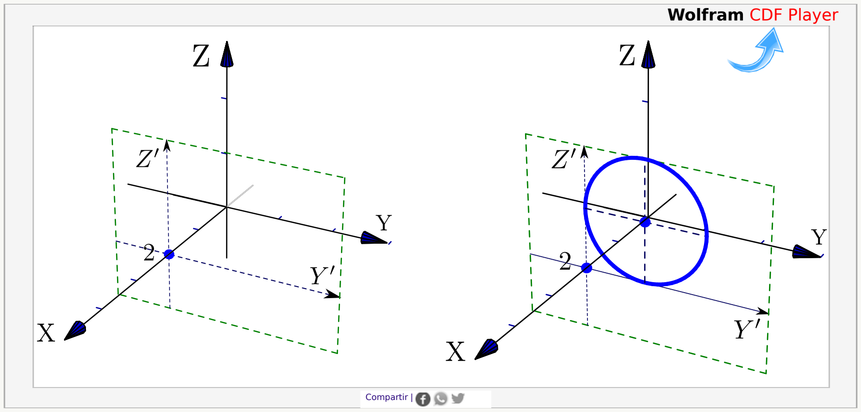


Figura 3.20: Traslación de ejes y dibujo de la traza $x = 2$

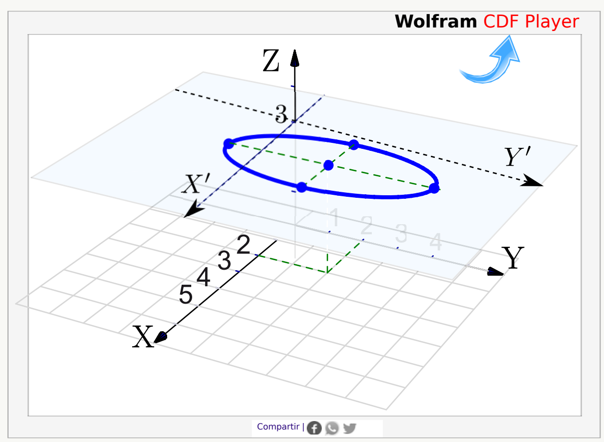
Ejemplo 3.25

Consideremos la superficie de ecuación $z - 1 = (x-2)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4}$. Dibujar la traza $z = 3$.

Solución: La traza $z = 3$ es la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1 \quad \text{en el plano} \quad z = 3.$$

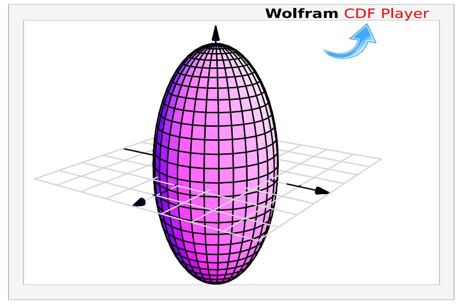
Como la elipse vive en el plano $z = 3$, para dibujarla ubicamos su centro $(2,2,3)$ y trazamos un par de semiejes X' y Y' paralelos a los ejes X e Y que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar para dibujar la elipse de la manera usual.



Cuádricas

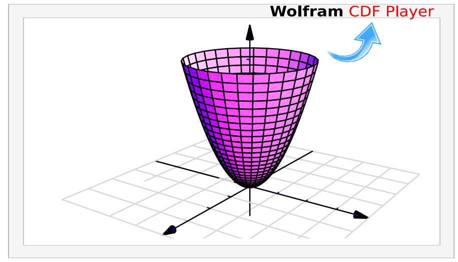
Nos interesan las cuádricas de ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$. Excepto casos degenerados, completando cuadrados podemos obtener la ecuación canónica de cada superficie cuadrática. A continuación se muestra algunas cuádricas en posición estándar y centradas en el origen.

Elipsoide: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



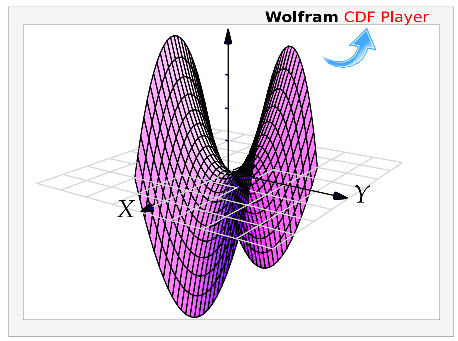
Es simétrica con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ y $(0,0,\pm c)$. La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse.

Paraboloide elíptico: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$



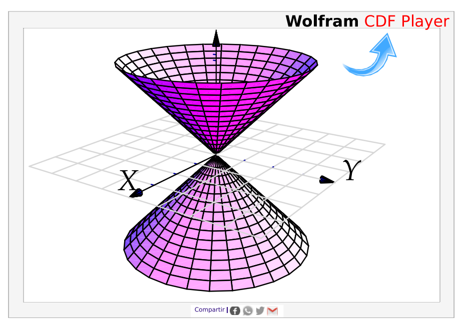
Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k}{c}$. Sus trazas sobre planos verticales, ya sean $x=k$ o $y=k$, son parábolas.

Paraboloide hiperbólico: Tiene ecuación $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$



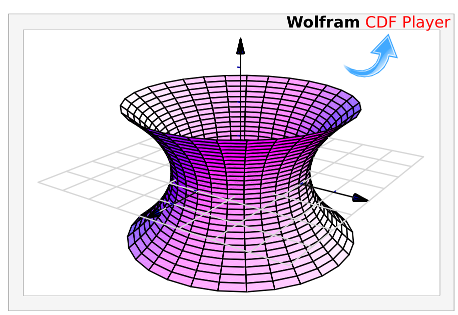
Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son hipérbolas o dos rectas ($z=0$). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano XZ son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano YZ son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar.

Cono elíptico: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$



Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas.

Hiperboloide de una hoja: Tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



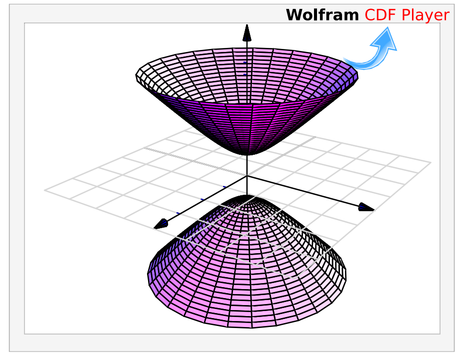
Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas

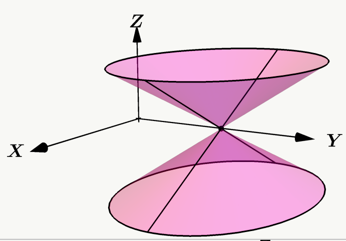
Hiperboloide de dos hojas: Tiene ecuación $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{c^2} = 1$

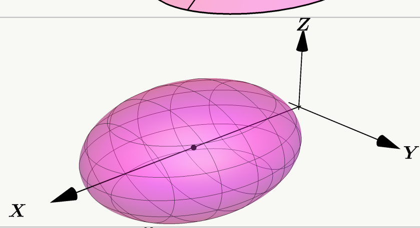
Es una superficie con dos *hojas* (o mantos) separadas. Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas

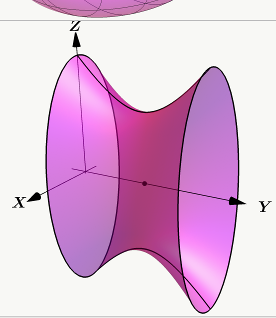


Ejemplo 3.26

Asocie cada una de las cinco figuras que siguen con la respectiva ecuación de la superficie que representa. Para cada figura solo hay una posible ecuación en el lado derecho.

1. 

2. 

3. 

A. ( ) $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

B. ( ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{(z-5)^2}{4} = 1$

C. ( ) $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

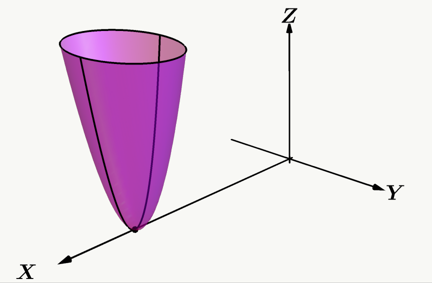
D. ( ) $-x^2 - z^2 + \dfrac{(y-5)^2}{2} = 1$

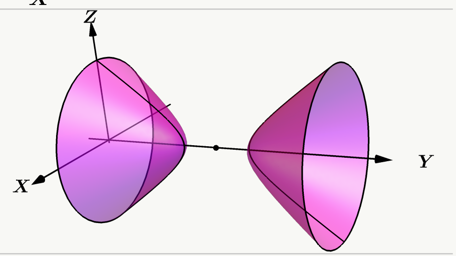
E. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

F. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

G. ( ) $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{16}$

H. ( ) $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

4. 

5. 

I. ( ) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

J. ( ) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z-5}{16}$

K. ( ) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

L. ( ) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

M. ( ) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

Solución: Las cuádricas que se muestran solo tienen traslación en alguno de los ejes. La idea es asociar la cuádrica con la ecuación centrada en el origen y luego aplicar una traslación en el eje respectivo.

1. [M.] $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

2. [C.] $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

3. [E.] $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

4. [G.] $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z}{16}$

5. [D.] $-x^2 - z^2 + \dfrac{(y-5)^2}{2} = 1$

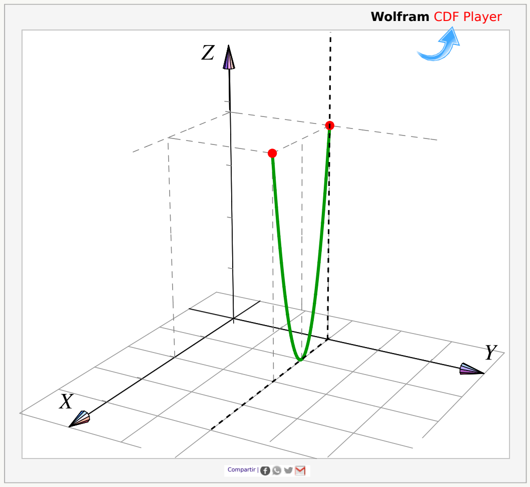
Ejemplo 3.27

Considere el parabolide elíptico de ecuación $S: \; z = (y-2)^2 + 4(x-1)^2$. Dibuje por separado las trazas obtenidas al intersecar S con los planos de ecuación $y = 2$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 4$, y dibuje la superficie.

Solución:

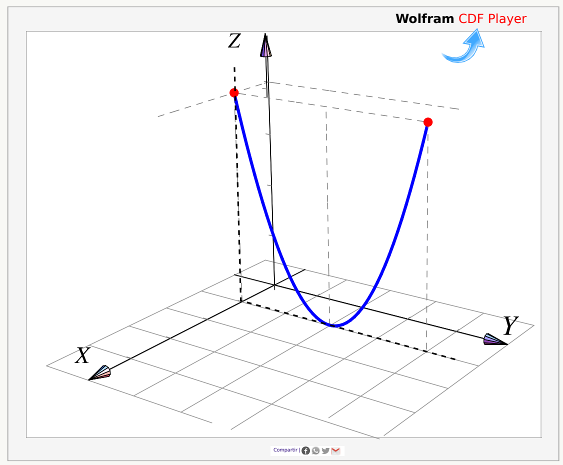
- Si sustituimos $y = 2$ en $z = (y-2)^2 + 4(x-1)^2$ nos queda $z = 4(x-1)^2$. Entonces, la traza $y = 2$ corresponde a la parábola

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}z, \;\; y = 2.$$



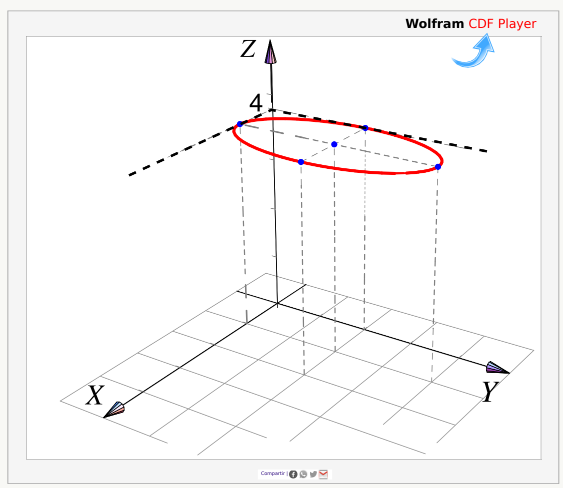
- La traza $x = 1$ corresponde a la parábola

$$(y-2)^2 = z, \quad x = 1$$

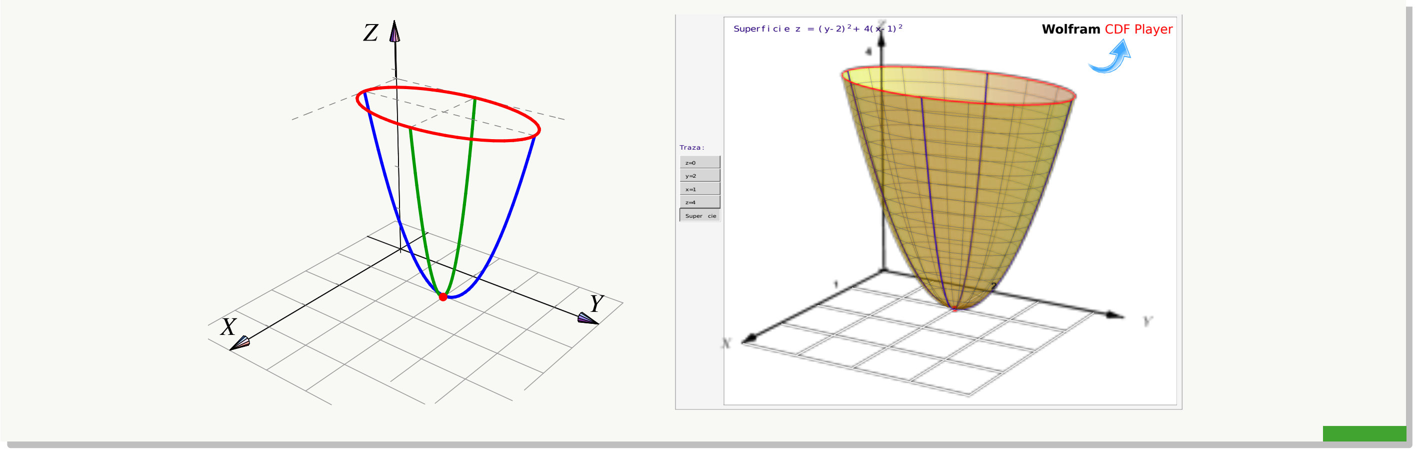


- La traza $z = 4$ corresponde a la elipse

$$\frac{(y-2)^2}{4} + (x-1)^2 = 1, \quad z = 4$$



- La traza $z = 0$ corresponde al vértice del parabolide, $(1,2,0)$.



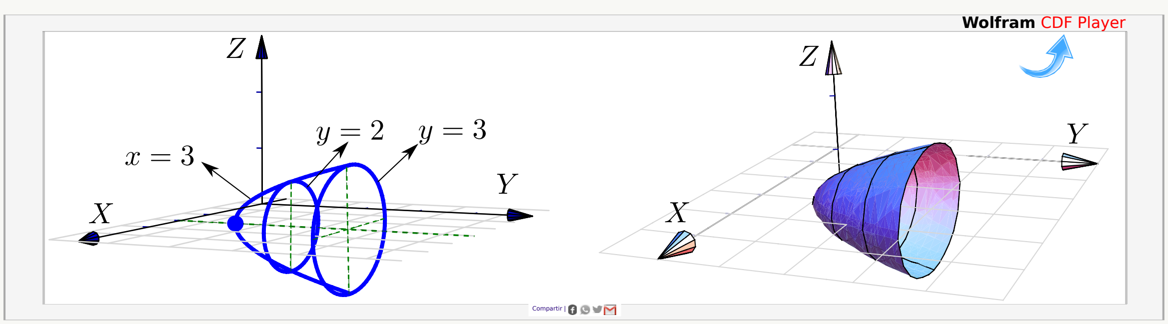
Ejemplo 3.28

Identifique y dibuje la superficie cuadrática $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

Solución: Completando el cuadrado en x obtenemos el *paraboloide elíptico* $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$. Abre en dirección del la parte positiva del eje Y.

Trazas. La estrategia es la siguiente: El *paraboloide elíptico* (que está más arriba), se puede dibujar con un par de elipses y una parábola. Para obtener las elipses le damos valores a y en la ecuación $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$. Se requiere que $y \geqslant 1$.

- La traza $y = 1$ es el punto: $(3,1,0)$.
- La traza $y = 2$ es la elipse $1 = (x-3)^2 + \dfrac{z^2}{1/2}$ en el plano $y = 2$
- La traza $y = 3$ es la elipse $1 = \dfrac{(x-3)^2}{2} + z^2$ en el plano $y = 3$
- La traza $x = 3$ es la parábola $y = 2z^2 + 1$ en el plano $x = 3$.

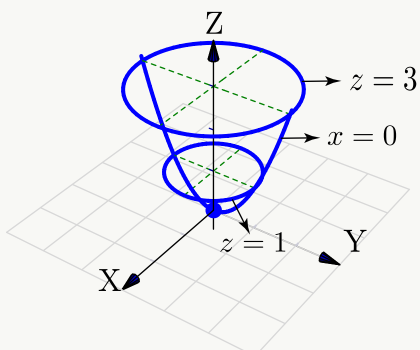


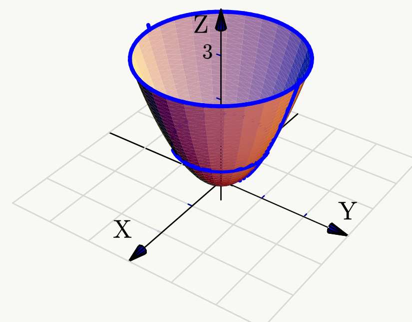
Ejemplo 3.29

Consideremos la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$. Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a $z = 0, 1, 3$ y $x = 0$.

Solución:

- La traza $z = 0$ es el punto $(0, 0, 0)$
- La traza $z = 1$ es la circunferencia $1 = x^2 + y^2$; en el plano $z = 1$
- La traza $z = 3$ es la circunferencia $3 = x^2 + y^2$; en el plano $z = 3$
- La traza $x = 0$ es la parábola $z = y^2$; en el plano $x = 0$



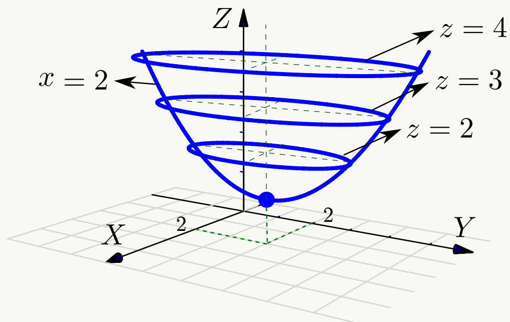


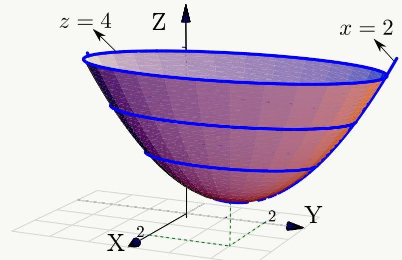
Ejemplo 3.30

Consideremos la superficie de ecuación $z - 1 = (x-2)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4}$. Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a $z = 1, 2, 3, 4$ y $x = 2$.

Solución:

- La traza $z = 1$ es el punto $(2, 2, 1)$
- La traza $z = 2$ es la elipse $1 = (x-2)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4}$ en el plano $z = 2$.
- La traza $z = 3$ es la elipse $1 = \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y-2)^2}{8}$ en el plano $z = 3$.
- La traza $z = 4$ es la elipse $1 = \dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{12}$ en el plano $z = 4$.
- La traza $x = 2$ es la parábola $z - 1 = \dfrac{(y-2)^2}{4}$ en el plano $x = 2$.





Ejemplo 3.31

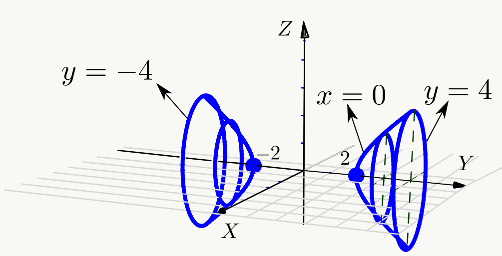
Identifique y dibuje la superficie cuadrática $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

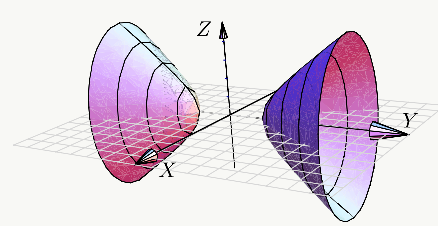
Solución: Dividiendo por 4 obtenemos: $-x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$, que corresponde a un *hiperboloide de dos hojas.* Abre en dirección del eje Y.

Trazas. La estrategia es la siguiente: El *hiperboloide de dos hojas* (que está más arriba), se puede dibujar con dos elipses y una hipérbola *por cada hoja*.

Para obtener elipses, arreglamos la ecuación como $\dfrac{y^2}{4} - 1 = x^2 + \dfrac{z^2}{2}$. Las elipses se obtienen dando valores a y con $|y| > 2$.

- Si $y = \pm 2$ obtenemos dos puntos: $(0, 2, 0)$, $(0, -2, 0)$.
- Si $y = \pm 3$ obtenemos la elipse $\dfrac{x^2}{5/4} + \dfrac{z^2}{5/2} = 1$ en el plano $y = 3$ y el plano $y = -3$.
- Si $y = \pm 4$ obtenemos la elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{z^2}{6} = 1$ en el plano $y = 4$ y el plano $y = -4$.
- Para obtener la hipérbola, ponemos $x = 0$ y arreglamos la ecuación como $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$.





Ejercicios

3.4.1 Dibuje cada una de las siguientes cuádricas:

a.) $y = (x-2)^2 + (z-2)^2$

b.) $z^2 + y^2 = \dfrac{x}{4}$

c.) $x^2 + y^2 + \dfrac{(z-1)^2}{9} = 1$

d.) $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$

e.) $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$

f.) $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$

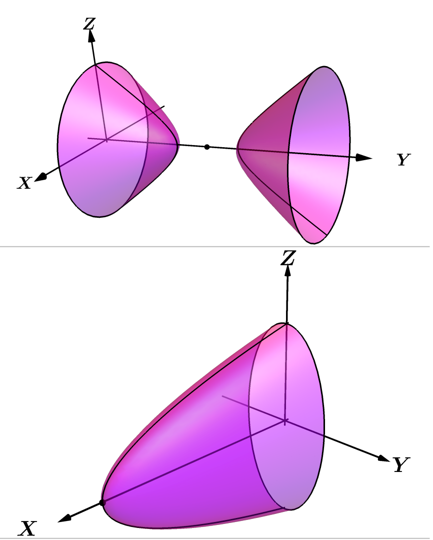
3.4.2 Considere la superficie de ecuación $S : 4 - z = x^2 + (y-2)^2 + z$. Dibuje por separado las curvas de corte de S con los planos $x = 0$, $z = 3$ y $z = 0$. Y luego dibuje S.

3.4.3 Identifique y dibuje la superficie cuadrática $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} + \dfrac{(z-1)^2}{4} = 1.$

3.4.4 Asocie cada una de las figuras con la respectiva ecuación de la superficie que representa. Para cada figura solo hay una posible ecuación en el lado derecho.

1.

2.



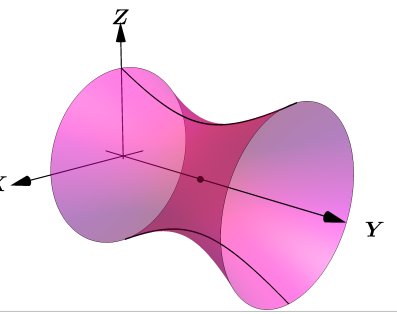
A. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

B. $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = \dfrac{z^2}{4}$

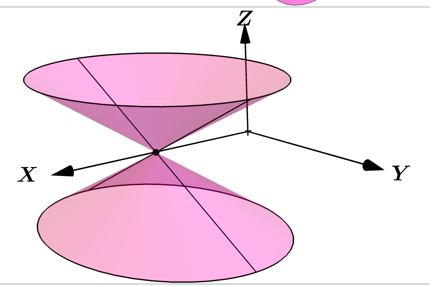
C. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{(y-5)^2}{2} = 0$

D. $x = y^2 + \dfrac{z^2}{16}$

3.



4.



E. $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}+\dfrac{(y-5)^2}{3}=1$

F. $(x-3)^2+(y-3)^2=z^2$

G. $\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{(y-4)^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$

H. $\dfrac{x-5}{-16}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=0$

I. $-\dfrac{z^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$

3.5 Sólidos simples

Los sólidos simples se describen por medio de su frontera, es decir, se describen por las superficies que lo limitan. Un sólido simple es un conjunto compacto limitado por una o varias superficies orientables (de dos caras), sin hoyos, con borde y sin traslapes; en el interior del sólido no hay superficies ni 'burbujas' (la frontera del sólido es tal que divide el espacio en dos partes: Interior y exterior).

Visualizando curvas de intersección entre superficies

Para realizar dibujos 'a mano' es esencial visualizar las curvas de intersección entre superficies. En general, si dos superficies se cortan en una o varias curvas, una manera de bosquejar estas curvas es buscar algunos puntos de contacto. En los casos más sencillos, estos puntos los podemos localizar en los planos XY, XZ o YZ. En los ejemplos que siguen, estos "puntos-guía" se señalan con un punto rojo.

Ejemplo 3.32

Consideremos la curva C de intersección de la superficie $S_1:\ z=1-x^2$ y el plano $S_2:\ y=3$, en el primer octante.

Para dibujar esta curva, calculamos "dos puntos guía" para trazar la curva. Los puntos guía están en rojo en la figura. Son el punto de intersección entre las rectas $z=1$ y $y=3$ en el plano YZ y el punto de intersección entre las rectas $z=1$ y $y=3$ en el plano XY. La curva que queremos dibujar inicia en uno de estos puntos y termina en el otro.

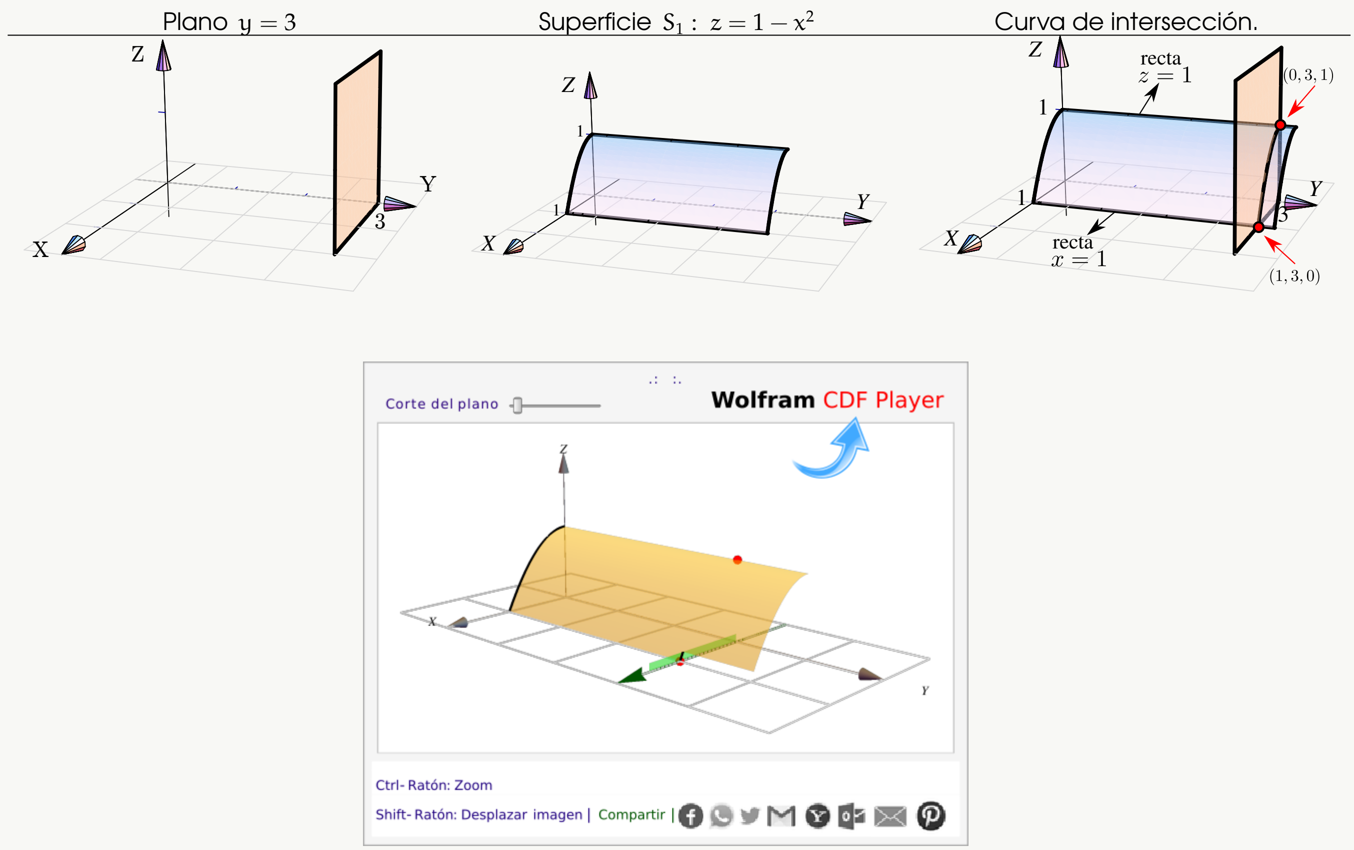


Figura 3.21: Curva de intersección entre las superficies $S_1: \ z = 1 - x^2$ y el plano $S_2: \ y = 3$

Ejemplo 3.33

Consideremos la curva C de intersección entre la superficie $S_1: \ z = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ y el plano $S_2: \ x + y = 6$ *en el primer octante.*

El plano $S_2: \ x + y = 6$ interseca a los ejes X e Y en $x = 6$ y $y = 6$, respectivamente. Como se observa, los puntos-guía están en los planos XY y YZ.

En el plano XY el punto-guía se obtiene sustituyendo $x = 4$ en la ecuación de la recta $x + y = 6, \ z = 0$; se obtiene $(4, 2, 0)$. En el plano YZ el punto-guía es claramente $(0, 6, 4)$.

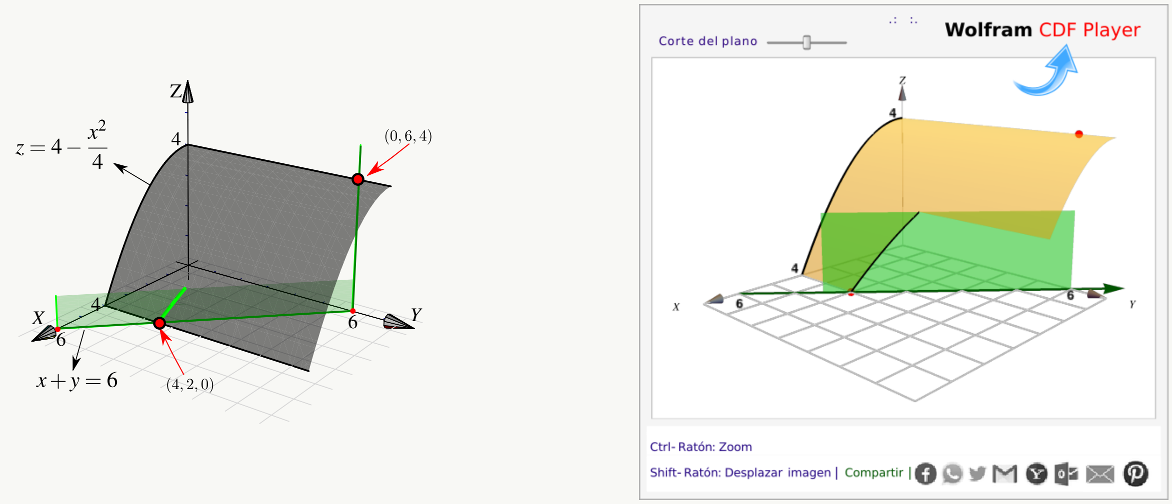


Figura 3.22: Curva de intersección entre las superficies $S_1: \ z=4-\dfrac{x^2}{4}$ y el plano $S_2: \ x+y=6$

Ejemplo 3.34

Consideremos la superficie $S_1: \ z=1-x^2$ y el plano $S_2: \ y+z=2$ *en el primer octante.* Los puntos-guía son $(1,2,0)$ y $(0,1,1)$. El punto $(0,1,1)$ se obtiene sustituyendo $z=1$ en la ecuación de la recta $y+z=2, x=0$.

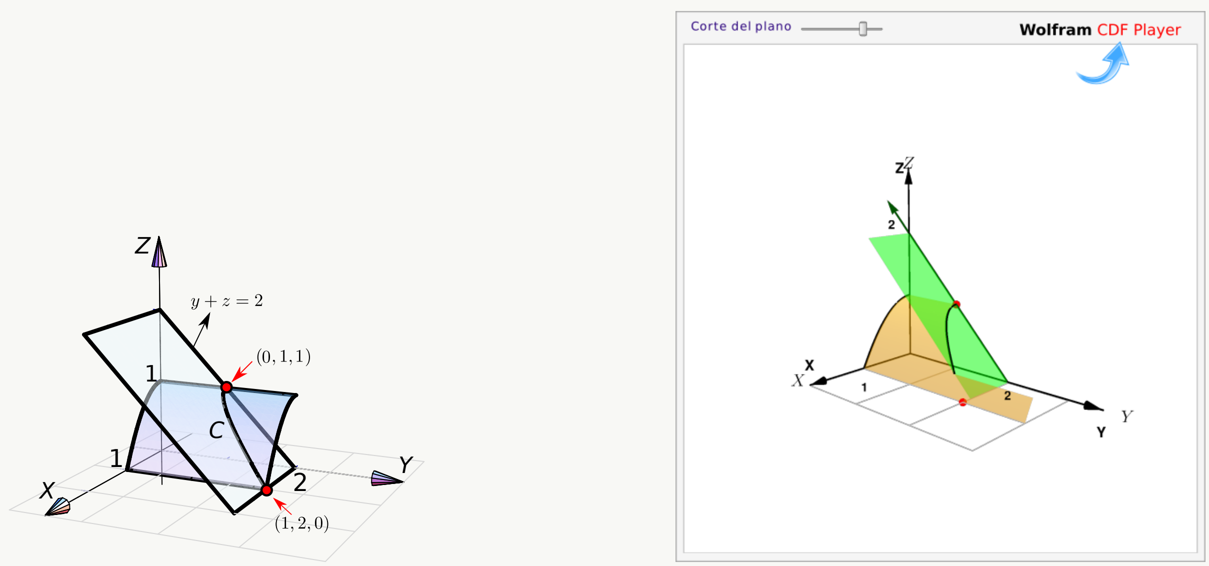


Figura 3.23: Curva de intersección la superficie $S_1: \ z=1-x^2$ y el plano $y+z=2$

Ejemplo 3.35

Consideremos la curva de intersección entre la superficie $S_1: \; x^2+z^2=9$ y el plano $S_2: \; y-x=-2$ *en el primer octante.*

El corte del plano $S_2: \; y-x=-2$ con el plano XZ es la recta $x=2$ (pues sobre este plano, $y=0$). Sustituyendo $x=2$ en la ecuación $x^2+z^2=9, \; y=0$; obtenemos el punto de intersección $(2,0,\sqrt{5})$.

El otro punto-guía se obtiene sustituyendo $x=3$ en la ecuación del plano $S_2: \; y-x=-2$, este punto es $(3,1,0)$.

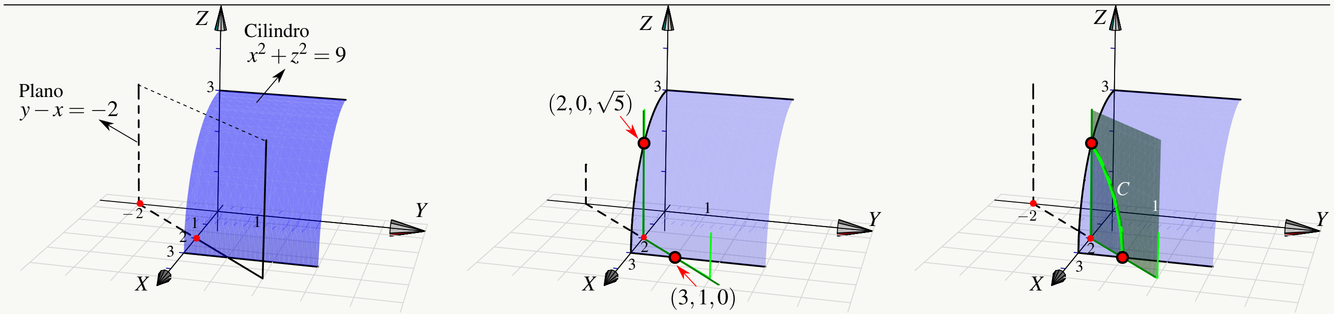
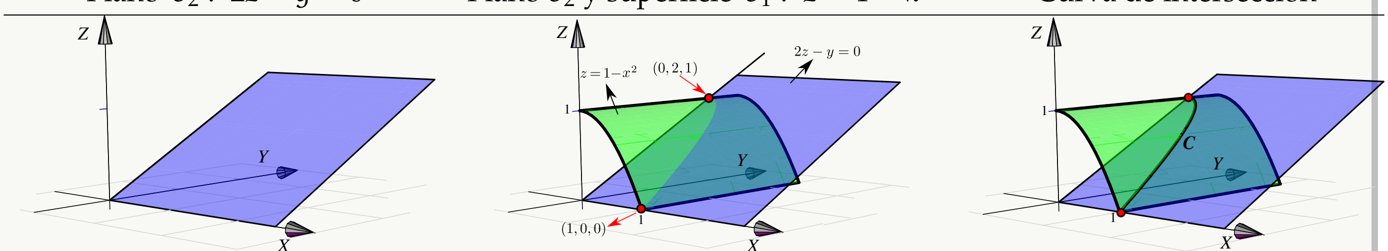


Figura 3.24: Curva de intersección la superficie $S_1: \; x^2+z^2=9$ y el plano $S_2: \; y-x=-2$

Ejemplo 3.36

Consideremos la superficie $S_1: \; z=1-x^2$ y el plano $S_2: \; 2z-y=0$, *en el primer octante.* Para dibujar la curva C de interserción en el primer octante, buscamos los puntos guía. En este caso estos puntos son $(1,0,0)$ y $(0,2,1)$.

Plano $S_2: \; 2z-y=0$	Plano S_2 y superficie $S_1: \; z=1-x^2$	Curva de intersección



Ejemplo 3.37

Consideremos las superficies $S_1: \; x^2+y^2=16, \; S_2: \; 2x-z^2=0$, *en el primer octante.* Para dibujar la curva C de interserción en el primer octante, buscamos los puntos guía. En este caso estos puntos son $(0,4,0)$ y $(2,0,\sqrt{8})$.

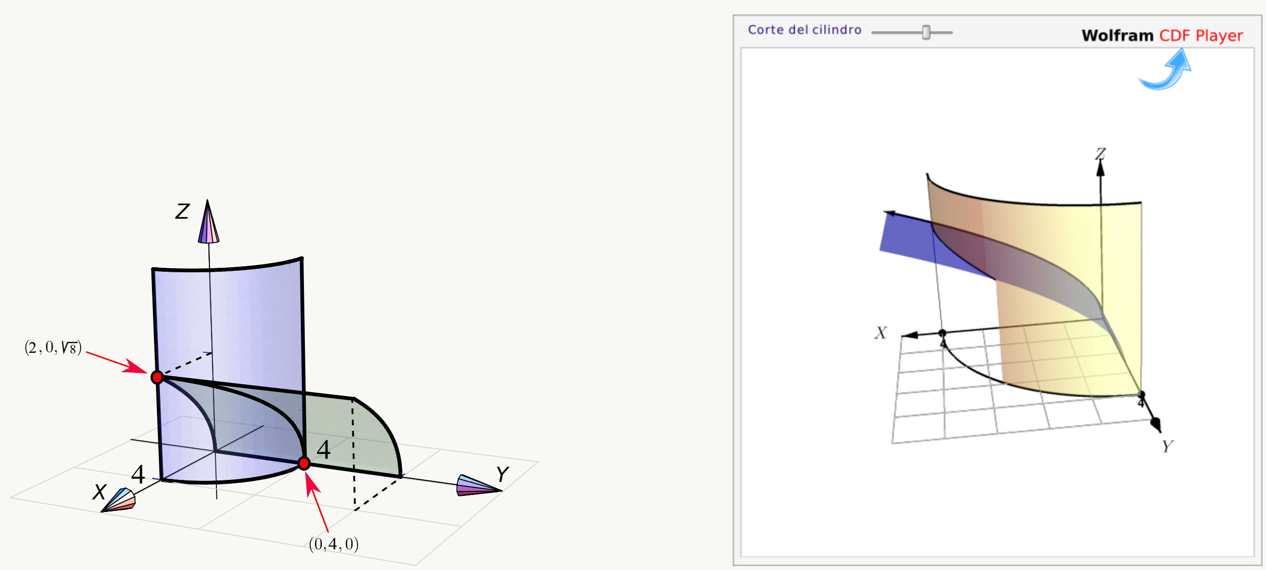


Figura 3.25: Curva de intersección las superficies $S_1: \ x^2+y^2=16$ y $S_2: \ 2x-z^2=0$

Perspectiva. En general, cuando dibujamos el sistema de ejes XYZ en posición estándar, podemos mover el eje X un poco hacia arriba o un poco hacia abajo y esto hace que la perspectiva cambie.

En el dibujo que sigue, se muestra la intersección del mismo cilindro y el mismo plano, la diferencia está en la posición del eje X (lo que produce el cambio de perspectiva!). En el primer caso el plano se ve "desde arriba" en el segundo caso el plano lo vemos "desde abajo"

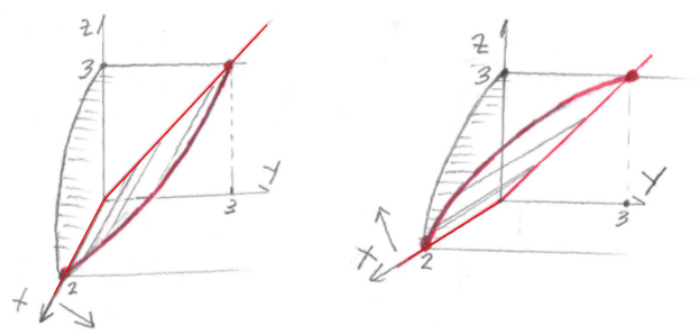


Figura 3.26: Efecto en la perspectiva al mover el eje X

Dibujo de sólidos simples

¿Siempre dibujamos en el I octante?. No, excepto que se pida de manera específica. A veces se pide el dibujo en el primer octante para simplificar el dibujo, pero para otros sólidos es obligatorio especificar el octante para que se cumpla la especificación de *sólido simple* que dimos más arriba y así evitar ambigüedades (recuerde que los sólidos simples son conjuntos compactos y no tienen superficies interiores ni 'burbujas').

El sólido de la figura 3.5 es un "sólido simple", limitado por lel cilindro $S_1 : z = x^2+y^2$ y los planos $S_2: \ 2z=2+3x$, $S_3: \ z=4$, $S_4: \ x=0$ y $S_5: \ y=0$, en el primer octante.

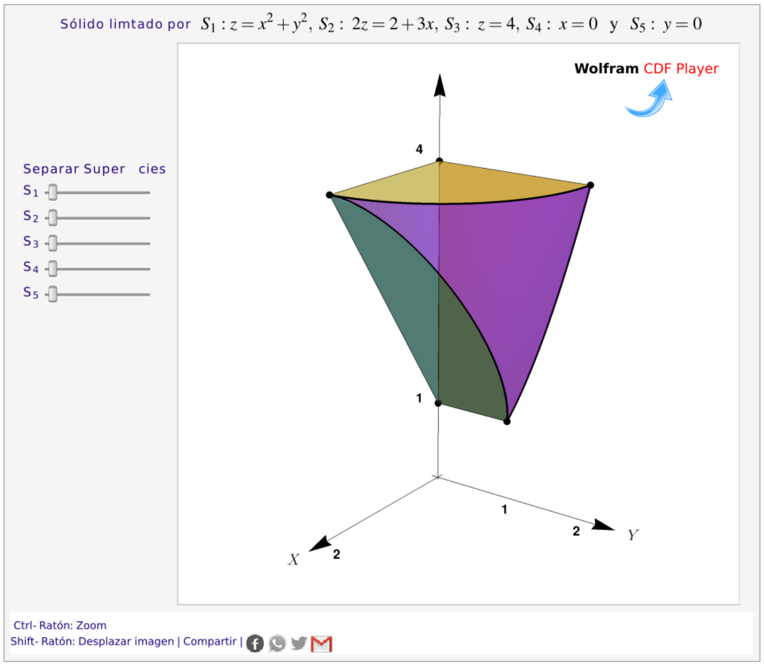
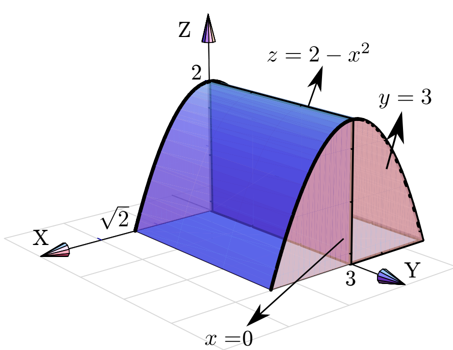
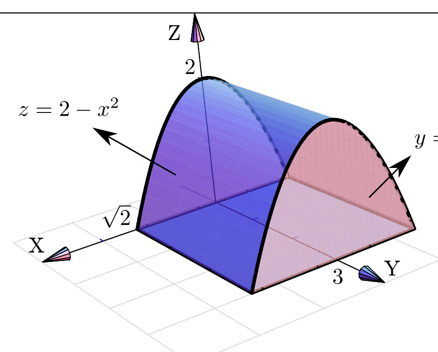


Figura 3.27: Sólido simple

Ambiguedades. Por ejemplo, el sólido Q limitado por $S_1 : z = 2 - x^2$; $S_2 : y = 3$; $S_3 : x = 0$; $S_4 : y = 0$ y $S_5 : z = 0$, no es un sólido simple pues $x = 0$ es una superficie interior. Si eliminamos esta superficie interior, si tendríamos un sólido simple.

Sólido Q (no simple) limitado por $S_1 : z = 2 - x^2$; $S_2 : y = 3$; $S_3 : x = 0$; $S_4 : y = 0$ y $S_5 : z = 0$.	Sólido Q simple, limitado por $z = 2 - x^2$; $y = 3$; $y = 0$ y $z = 0$,
	

Los siguientes sólidos son una "variación" del sólido anterior, pero ahora se trata de sólidos simples. En particular muestran que la presencia de los planos "$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$" no implica que el sólido esté en el primer octante, de hecho se pueden usar estos planos especificando que el sólido está en otro octante. Los dos sólido de la figura que sigue, están limitados por las mismas superficies, pero el de la izquierda está en el primer octante y el de la derecha está en el segundo octante.

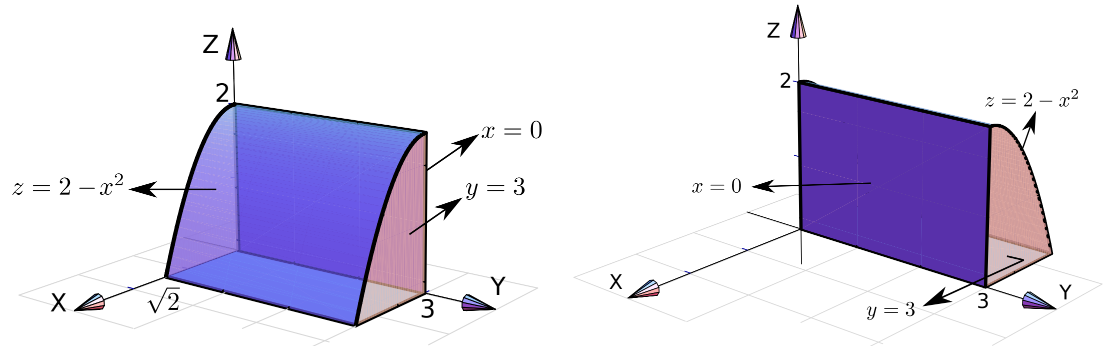


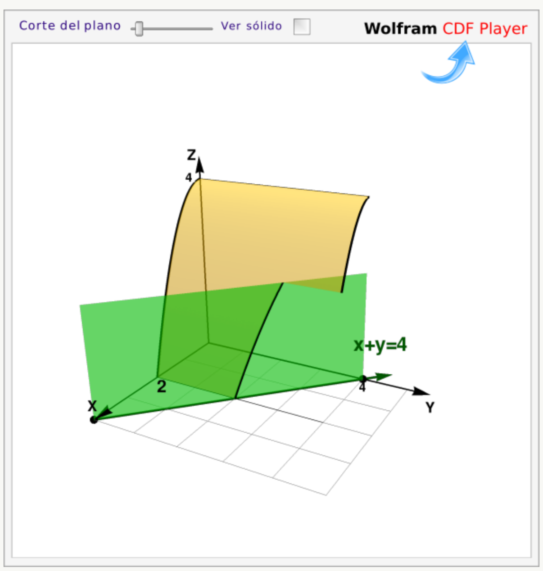
Figura 3.28: Sólidos limitados por las mismas superficies, pero en distinto octante.

El dibujo de sólidos simples se hace estableciendo las rectas o las curvas de intersección entre las superficies que limitan el sólido.

Ejemplo 3.38

Dibujar el sólido Q limitado por la superficie $S_1: \ z = 4 - x^2$ y el plano $S_2: \ x + y = 4$; en el primer octante

Solución: Dibujamos ambas superrficies y observamos dos puntos-guía: $(2,2,0)$ y $(0,4,4)$. Esto nos permite bosquejar la curva de interseccion entre S_1 y S_2. Como estamos en el primer octante, en este caso los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ son las otras superficies que limitan el sólido.



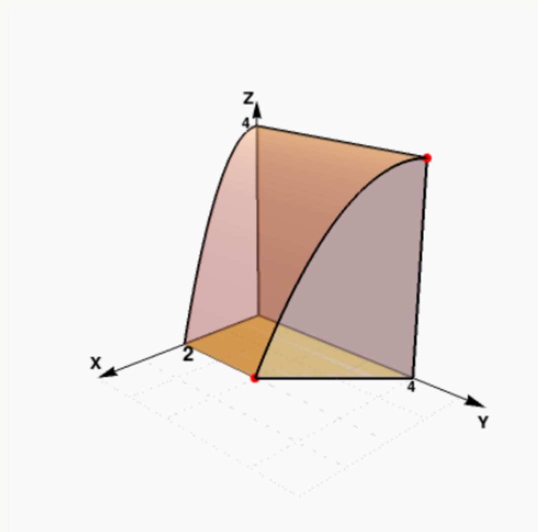
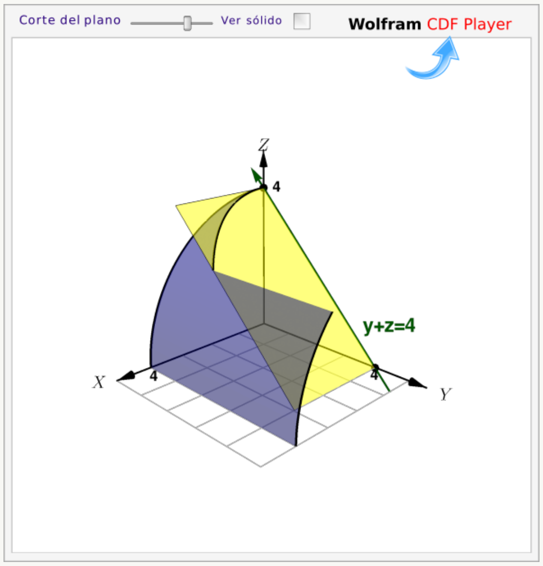


Figura 3.29: Sólido Q

Ejemplo 3.39

Dibujar el sólido Q limitado por la superficie $S_1: \ x^2 + z^2 = 16$ y el plano $S_2: \ y + z = 4$; en el primer octante

Solución: Dibujamos ambas superrficies y observamos dos puntos-guía: $(4,4,0)$ y $(0,0,4)$. Esto nos permite bosquejar la curva de interseccion entre S_1 y S_2. Como estamos en el primer octante, en este caso, los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ son las otras superficies que limitan el sólido.



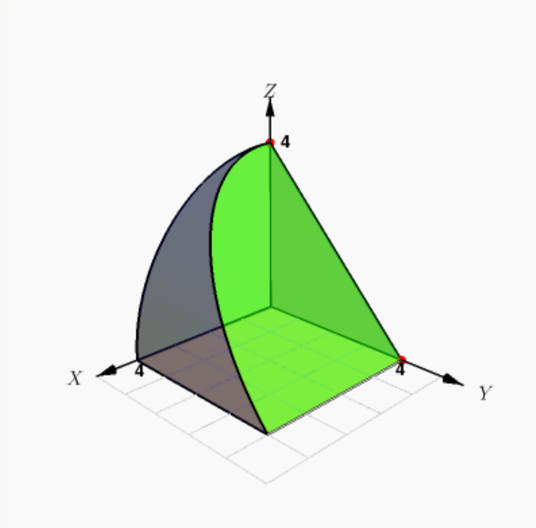


Figura 3.30: Sólido Q

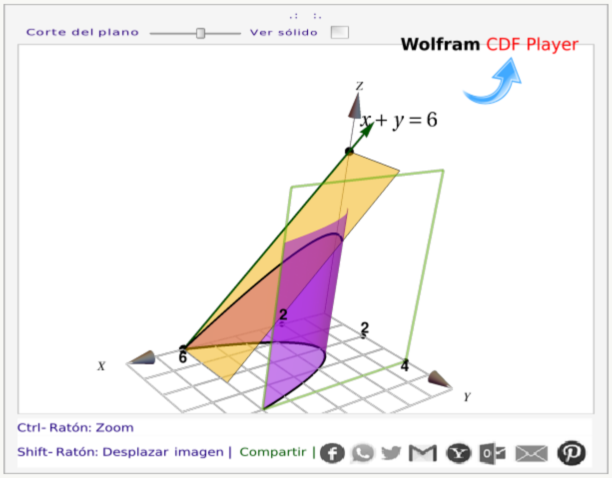
Ejemplo 3.40

Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1: \ (y-2)^2 = x-2$, $S_2: \ y=4$, $S_3: \ x+z=6$, $S_4: \ x=0$ $S_5: \ y=0$ y $S_6: \ z=0$.

Solución: La parte delicada es dibujar la intersección entre las superficies S_1 y S_3.

El plano $S_3: \ x+z=6$ corta a la superficie S_1 desde $x=2$ hasta $x=6$. El corte incia en $(6,0,0)$ luego el corte debe pasar por $(2,2,4)$ (que está encima del vértice de la parábola $(y-2)^2 = x-2$) y finaliza en $(2,4,0)$.

El sólido está limitado por la superficie $S_4: \ x=0$, por eso el sólido "inicia" en el plano YZ y sigue hasta el cilindro S_1



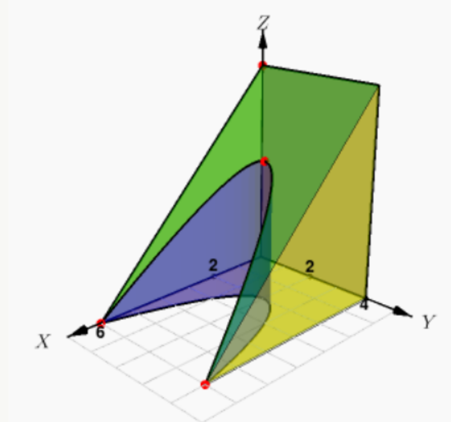


Figura 3.31: Sólido Q

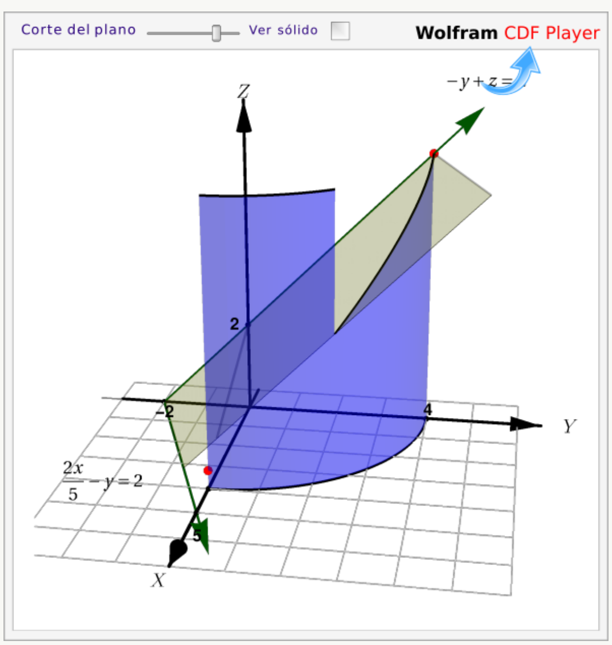
Ejemplo 3.41

Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1:\ x^2+y^2=16,\ \ S_2:\ \frac{2}{5}x-y+z=2,$ en el I octante.

Solución: Primero calculamos el par de puntos-guía en los que el plano $S_2:\ \frac{2}{5}x-y+z=2$ interseca al cilindro $S_1:\ x^2+y^2=16.$

En el plano XZ el plano S_2 corta la recta $x=4$ del cilindro S_1. Entonces, como $x=4$ y $y=0$ tenemos (sustituyendo en la ecuación de S_2) $z=2/5$. Similarmente, en el plano YZ el punto de contacto se obtiene en la intersección de la recta $y=4$ y la recta $-y+z=2$.

De esta manera, los puntos de primer contacto entre el cilindro y el plano, en el I octante, son los puntos $(4,0,2/5)$ y $(0,4,6)$.



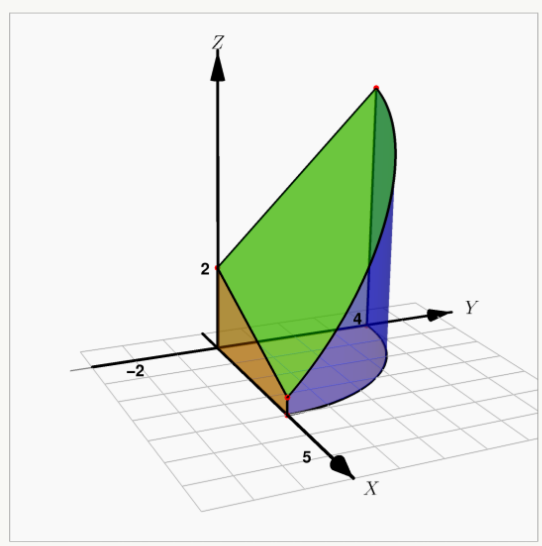
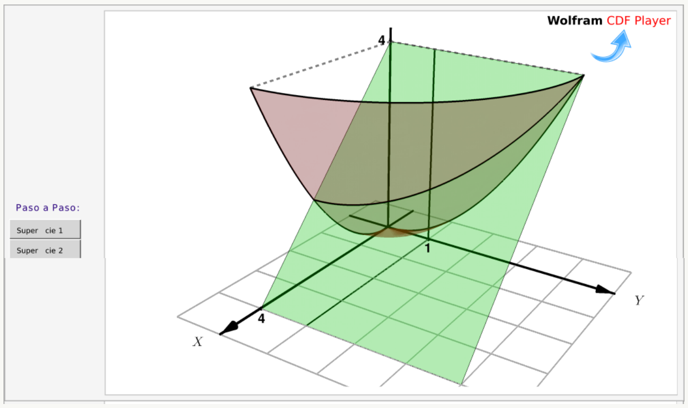


Figura 3.32: Sólido Q

Ejemplo 3.42

Dibujar el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : \; x^2+y^2=4z$; $S_2 : \; z+x=4$; $S_3 : \; y=1$ y $S_4 : \; x=0$, en el I octante.

Solución: En la aplicación interactiva puede seguir los pasos para obtener el sólido.



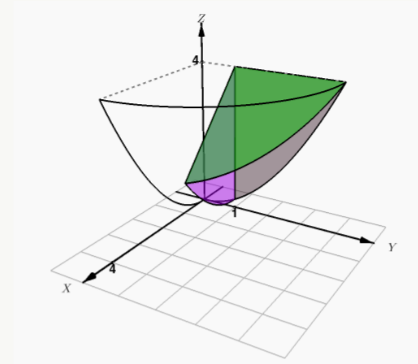
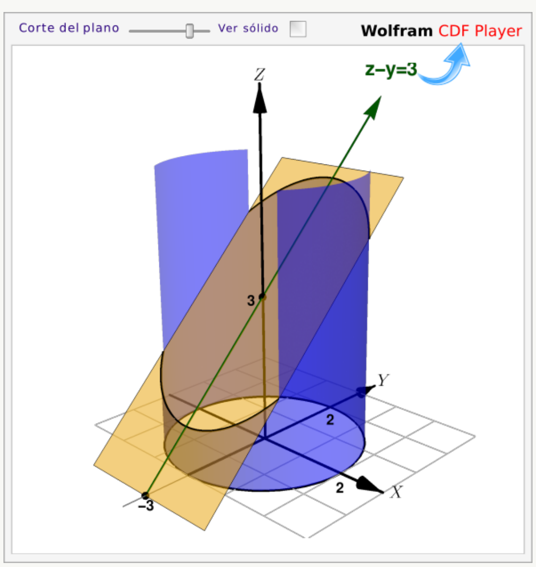


Figura 3.33: Sólido Q

Ejemplo 3.43

Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : \; x^2+y^2=4$, $S_2 : \; z-y=3$, y $S_3 : \; z=0$.

Solución: El plano $S_2 : \; z-y=3$ interseca al cilindro en los puntos $(0,-2,1)$ y $(0,2,5)$. Podemos usar estos puntos para dirigir el bosquejo de la curva de intersección.



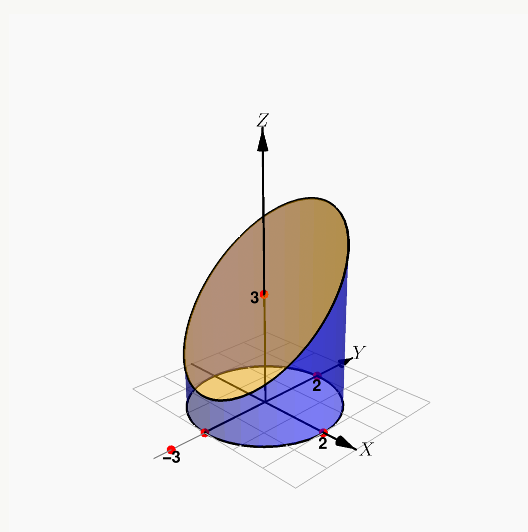
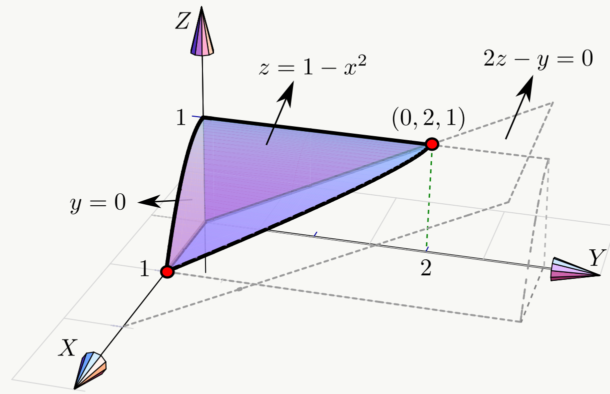


Figura 3.34: Sólido Q

Ejemplo 3.44

Dibujar el sólido Q limitado por la superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ y los planos $S_2 : 2z - y = 0$; $S_3 : y = 0$; $S_4 : x = 0$; en el primer octante.

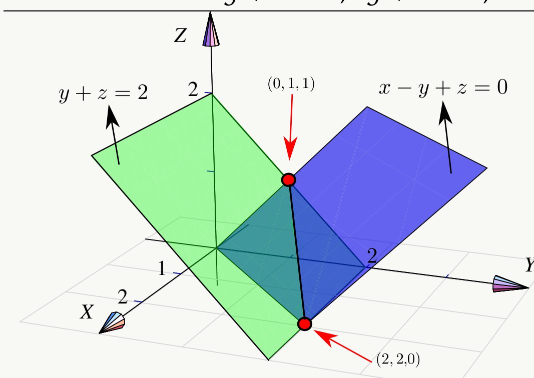
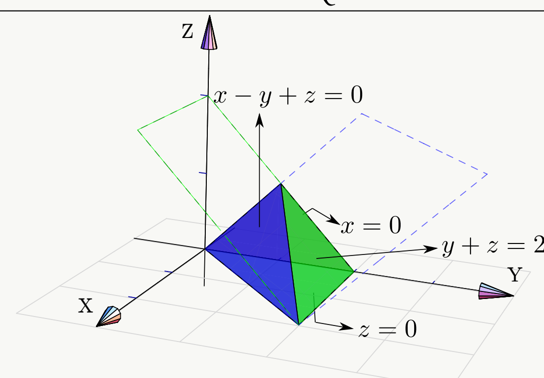
Solución: La superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ queda arriba y el plano $S_2 : 2z - y = 0$ queda abajo. El plano $z = 0$ *no* es parte del sólido. El punto $(0,2,1)$ se obtiene como intersección de las rectas $z = 1$ y $2z - y = 0$.



Ejemplo 3.45

Dibujar el sólido Q limitado por los planos $S_1 : x - y + z = 0$; $S_2 : y + z = 2$; $S_3 : x = 0$ y $S_4 : z = 0$.

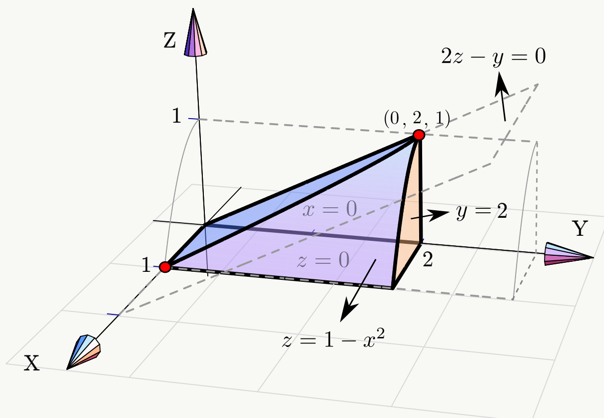
Solución: Dibujamos ambos planos y marcamos los puntos guía para trazar el segmento de intersección. Uno de los puntos se obtiene como la intersección de las rectas $-y + z = 0$ y $y + z = 2$, y el otro como la intersección de las rectas $x - y = 0$ y $y = 2$. Estos puntos son $(0,1,1)$ y $(2,2,0)$ El sólido se mantiene en el primer octante pues está limitado por el plano $x = 0$ (plano YZ) y el plano $z = 0$ (plano XY).

Planos $x - y + z = 0$; $y + z = 2$;	Sólido Q
	

Ejemplo 3.46

Dibujar el sólido Q limitado por la superficie $S_1 : z = 1 - x^2$ y los planos $2z - y = 0$; $x = 0$; $z = 0$ y $y = 2$, en el primer octante.

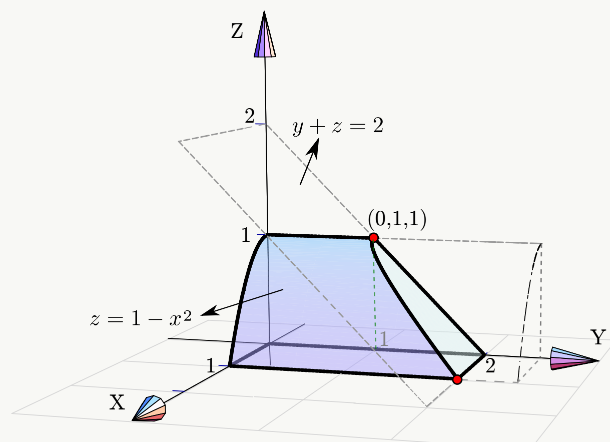
Solución: Como el sólido está limitado por los planos $z = 0$ y $x = 0$, entonces el plano $2z - y = 0$ queda en la parte de arriba del sólido.



Ejemplo 3.47

Dibujar el sólido Q limitado por la superficie $S_1:\ z = 1 - x^2$ y el plano $S_2:\ y + z = 2$; en el primer octante.

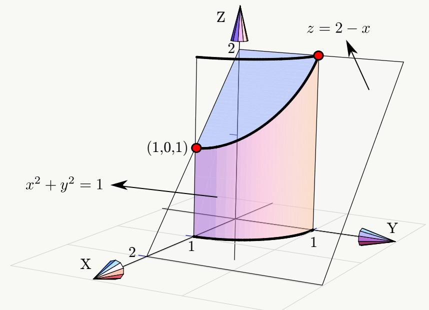
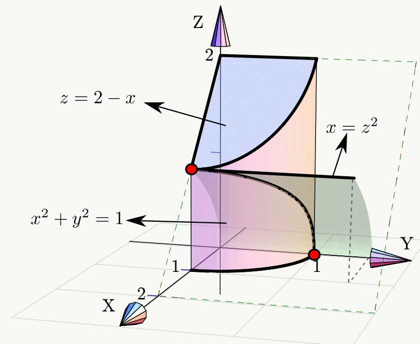
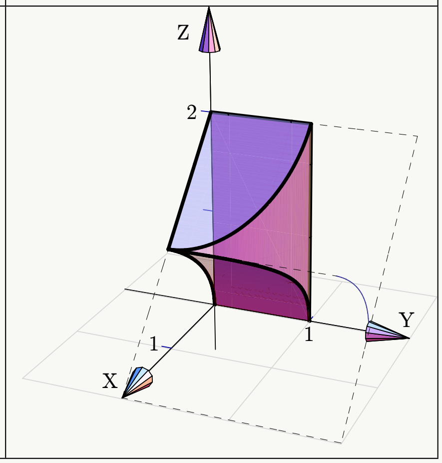
Solución: En este caso no es necesario especificar los planos $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$; con solo especificar que está en el primer octante es suficiente porque en este caso no hay ambiguedad.



Ejemplo 3.48

Dibujar el sólido Q limitado por las superficies $S_1:\ x^2 + y^2 = 1$; $S_2:\ x - z^2 = 0$ y los planos $S_3:\ z = 2 - x$; $S_4:\ x = 0$ y $S_5:\ y = 0$, en el primer octante.

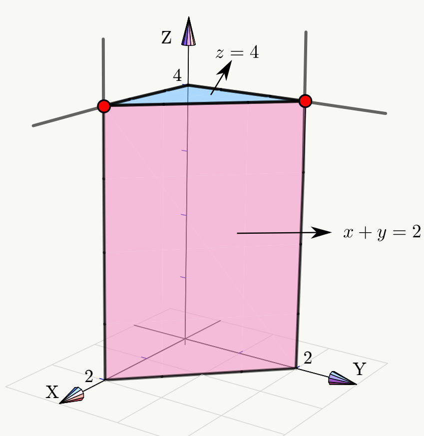
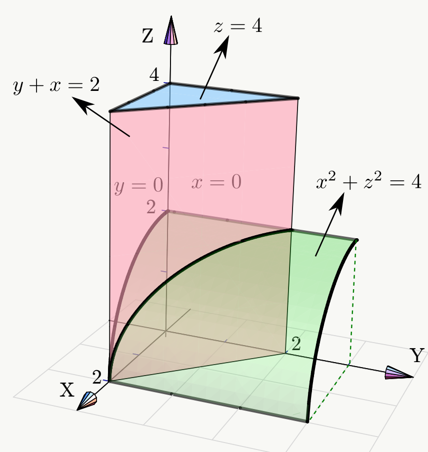
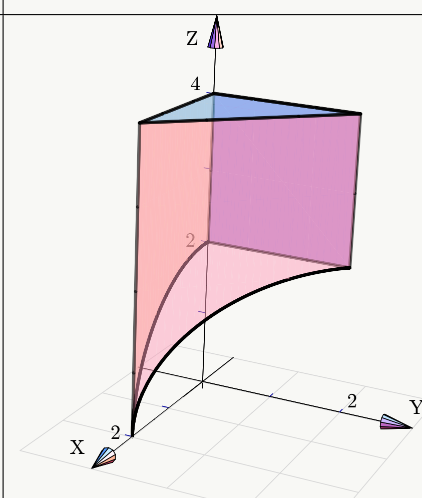
Solución: Tal vez sea más sencillo dibujar primero la superficie $S_1:\ x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = 2 - x$; luego dibujamos la otra superficie $S_2:\ x - z^2 = 0$.

Superficie S_1 : $x^2+y^2=1$ y plano $z=2-x$	Agregamos la superficie S_2 : $x-z^2=0$.	Sólido Q
		

Ejemplo 3.49

Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1 : x^2+z^2=4$; $S_2 : y+x=2$; $S_3 : z=4$; y $S_4 : y=0$, $S_5 : x=0$, en el I octante.

Solución: Dibujamos los planos $S_2 : y+x=2$ y $S_3 : z=4$; luego agregamos la otra superficie $S_1 : x^2+z^2=4$.

Planos $S_2 : y+x=2$; $S_3 : z=4$.	Agregamos la superficie $S_1 : x^2+z^2=4$.	Sólido Q
		

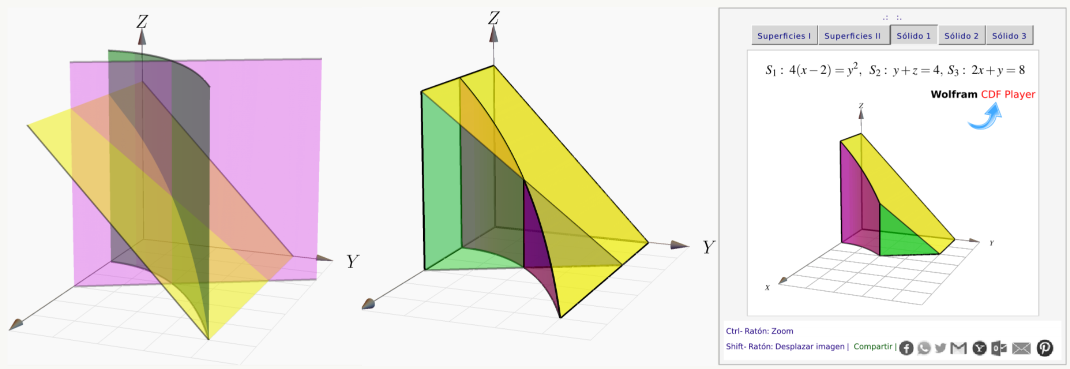
Ejemplo 3.50

Considere las superficies $S_1:\ 4(x-2)=y^2,\ S_2:\ y+z=4,\ $ y $S_3:\ 2x+y=8$. Con estas superficies tenemos tres posibles sólidos en el I octante.

a.) El Q limitado por las superficies $S_1,\ S_2,\ S_3$ y los planos $S_4:\ x=0,\ S_5:\ y=0$ y $S_6:\ z=0$.

b.) El sólido Q limitado por las superficies $S_1,\ S_2,\ S_3$ y el plano $S_6:\ z=0$.

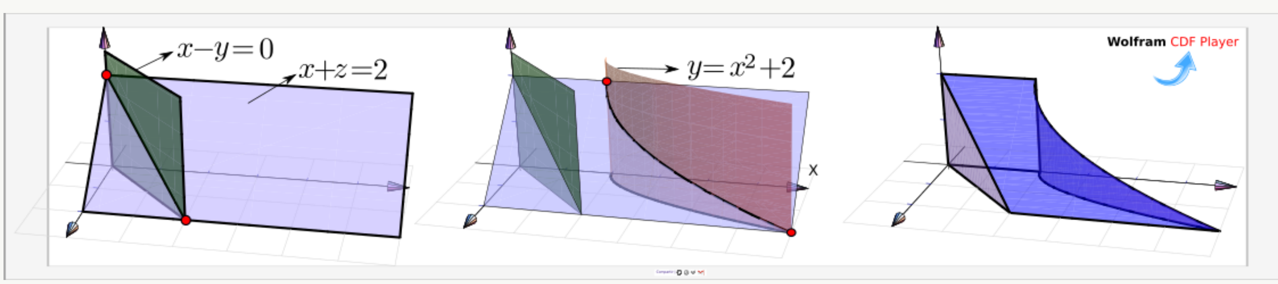
c.) El sólido Q limitado por las superficies $S_1,\ S_2,\ S_3$ y los planos $S_5:\ y=0$ y $S_6:\ z=0$.



Ejemplo 3.51

Dibuje el sólido Q limitado por la superficie $S_1:\ y=x^2+2$ y los planos $S_2:\ x-y=0;\ S_3:\ x+z=2;$ $S_4:\ x=0$ y $S_5:\ z=0$.

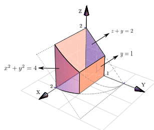
Solución: Podríamos dibujar los planos S_2 y S_3 y sus intersección y luego agregar el cilindro S_1.



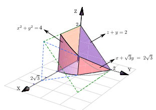
Ejercicios

En los siguientes ejercicios, dibuje el sólido limitado por las superficies que se indican.

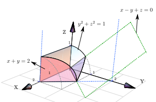
3.5.1 Dibuje el sólido Q limitado por las superficies $S_1 :\ (y-2)^2 = x-2,\ S_2 :\ y = 1,\ S_3 :\ y = 4,$ $S_4 :\ x+z = 6,\ S_5 :\ x = 0$ y $S_6 :\ z = 0.$

3.5.2 

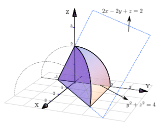
Dibujar el sólido Q_1 limitado por las superficies $x^2+y^2 = 4; z+y = 2;\ \ y = 1$ y $y = 0,$ en el I octante.

3.5.3 

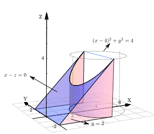
Sólido Q_2 limitado por la superficie $x^2+y^2 = 4$; y los planos $z+y = 2;\ \ x+\sqrt{3}y\ =\ 2\sqrt{3}$ y $x = 0$, en el I octante

3.5.4 

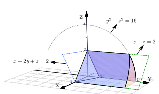
Sólido Q_3 limitado por la superficie $y^2+z^2 = 1$; y los planos $x+y = 2;\ \ x-y+z = 0$, en el I octante.

3.5.5 

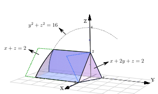
Sólido Q_4 limitado por la superficie $y^2+z^2 = 4$ y los planos $2x-2y+z = 2;\ \ x = 0$ y $z = 0.$

3.5.6 

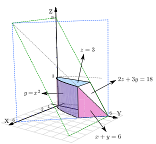
Sólido Q_5 limitado por la superficie $(x-4)^2+y^2 = 4$ y los planos $x-z = 0;\ \ y = -2;\ \ y = 2;$ y $z = 0$ con $0 \leqslant x \leqslant 4\,.$

3.5.7 

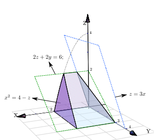
Sólido Q_6 limitado por la superficie $y^2+z^2 = 16$ y los planos $x+2y+z = 2;\ \ x+z = 2;\ \ x = 0;$ y $z = 0$ en el I octante.

3.5.8 

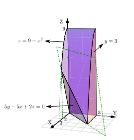
Sólido Q_7 limitado por la superficie $y^2+z^2 = 16$ y los planos $x+2y+z = 2;\ \ x+z = 2;\ \ x = 0;$ y $z = 0$ en el I y IV octante.

3.5.9 

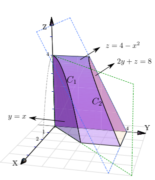
Sólido Q_8 limitado por la superficie $y = x^2$ y los planos $2z+3y = 18;\ \ x+y = 6;\ \ z = 3;\ \ x = 0;$ y $z = 0,$ en el I octante.

3.5.10 

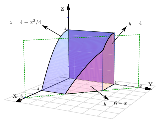
Sólido Q_9 limitado por la superficie $x^2 = 4-z$ y los planos $3z+2y = 6;\ \ z = 2x;\ \ y = 0;$ y $z = 0\,.$

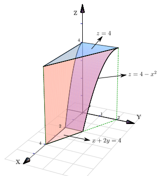
3.5.11 

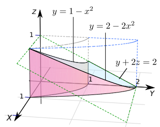
Sólido Q_{10} limitado por la superficie $z = 9-x^2$ y los planos $5y-5x+2z = 0$ y $y = 3,$ en el primer octante.

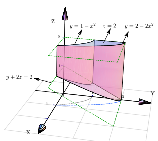
3.5.12 

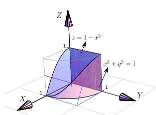
Sólido Q_{11} limitado por las superficies $z = 4-x^2;\ 2y+z = 8;\ y = x;\ x = 0$ y $z = 0,$ en el primer octante.

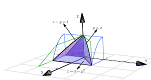
3.5.13  Sólido Q_{12} limitado por las superficies $z = 4 - x^2/4$; $y = 6 - x$; $y = 4$ y $y = 0$, en el primer octante.

3.5.14  Sólido Q_{13} limitado por las superficies $z = 4 - x^2$; $x + 2y = 4$; $z = 4$; $z = 0$ y $y = 0$.

3.5.15  Sólido Q_{14} limitado por las superficies $y = 2 - 2x^2$; $y = 1 - x^2$; $y + 2z = 2$; $x = 0$ y $z = 0$; en el I octante.

3.5.16  Sólido Q_{15} limitado por las superficies $y = 2 - 2x^2$; $y = 1 - x^2$; $y + 2z = 2$; $x = 0$ y $z = 2$, en el I octante.

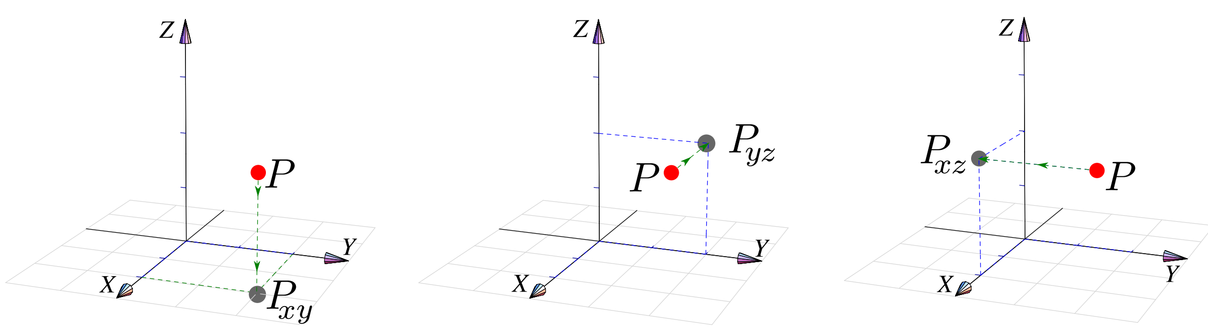
3.5.17  Sólido Q_{16} limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 1$; $z = 1 - x^2$, en el I octante.

3.5.18  Sólido Q_{17} limitado por las superficies $z = 1 - x^2$; $z - y = 1$; $y = x$; $x = 0$ y $z = 0$, en el I y IV octante.

3.6 Proyección (ortogonal) de un sólido simple

Proyección ortogonal de un punto. La proyección ortogonal de un punto P en un plano Π es el punto en este plano cuya distancia (euclidiana) a P es mínima. Intuitivamente corresponde a la "sombra" del punto proyectada perpendicularmente sobre el plano Π. En la figura que sigue se muestra la proyección de un punto P sobre cada uno de los planos XY, YZ y XZ.

Proyección sobre XY — Proyección sobre YZ — Proyección sobre XZ



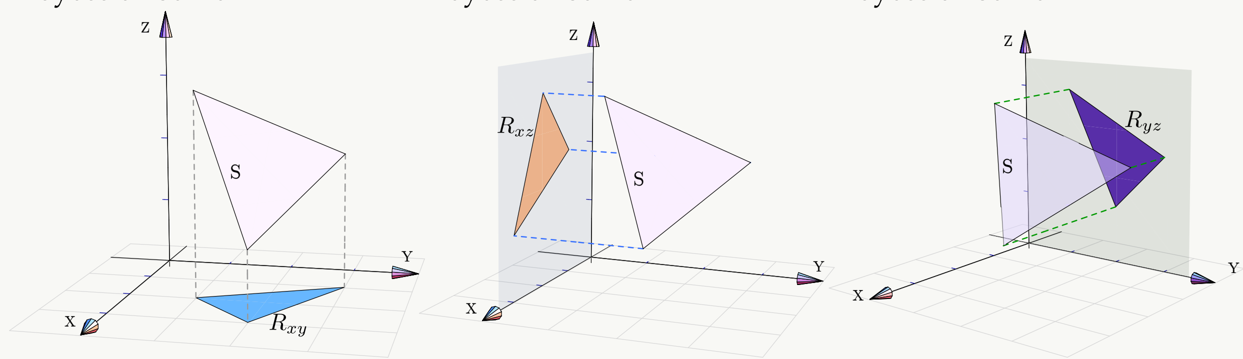
Proyección ortogonal de una superficie

La proyección perpendicular de una superficie S sobre un plano Π es la proyección perpendicular de cada uno de sus puntos sobre este plano. En este libro solo nos interesa la proyección de la superficie S sobre los planos coordenados.

Ejemplo 3.52

En este ejemplo visualizamos la proyección de un triángulo S sobre cada uno de los planos XY, YZ y XZ.

Proyección sobre XY Proyección sobre YZ Proyección sobre XZ



En la práctica nos interesa describir la proyección de manera analítica porque, en este curso, estas proyecciones van a ser regiones de integración.

En general, para obtener la proyección sobre uno de los planos XY, XZ o YZ; primero proyectamos ortogonalmente, algunos puntos de la superficie, sobre el plano de elección. La ecuación de la proyección de las curvas entre estos puntos se puede determinar usando las ecuaciones de las superficies de cuya intersección ellas son producto.

Ejemplo 3.53

Consideremos la superficie $S: \ x^2+z^2=4$ limitada por el plano de ecuación $x+y=5$, en el primer octante.

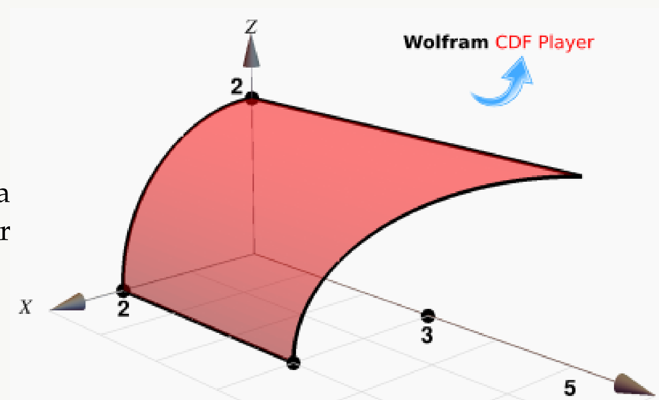


Figura 3.35: Superficie $S_1: \ x^2+z^2=4$

Usaremos los vértices $V_1=(2,0,0)$, $V_2=(2,3,0)$, $V_3=(0,5,2)$ y $V_4=(0,0,2)$

a.) **Proyección sobre el plano XY.** La proyección de los vértices es sobre sus coordenadas en el plano XY. La curva C se proyecta sobre la recta $x+y=5$ (la ecuación de un plano ortogonal al plano XY).

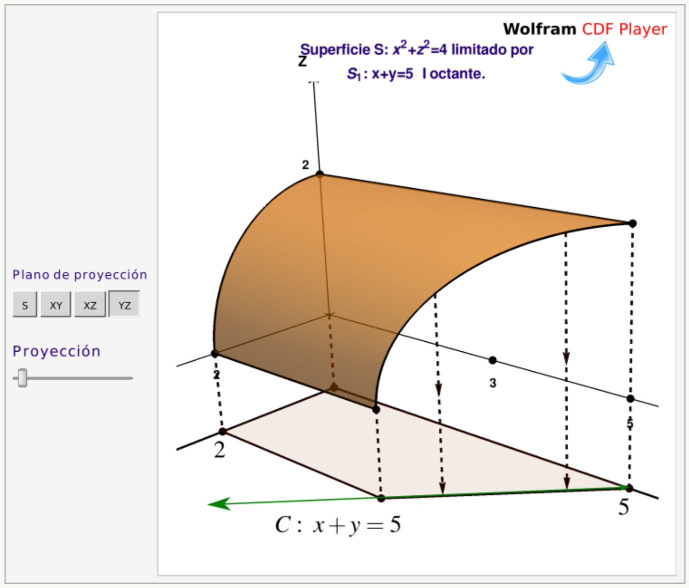


Figura 3.36: Proyección de la superficie S sobre el plano XY

b.) **Proyección sobre el plano** YZ. La proyección de los vértices es sobre sus coordenadas en el plano YZ. La curva C se proyecta sobre la curva C'. Para determinar la ecuación de C', usamos el hecho de que esta curva es la proyección de la curva de intersección entre $S:\ x^2+z^2=4$ y el plano de ecuación $x+y=5$. Como la curva está en el plano YZ, debemos "eliminar" la variable x: Despejamos en una ecuación y sustituimos en la otra.

$$x^2+z^2=4 \ \cap \ x+y=5 \implies C' : (5-y)^2+z^2=4$$

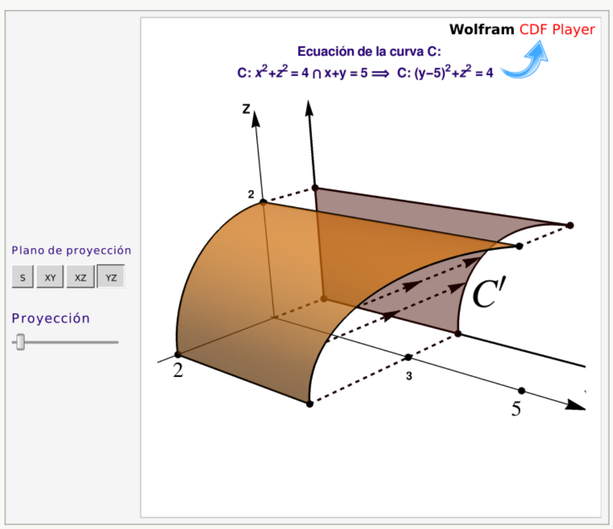


Figura 3.37: Proyección de la superficie S sobre el plano YZ

c.) **Proyección sobre el plano** XZ. La superficie $S:\ x^2+z^2=4$ es un cilindro, su proyección sobre este plano es la curva que le dio origen (no una región).

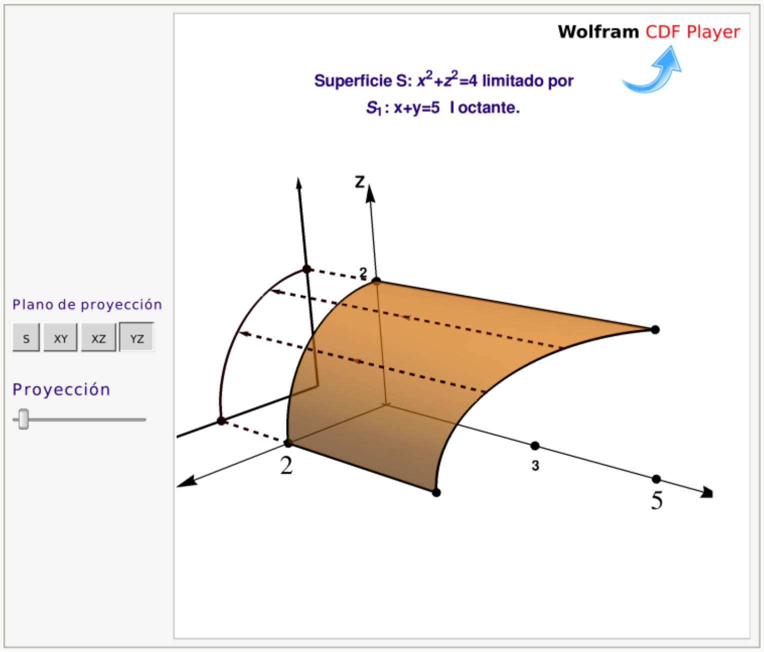


Figura 3.38: Proyección de la superficie S sobre el plano XZ

Proyección de un sólido.

En el caso de sólidos simples, la proyección se determina proyectando las superficies (posiblemente no todas) que lo limitan.

Ejemplo 3.54

Consideremos el sólido Q limitado por la superficie $S_1:\ x^2+z^2=4$ y los planos ecuación $S_2:\ x+y=5$, $S_3:\ z=0$, $S_4:\ z=2$ y $S_5:\ y=0$; como se muestra en la figura que sigue.

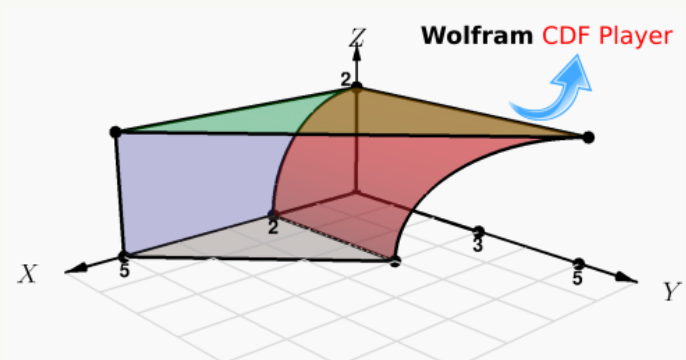


Figura 3.39: Sólido Q

Para proyectar el sólido podríamos usar los vértices $V_1=(5,0,0)$, $V_2=(2,0,0)$, $V_3=(2,3,0)$, $V_4=(0,5,2)$, $(0,0,2)$ y $(5,0,2)$.

a.) **Proyección sobre el plano XY.** La proyección de los vértices es sobre sus coordenadas en el plano

XY. La curva C se proyecta sobre la recta $x+y=5$ (la ecuación de un plano ortogonal al plano XY).

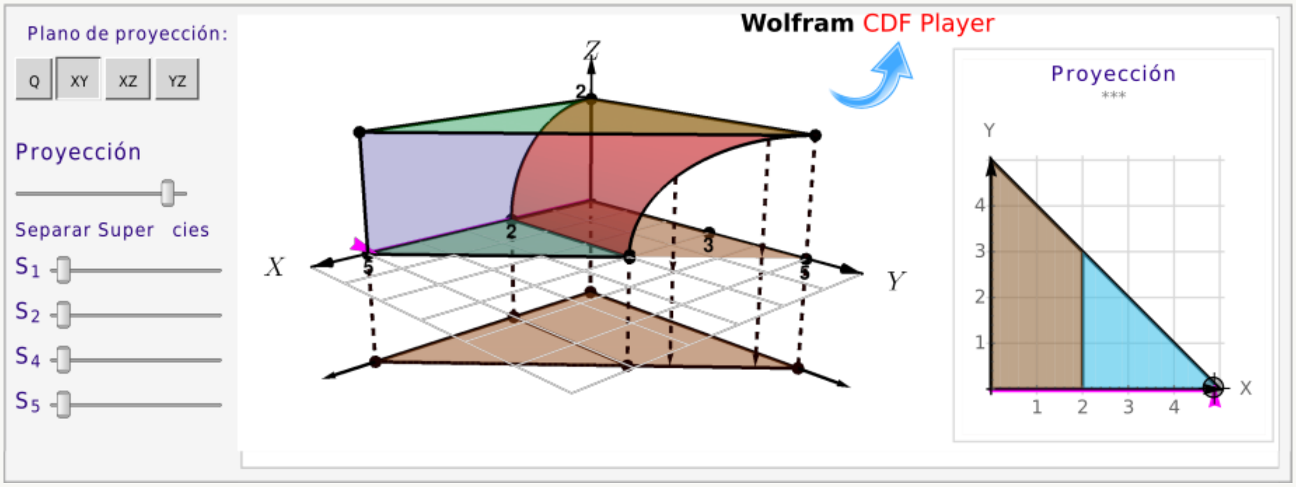


Figura 3.40: Proyección del sólido Q sobre el plano XY

b.) **Proyección sobre el plano YZ.** La proyección de los vértices es sobre sus coordenadas en el plano YZ. La curva C se proyecta sobre la curva C'. Para determinar la ecuación de C', usamos el hecho de que esta curva es la proyección de la curva de intersección entre $S:\ x^2+z^2=4$ y el plano de ecuación $x+y=5$.

Como la curva está en el plano YZ, debemos "eliminar" la variable x: Despejamos en una ecuación y sustituimos en la otra.

$$x^2+z^2=4 \ \cap \ x+y=5 \implies C':(5-y)^2+z^2=4 \quad \text{o} \quad y=5-\sqrt{4-z^2}$$

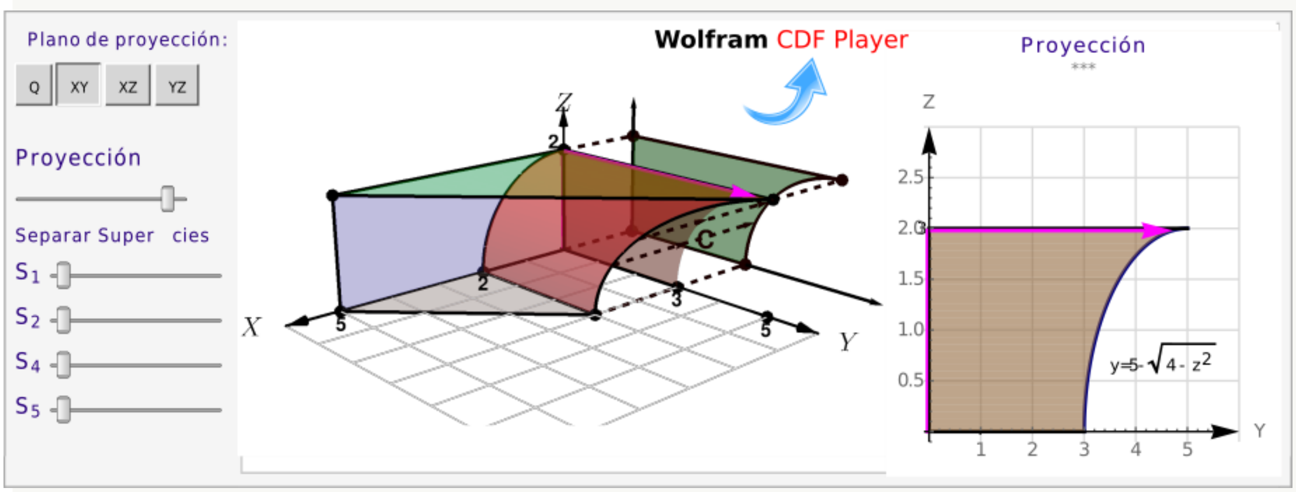


Figura 3.41: Proyección del sólido Q sobre el plano YZ

c.) **Proyección sobre el plano XZ.** La superficie $S:\ x^2+z^2=4$ es un cilindro, su proyección sobre este plano es la curva que le dio origen. El plano $z=2$ proyecta sobre la recta $z=2$ en el plano $y=0$.

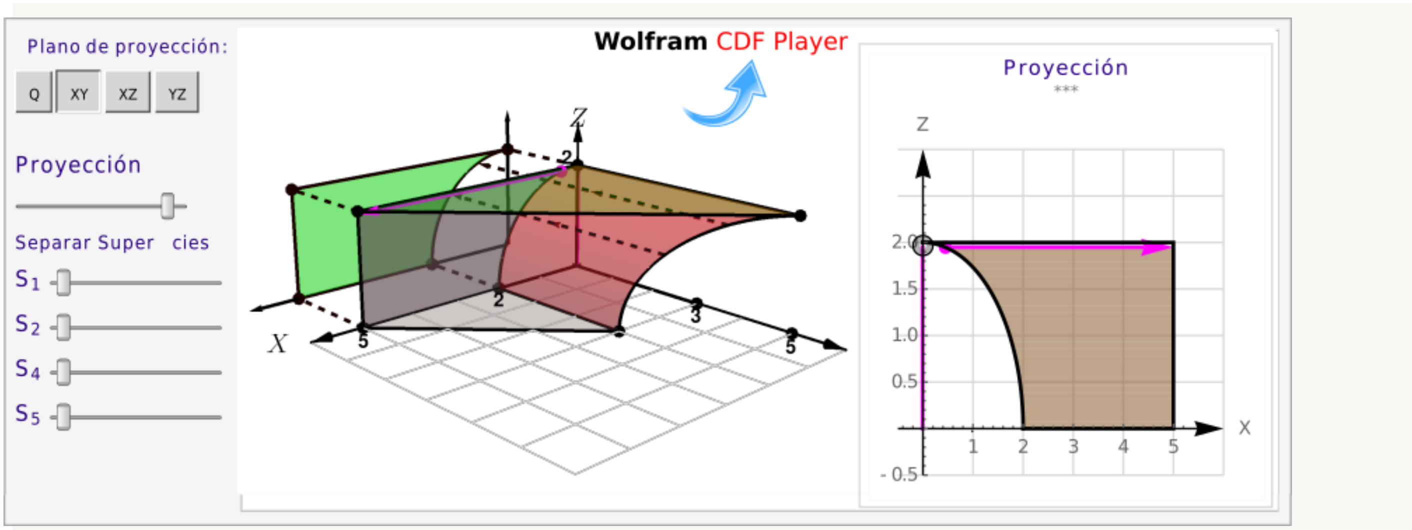
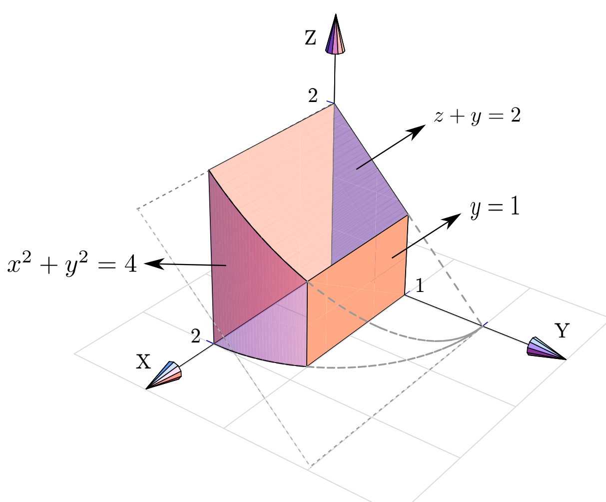


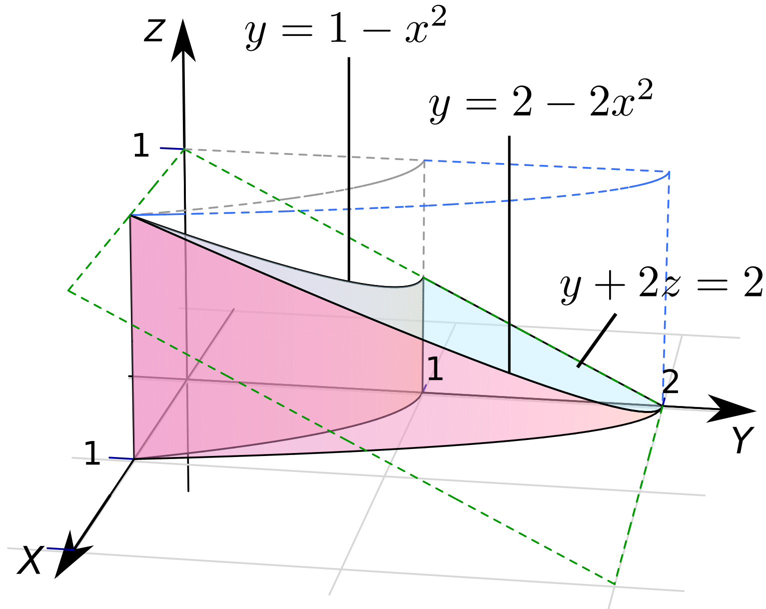
Figura 3.42: Proyección del sólido Q sobre el plano XZ

Ejercicios

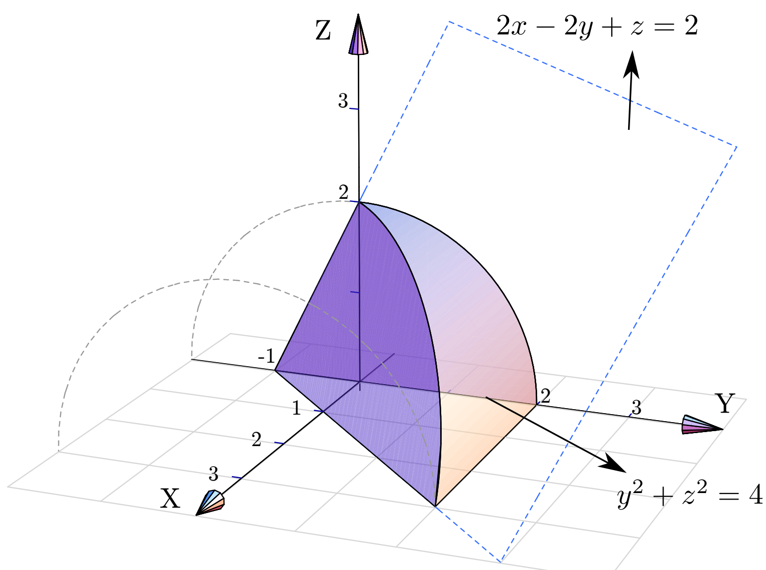
3.6.1 Dibujar las proyecciones del sólido Q si este sólido está limitado por $x^2 + y^2 = 4$; $z + y = 2$; $y = 1$; $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$, en el I octante

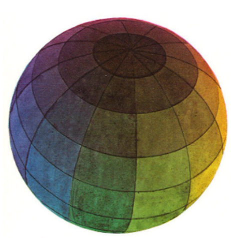


3.6.2 Dibujar las proyecciones del sólido Q si este sólido está limitado por las superficies $y = 2 - 2x^2$; $y = 1 - x^2$; $y + 2z = 2$; $x = 0$ y $z = 0$; en el I octante.



3.6.3 Dibujar las proyecciones del sólido Q si este sólido está limitado por la superficie $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $2x - 2y + z = 2$; $x = 0$ y $z = 0$.





Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

4 — Parametrización y Funciones Vectoriales

4.1 Trayectorias y parametrizaciones

Desde el punto de vista de la física, el movimiento de una partícula en el espacio se puede describir por su posición (x,y,z) en función del tiempo t, es decir, $(x(t),y(t),z(t))$. El vector posición en el tiempo t se denota $\mathbf{r}(t)$,

$\mathbf{r}(t) = (\,x(t),\, y(t),\, z(t)\,)$ o también $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\,\hat{\mathbf{\jmath}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$, donde $t \in [a,b]$

En el plano XY sería $\mathbf{r}(t) = (\,x(t),\, y(t)\,)$ o también $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\,\hat{\mathbf{\jmath}}$

La "función vectorial" $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se puede considerar como una trayectoria de una partícula en movimiento tanto como una curva, es decir, un objeto geométrico. En este último caso, el "parámetro" t ya no representa necesariamente "tiempo"

Definición 4.1 (Trayectoria. Parametrización de una curva).

Una *trayectoria* C en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Si la función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en $[a,b]$, entonces a la representación gráfica de $\mathbf{r}$ se le llama *curva* y decimos que esta curva esta descrita paramétricamente por $\mathbf{r}(t)$. Escribimos

$$C: \ \mathbf{r}(t) \quad \text{con} \quad t \in [a,b]$$

Observe que la parametrización $\mathbf{r}$ induce una orientación de C en el sentido de que la trayectoria inicia en $\mathbf{r}(a)$ y termina en $\mathbf{r}(b)$. Algunas trayectorias ya tienen su propia orientación y la parametrización $\mathbf{r}$ puede ser que respete o no respete esta orientación. Por supuesto, una curva C puede tener varias parametrizaciones.

Ejemplo 4.1

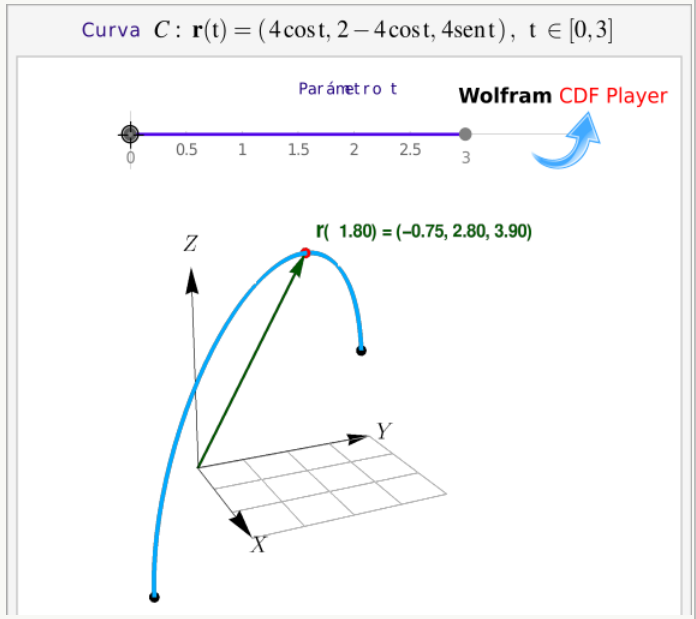
Consideremos la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = (\,4\cos t,\, 2-4\cos t,\, 4\,\text{sen}\, t\,)\; t\in\;[0,3]$$

Observe que,

$$\mathbf{r}(0) = (\,4\cos 0,\, 2-4\cos 0,\, 4\,\text{sen}\, 0\,) \;=\; (4,-2,0)$$

$$\mathbf{r}(\pi/2) \;=\; (0,2,4)$$

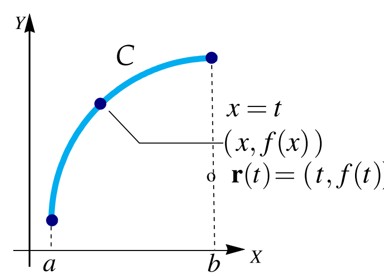


Parametrización de curvas en $\mathbb{R}^2$

No siempre es fácil encontrar una parametrización de una curva en $\mathbb{R}^2$. Veamos algunos casos sencillos.

Funciones. Si $C\;:\;\; y \;=\; f(x)$ con $x \in [a,b]$, entonces podríamos tomar como parámetro a $x=t$, una parametrización puede ser

$$C:\; \mathbf{r}(t) = (t,\; f(t)) \quad \text{con} \quad t\in[a,b]$$



- Los segmentos $y=k$ se parametrizan como $C:\; \mathbf{r}(t) = (t,\; k)$ con $t\in[a,b]$
- Los segmentos $x=k$ se parametrizan como $C:\; \mathbf{r}(t) = (k,\; t)$ con $t\in[a,b]$

Elipses y circunferencias. Estas curvas se pueden parametrizar usando coordenadas polares.

- Una circunferencia de radio a, centrada en el origen, se parametriza usando el ángulo θ como parámetro: $x = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\,\text{sen}\,\theta$.

  La circunferencia $C:\; x^2+y^2=a^2$ se puede parametrizar como

  $$C:\; \mathbf{r}(t) = (a\cos t,\; a\,\text{sen}\, t) \quad \text{con} \quad t\in[0,2\pi]$$

  Si el centro está en (h,k) entonces se hace una traslación: Si $(x,y)\in C:\;\; x^2+y^2 = a^2$ entonces $(x,y)+(h,k)\in C_1:\; (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

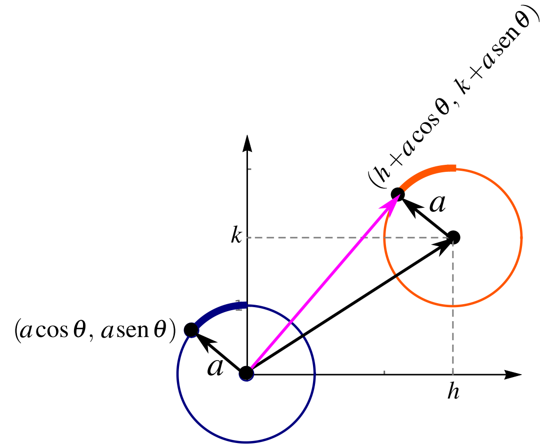


Figura 4.1: Una parametrización de la circunferencia

La circunferencia $C:\ (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ se puede parametrizar como

$$C:\ \mathbf{r}(t)=(h+a\cos t,\ k+a\,\mathrm{sen}\,t)\quad \text{con}\quad t\in[0,2\pi]$$

- La elipse $C:\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se puede parametrizar como

$$C:\ \mathbf{r}(t)=(h+a\cos t,\ k+b\,\mathrm{sen}\,t)\quad \text{con}\quad t\in[0,2\pi]$$

Curvas en coordenadas polares. Consideremos la curva $C:\ r=g(\theta)$ con $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$. Como

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\cos\theta \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& g(\theta)\cos\theta \\ y &=& g(\theta)\cos\theta \end{array}\right.$$

entonces la curva C se puede parametrizar como $C:\ \mathbf{r}(\theta)=(g(\theta)\cos\theta,\ g(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)\quad \text{con}\quad \theta\in[\theta_1,\theta_2]$

Ejemplo 4.2

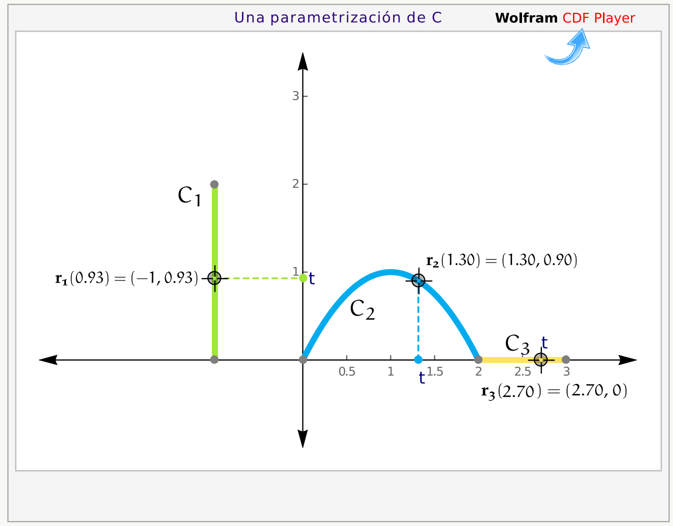
Determine una parametrización para las siguientes curvas: $\left\{\begin{array}{lll} C_1:\ x=-1 & \text{con} & y\in[0,2] \\ C_2:\ y=2x-x^2 & \text{con} & x\in[0,2] \\ C_3:\ y=0 & \text{con} & x\in[2,3] \end{array}\right.$

Solución: En C_1 podemos tomar $y=t$, en C_2 podemos tomar $x=t$ y en C_3 podemos tomar $x=t$.

$C_1: \ \mathbf{r}_1(t) = (-1,\, t) \quad$ con $\quad t \in [0,2]$

$C_2: \ \mathbf{r}_2(t) = (t,\, 2t - t^2) \quad$ con $\quad t \in [0,2]$

$C_3: \ \mathbf{r}_3(t) = (t,\, 0) \quad$ con $\quad t \in [2,3]$



Ejemplo 4.3

Determine una parametrización para las circunferencias

a.) $C_1: \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

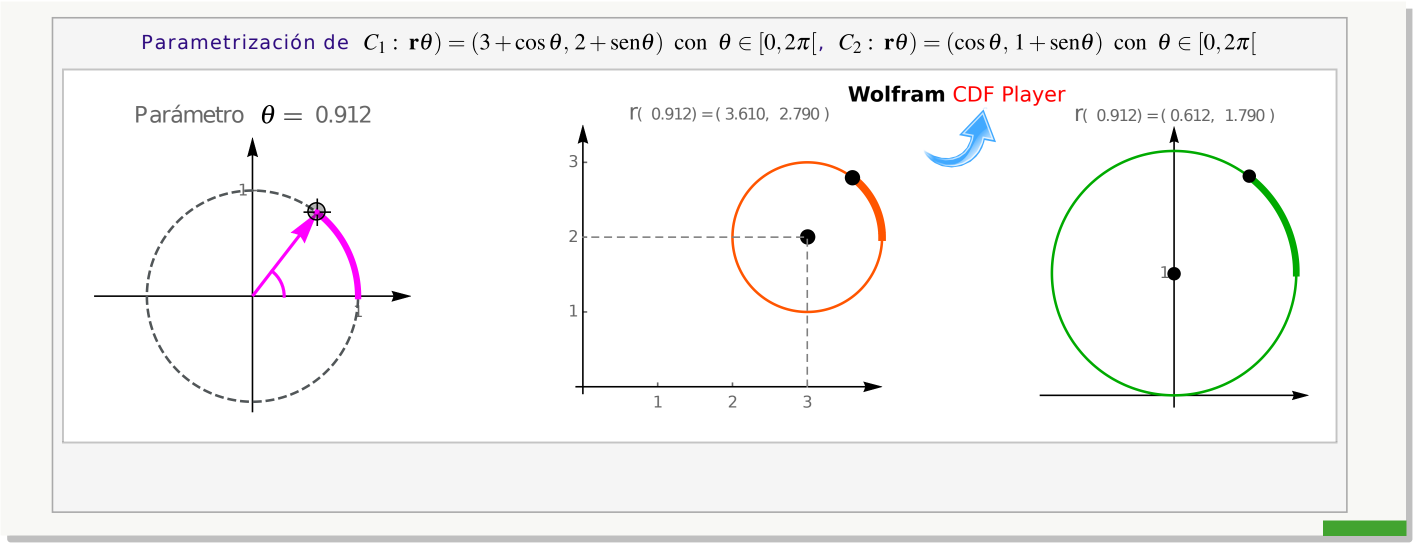
b.) $C_2: \ x^2 + (y-1)^2 = 1$

Solución: Como ambas curvas son circunferencias podemos usar como parámetro el ángulo θ, en coordenadas polares:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & h + a\cos\theta \\ & & \\ y & = & k + a\,\text{sen}\,\theta \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

Las parametrizaciones son

- $C_1: \ \mathbf{r}_1(\theta) = (3 + \cos\theta,\, 2 + \text{sen}\,\theta) \quad$ con $\quad \theta \in [0, 2\pi[$
- $C_2: \ \mathbf{r}_2(\theta) = (\cos\theta,\, 2 + \text{sen}\,\theta) \quad$ con $\quad \theta \in [0, 2\pi[$



N **Distintas parametrizaciones.** Si cambiamos de parametrización, probablemente cambie el recorrido del parámetro, en términos físicos el recorrido de la trayectoria puede ser más o menos rápida.

Por ejemplo, consideremos la circunferencia $C: \ x^2+(y-1)^2=1$.

- $C: \ x^2+(y-1)^2=1 \implies C: \ \mathbf{r}(\theta)=(\cos\theta,\, 2+\text{sen}\,\theta) \quad \text{con} \quad \theta \in \ [0,2\pi[$
- Como vimos en la sección de coordenadas polares, en el ejemplo 1.50,

  $C: \ x^2+(y-1)^2=1 \implies C: \ r=2\,\text{sen}\,\theta,\ \theta \in \ [0,\pi[\implies C: \ \mathbf{r}(\theta) = (2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta,\ 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta),\ \theta \in \ [0,\pi[$
- También podemos “acelerar” el recorrido de la circunferencia:

  $C: \ x^2+(y-1)^2=1 \implies C: \ \mathbf{r}(\theta)=(\cos 4\theta,\, 2+\text{sen}\,4\theta) \quad \text{con} \quad \theta \in \ [0,\pi/2[$

Parametrización de curvas en $\mathbb{R}^3$

Rectas en $\mathbb{R}^3$. Como ya vimos en la sección 1.8 si la recta L pasa por P en dirección de $\mathbf{v}$ entonces una parametrización es

$$L: \ \mathbf{r}(t) \ = \ P+t\vec{v},\ t\in\mathbb{R}$$

El segmento de recta C que inicia e A y termina en B se puede parametrizar como

$$C: \mathbf{r}(t) \ = \ A+t\cdot(B-A),\ t\in \ [0,1]$$

En este caso, $\mathbf{r}(0)=A$ y $\mathbf{r}(1)=B$

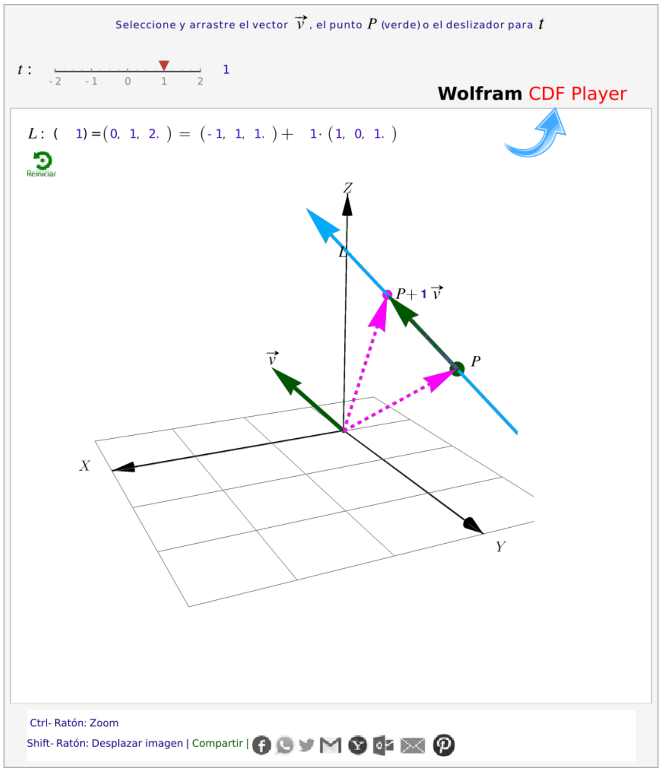


Figura 4.2: $L:\ \mathbf{r}(t) = P + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}$

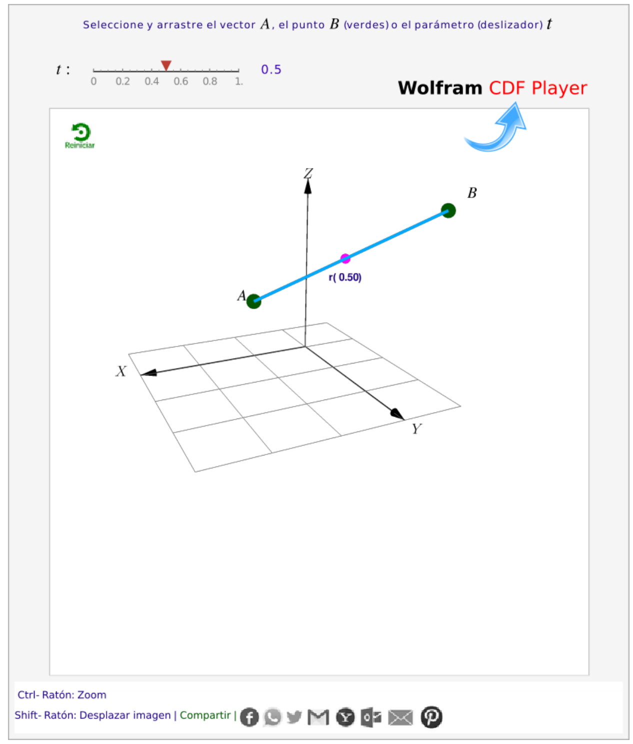


Figura 4.3: $C : \mathbf{r}(t) = A + t\cdot(B - A),\ t \in [0,1]$

(N) Los segmentos paralelos a los ejes es mejor parametrizarlos usando $x = t,\ y = t$ o $z = t,$ según corresponda.

Ejemplo 4.4

Determine una parametrización para $C = C_1 + C_2 + C_3$ de la figura adjunta.

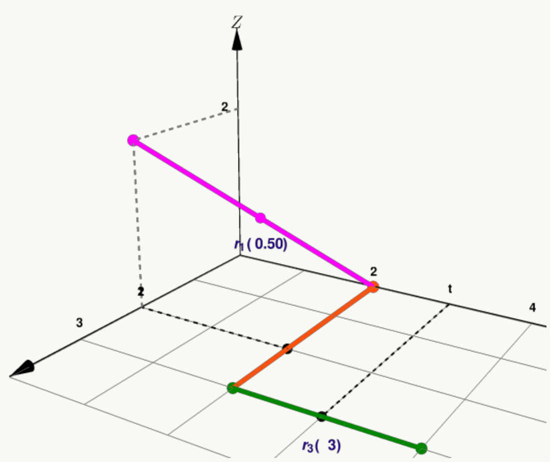
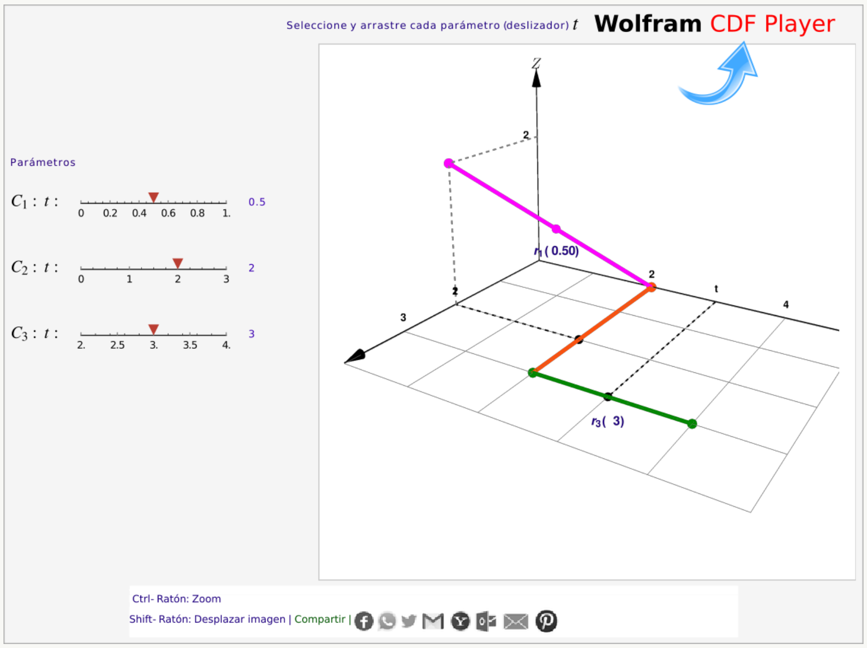


Figura 4.4: Curva $C = C_1 + C_2 + C_3$

Solución: El segmento C_1 lo parametrizamos con la fórmula $\mathbf{r}_1(t) = A + t\cdot(B - A),\ t \in [0,1]$. Para el segmento C_2 podemos usar $x = t$ como parámetro y para el segmento C_3 podemos usar $y = t$ como parámetro.

$$C: \begin{cases} C_1: \ \mathbf{r}_1(t) = (2,0,2) + t \cdot [(0,2,0) - (2,0,2)] = (2-2t)\ \hat{\mathbf{\imath}} + 2t\,\hat{\mathbf{\jmath}} + (2-2t)\,\hat{\mathbf{k}}, \quad t \in [0,1] \\ C_2: \ \mathbf{r}_2(t) = t\ \hat{\mathbf{\imath}} + 2\,\hat{\mathbf{\jmath}}, \quad t \in [0,3] \\ C_3: \ \mathbf{r}_3(t) = 3\ \hat{\mathbf{\imath}} + t\,\hat{\mathbf{\jmath}}, \quad t \in [2,4] \end{cases}$$



Curvas en $\mathbb{R}^3$. Algunas curvas en $\mathbb{R}^3$ se pueden parametrizar usando como parámetro $x = t,\ y = t$ o $z = t$. También a veces se podría usar coordenadas polares. Si las curvas se obtienen como intersección de superficies, con la ecuación de estas superficies que se puede deducir una parametrización.

Ejemplo 4.5

Determine una parametrización para la curva $C = C_1 + C_2 + C_3$ que se muestra en la figura. $C_1: \ x^2 + (z-1)^2 = 1;\ y = 0$ y C_3 es el trozo de curva de intersección entre las superficies $S_1: \ x^2 + (z-1)^2 = 1$ y $S_2: \ x + y = 2$. C_2 es el segmento de recta que se indica en la figura.

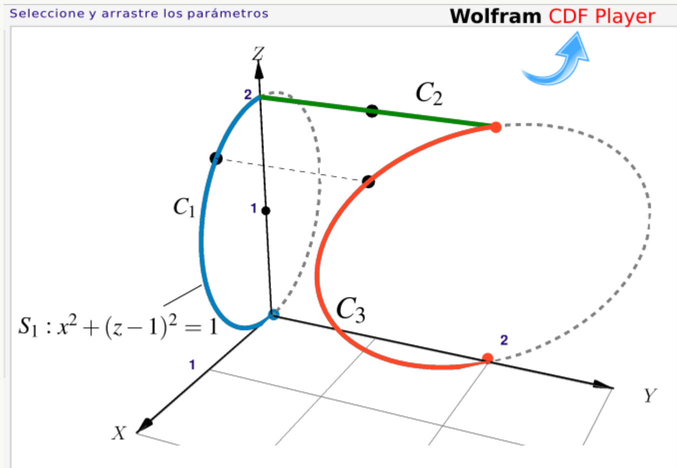


Figura 4.5: Curva $C = C_1 + C_2 + C_3$

Solución:

- Una manera de parametrizar C_2 es usando $y = t$ como parámetro:

$$C_2 : \ \mathbf{r}_3(t) = (0, t, 2), \ t \in [0, 2]$$

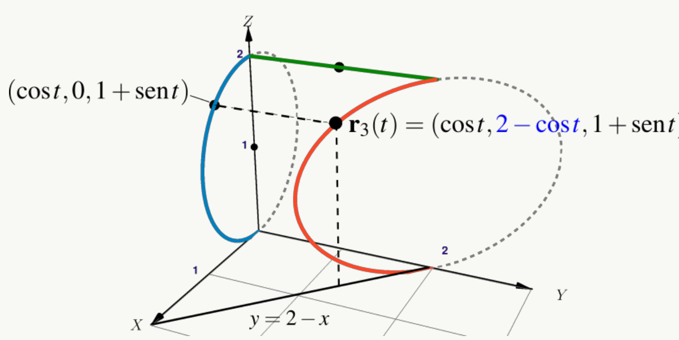
- Hay varias maneras de parametrizar $C_1 : \ x^2 + (z-1)^2 = 1; \ y = 0,$

$$C_1 : \ \mathbf{r}_1(t) = (\cos t, 0, 1 + \operatorname{sen} t), \ t \in [-\pi/2, \pi/2[$$

Observe que efectivamente $\mathbf{r}_1(-\pi/2) = (0,0,0)$ y $\mathbf{r}_1(\pi/2) = (0,0,2)$.

También $C_1 : \ \mathbf{r}_1(\theta) = (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, 0, 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta), \ \theta \in [0, \pi/2[$ pues $C_1 : \ r = 2 \operatorname{sen} \theta, \ \theta \in [0, \pi/2]$

- Para parametrizar C_3 podemos usar sus coordenadas $(\cos t, 0, 1 + \operatorname{sen} t)$ en el plano XZ y entonces $y = 2 - x = 2 - \cos t$



$$C_3 : \ \mathbf{r}_3(t) = (\cos t, 2 - \cos t, 1 + \operatorname{sen} t), \ t \in [0, \pi[$$

También podemos usar como prámetro a $z = t$, entonces $x = \sqrt{1 - (z-1)^2}$ y $y = 2 - x = 2 - \sqrt{1 - (z-1)^2}$,

$$C_3 : \ \mathbf{r}_3(t) = \sqrt{1 - (t-1)^2} \ \hat{\imath} + (2 - \sqrt{1 - (t-1)^2})\, \hat{\jmath} + t\, \hat{\mathbf{k}}, \ \ t \in [0, 2]$$

4.2 Derivada de $\mathbf{r}(t)$

Vector velocidad. Sea C es una trayectoria continua parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. En en el intervalo de tiempo que va de t a $t + \Delta t$, una partícula que recorre C, se mueve de la posición $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ y la velocidad promedio es

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Si la velocidad promedio tiene un límite, cuando $\Delta t \to 0$, entonces este límite lo llamamos la *velocidad* (instantánea) de la partícula en el tiempo t y se denota $\mathbf{v}(\mathbf{t})$.

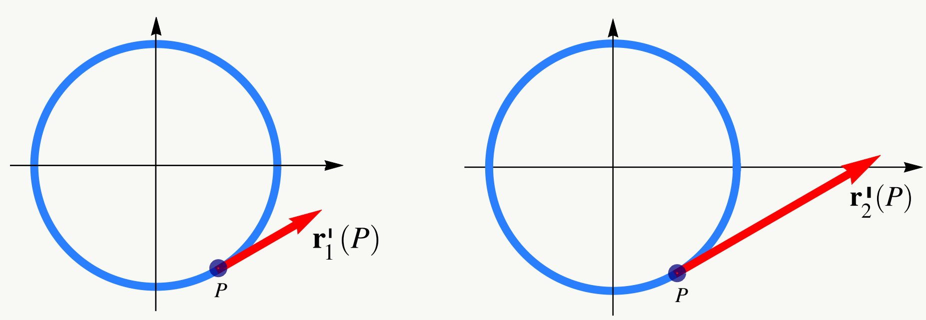
$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

El vector veclocidad es tangente a C en $\mathbf{r}(t)$ y apunta en la dirección del movimiento. La longitud de $\mathbf{v}(t)$, denota $v(t) = ||\mathbf{v}(t)||$, se llama *rapidez* de la partícula.

Ejemplo 4.6

Consideremos la circunferencia $C: \; x^2 + y^2 = 1$. Esta trayectoria puede ser recorrida en diferentes velocidades:

- Si $C: \; \mathbf{r}_1(t) = \cos t\, \hat{\imath} + \operatorname{sen} t\, \hat{\jmath},\; t \in [0, 2\pi] \implies \mathbf{v}(t) = -\operatorname{sen} t\, \hat{\imath} + \cos t\, \hat{\jmath}$ y $||\mathbf{v}(t)|| = 1 \;\; \forall\, t \in [0, 2\pi]$
- Si $C: \; \mathbf{r}_2(t) = \cos 2t\, \hat{\imath} + \operatorname{sen} 2t\, \hat{\jmath},\; t \in [0, \pi] \implies \mathbf{v}(t) = -2\operatorname{sen} 2t\, \hat{\imath} + 2\cos 2t\, \hat{\jmath}$ y $||\mathbf{v}(t)|| = 2$ $\forall\, t \in [0, 2\pi]$



Definición 4.2

Sea C es una curva parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$. Decimos que $\mathbf{r}$ es *diferenciable* en t si

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{existe}$$

La curva C se dice *suave* en I si $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ es continua, y no se anula, en todo I

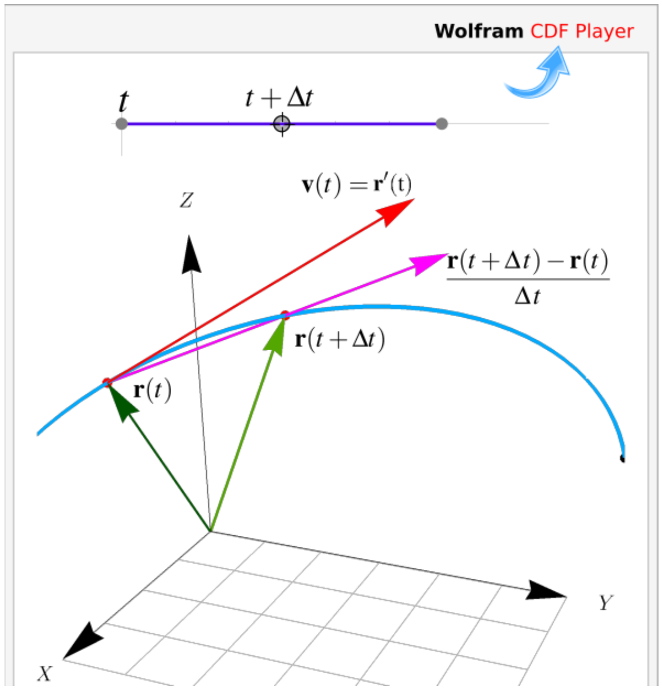


Figura 4.6: Vector velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

Casos particulares.

a.) Si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones derivables en I y si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}} \\
&= x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Es decir $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}}$

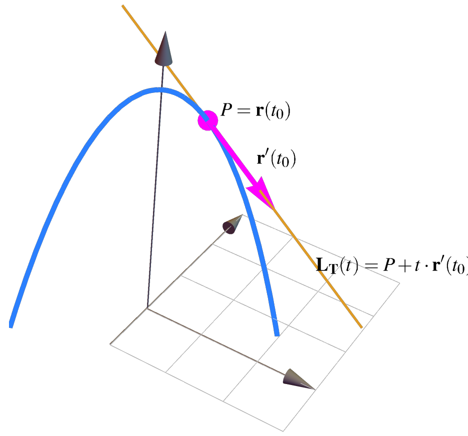
b.) Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones derivables en I y si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{k}} \\
&= x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Es decir $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}$

Si $C: \mathbf{r}(t)$ es una *curva suave*, entonces el vector $\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en cada punto $P = \mathbf{r}(t_0)$. Además, una ecuación de la recta tangente a la curva en P es

$$\mathbf{L_T}(t) = P + t \cdot \mathbf{r}'(t_0)$$



Ejemplo 4.7

Consideremos la curva C de intersección entre la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $x + y = 2$. Una parametrización de C es

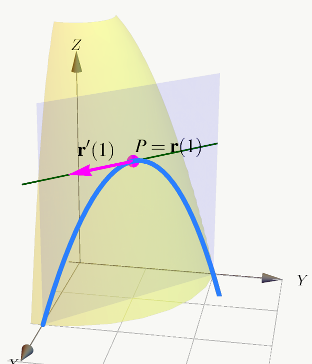
$$C: \ r(t) = (t, \ 2-t, \ 4-t^2-(2-t)^2)$$

El punto $P = \mathbf{r}(1) = (1,1,2)$ está en esta curva. Un vector tangente a C en P es

$\mathbf{r}'(1) = (1,-1,0)$

Una ecuación de la recta tangente a la curva en P es

$\mathbf{L_T}(t) = P + t \cdot \mathbf{r}'(t_0)$



Ejemplo 4.8

Consideremos la curva

$C:\ \mathbf{r}(t) = 4\cos t\ \hat{\imath} + (2 - 4\cos t)\,\hat{\jmath} + 4\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{k}},\ t \in [0,3]$

Tenemos,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -4\,\text{sen}\,t\ \hat{\imath} + 4\,\text{sen}\,t\,\hat{\jmath} + 4\cos t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a C en $P = \mathbf{r}(t)$.

También, la curva C es suave pues $\mathbf{r}$ es diferenciable y no se anula en $[0,3]$

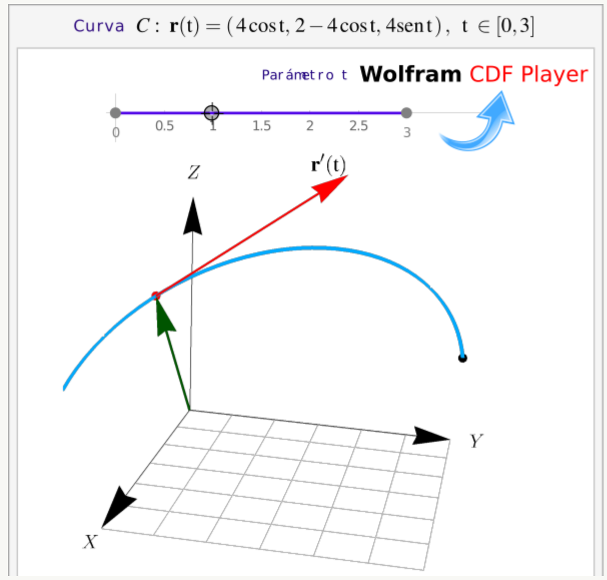


Figura 4.7: El vector $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (trasladado) es un vector tangente a C en $P = \mathbf{r}(t)$

Recta tangente en la dirección de un vector. La recta tangente a S en $P = (p_0, p_1, p_3) \in S$, en la dirección de $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$ se refiere a la recta tangente en P, a la curva C de intersección entre la superficie S y el plano generado por la recta $\mathbf{L}(t) = (p_0, p_1, 0) + t\cdot(v_0, v_1, 0)$. Si $S:\ z = f(x,y)$, entonces una parametrización de esta curva es

$$C:\ \mathbf{r}(t) = (p_0 + t\,v_0,\ p_1 + t\,v_1, f(p_0 + t\,v_0,\ p_1 + t\,v_1))$$

Como $P = \mathbf{r}(0)$, un vector tangente es

$$\mathbf{r}'(0) = \left(v_0,\ v_1,\ \frac{d}{dt}\,f(p_0 + t\,v_0,\ p_1 + t\,v_1)\Big|_{t=0}\right)$$

y una ecuación de la recta tangente "en la dirección de $\mathbf{v}$" sería

$$\mathbf{L_T}(t) = P + t\cdot\mathbf{r}'(0)$$

Ejemplo 4.9

Consideremos la superficie $S:\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Sea la recta (en el plano XY)

$$L(t) = (x_0, y_0, 0) + t\cdot(v_1, v_2, 0) = (x_0 + t\,v_1,\ y_0 + t\,v_2, 0)$$

Esta recta L genera un plano Π (perpendicular al plano XY) que interseca a la superficie S. Una ecuación paramétrica de la curva C_P de intersección es

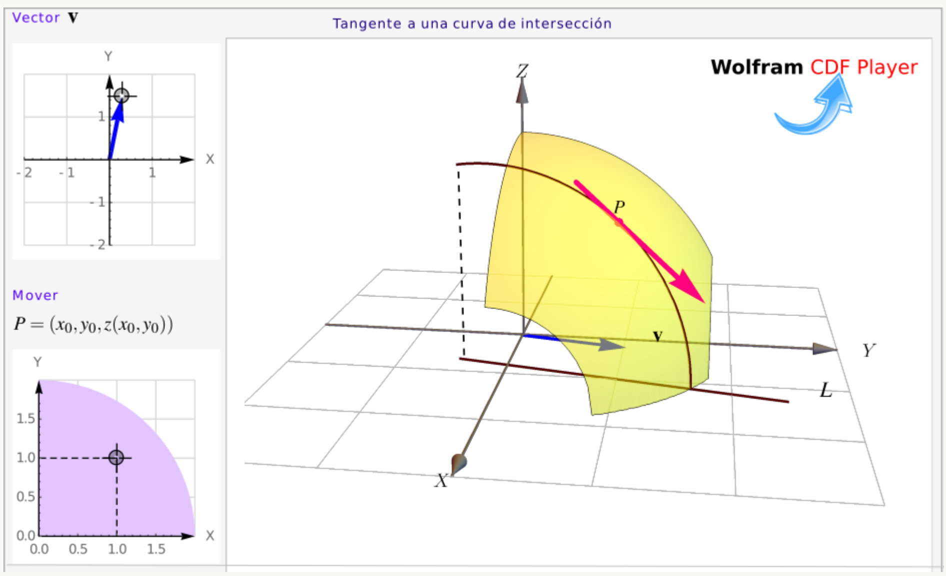
$$C_P:\ \mathbf{r}(t) = \left(x_0 + t\,v_1,\ y_0 + t\,v_2,\ \sqrt{4 - (x_0 + t\,v_1)^2 - (y_0 + t\,v_2)^2}\right)$$

Entonces,

$$\mathbf{r}'(t) = \left(v_1,\ v_2,\ \frac{-(x_0 + tv_1)v_1 - (y_0 + t\,v_2)v_2}{\sqrt{4 - (x_0 + t\,v_1)^2 - (y_0 + t\,v_2)^2}}\right)$$

En particular, un vector tangente a la curva C_P en $P = (x_0, y_0, z_0)$ es $\mathbf{r}'(0)$ (pues $P = \mathbf{r}(0)$) y una parametrización de la recta tangente a C_P en P es $L_T(t) = P + t\cdot\mathbf{r}'(0),\ \ t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}'(0) = \left(v_1,\ v_2,\ \frac{-x_0v_1 - y_0v_2}{\sqrt{4 - x_0^2 - y_0^2}}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{||\mathbf{r}'(0)||}$$



Observe que si $P = \mathbf{r}(0)$, el vector $\mathbf{r}'(0)$ es tangente a S "en la dirección del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$"

Reglas de derivación

En el siguiente teorema se enuncian las reglas de derivación para funciones vectoriales.

Teorema 4.1

Sean $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ funciones vectoriales diferenciales y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable. Entonces,

a.) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

b.) $\dfrac{d}{dt}\left(f(t)\,\mathbf{u}(t)\right) = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$

c.) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

d.) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

e.) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}[f(t)]\right) = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

f.) $\dfrac{d}{dt}\left(||\mathbf{u}(t)||\right) = \dfrac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{||\mathbf{u}(t)||}$ si $\mathbf{u}(t)\neq\mathbf{0}$

Movimiento circular

La velocidad angular es una medida de la velocidad de rotación. Se define como el ángulo girado en una unidad de tiempo y se designa mediante la letra griega Ω. Su unidad en el Sistema Internacional es el radián por segundo (rad/s). La *rapidez angular* Ω de un cuerpo en rotación es su tasa de rotación medida en radianes por unidad de tiempo. Por ejemplo, una lámpara de un faro que gira a una velocidad de tres revoluciones por minuto, tiene una rapidez angular de $\Omega = 6\pi$ radianes por minuto. Es útil representar la tasa de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje en términos de un vector de *velocidad angular* en lugar de sólo un escalar que nos dé la rapidez angular. El vector de velocidad angular ˙ apunta en la dirección del eje de rotación el vector velocidad angular es un vector que es perpendicular al plano de rotación) y su magnitud nos da la tasa de cambio del ángulo de rotación del cuerpo por unidad de tiempo y la su orientación especifica el sentido de la rotación.

Si el origen de coordenadas está en el eje de rotación y si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición en el instante t, en un punto P del cuerpo en rotación, entonces P se mueve a lo largo de una circunferencia de radio $a = ||\mathbf{r}(t)||\,\mathrm{sen}\,\theta$ donde θ es el ángulo entre ˙ y $\mathbf{r}(t)$.

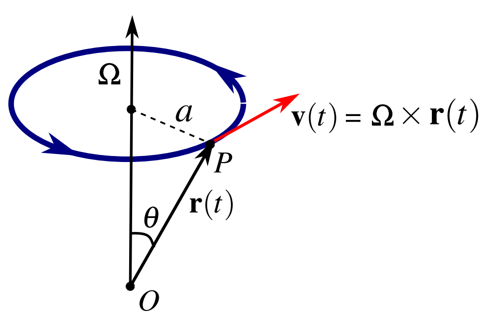


Figura 4.8: Rotación de P con velocidad angular $\mathbf{v}(t) = \dot{} \times \mathbf{r}(t)$

Entonces P viaja una distancia de $2\pi a$ en un tiempo de $2\pi/\Omega$ y su rapidez lineal es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi a}{2\pi/\Omega} = \Omega a = ||\dot{}||\,||\mathbf{r}(t)||\,\mathrm{sen}\,\theta = ||\dot{}\times\mathbf{r}(t)||$$

Como la dirección de ˙ fue definida de tal manera que $\dot{}\times\mathbf{r}(t)$ apunte en dirección del movimiento de P, entonces la velocidad lineal de P en el instante t es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = \dot{} \times \mathbf{r}(t)$$

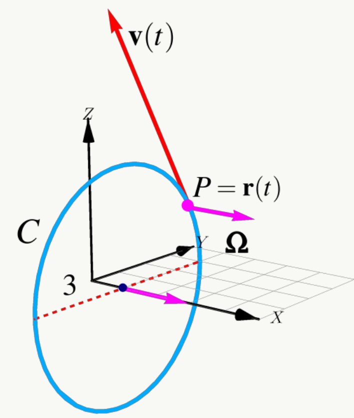
Ejemplo 4.10

Este ejemplo es solo ilustrativo y no indica cómo hacer los cálculos. Supongamos que una partícula se mueve sobre la trayectoria

$$C: \ \mathbf{r}(t) = \ \hat{\imath} + 3\cos(2t)\,\hat{\jmath} + 3\,\mathrm{sen}(2t)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -6\,\mathrm{sen}(2t)\,\hat{\jmath} + 6\cos(2t)\,\hat{\mathbf{k}} = \dot{} \times \mathbf{r}(t)$$

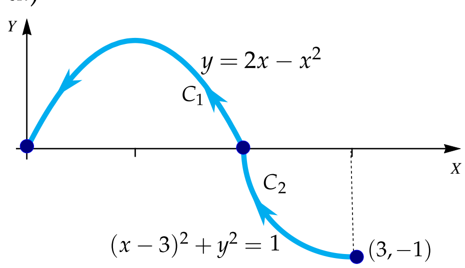
Entonces la velocidad angular es $\dot{} = 2\,\hat{\imath}$ y el movimiento es contra-reloj alrededor del eje X. La rapidez angular es $\Omega = 2$



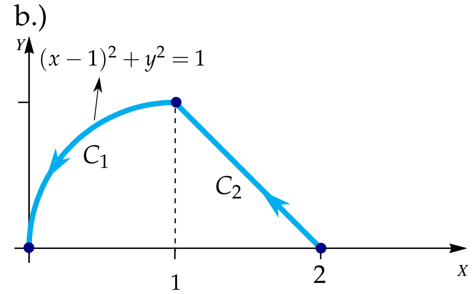
Ejercicios

4.2.1 Determine una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

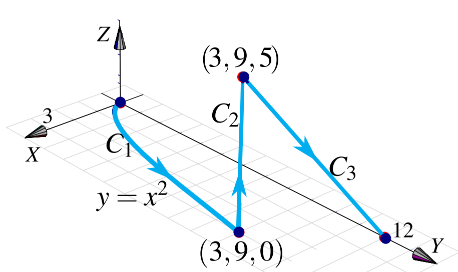
a.)



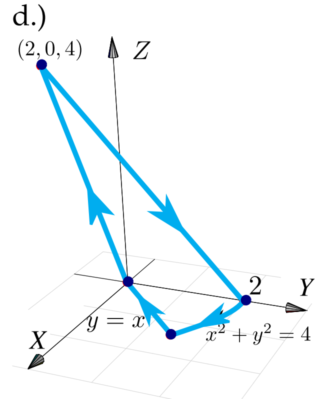
b.)



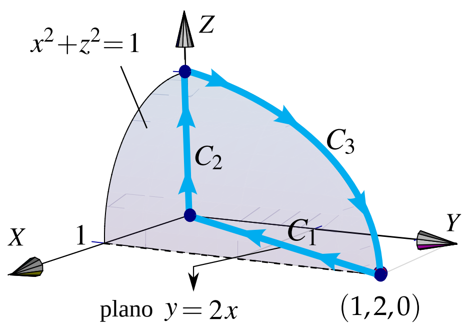
c.)



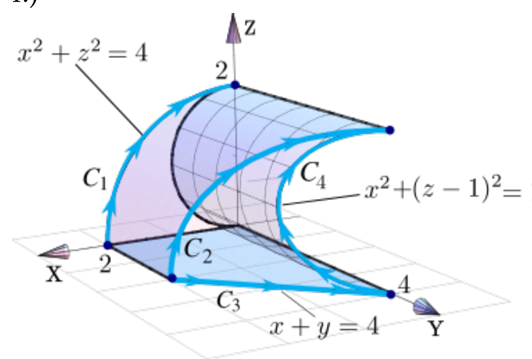
d.)



e.)



f.)



4.2.2 Determine una ecuación vectorial de la recta tangente a C en P, en cada caso.

a.) C es la curva de intersección entre el plano $y+z=2$ y la superficie $S:\ z=x+y^2$ y $P=(-2,0,2)$

b.) C es la curva de intersección entre el plano $x+y=1$ y la superficie $S:\ x^2+y+z=1$ y $P=(2,-1,-2)$

5 — Derivadas Parciales

5.1 Límites de funciones de varias variables.

Como en cálculo en una variable, algunos teoremas los podemos aplicar bajo ciertas hipótesis de continuidad de las derivadas. Esta sección solo es de interés para enunciar de manera correcta algunos teoremas sobre derivadas de gran relevancia.

Conjuntos abiertos. Un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto en el que cada uno de sus elementos tienen un entorno V a su alrededor, contenido en U, es decir, para cada $c \in U$ existe $\delta > 0$ tal que el entorno $V_\delta(c) = \{u \in U : ||u - c|| < \delta\} \subseteq U$. Por ejemplo, los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ o los círculos *sin frontera* en $\mathbb{R}^2$ y las esferas *sin frontera* en $\mathbb{R}^3$, son conjuntos abiertos. Estos entornos V son necesarios para poder calcular límites en cualquier punto de U.

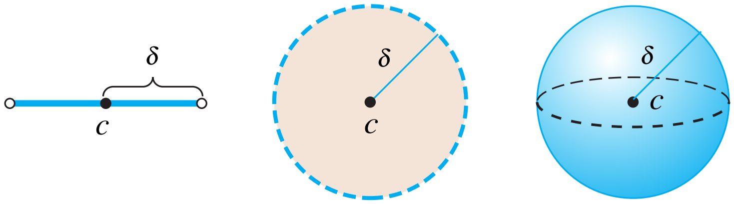


Figura 5.1: Entornos abiertos alrededor de c y de radio δ, en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (con la distancia euclidiana)

En una variable, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

La definición de un límite en varias variables es esencialmente la misma. Claro, en $\mathbb{R}$ la única manera de acercarse a x_0 es sobre una recta (el eje X). En $\mathbb{R}^2$ se pueden tomar muchos caminos para acercarse a un punto (x_0, y_0) e igualmente en más dimensiones. Esto hace que los límites en varias variables sean de más cuidado.

Definición 5.1 (Límite en varias variables).
Sean $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{x},\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ si y solo si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta_\epsilon \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon.$$

Ejemplo 5.1 (Límites por definición).

Verifique, usando la definición de límite, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2y^2 = 0.$

Solución: Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $\delta_\epsilon = \sqrt{\epsilon}$, entonces,

$$\begin{aligned}
0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta_\epsilon &\implies \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\epsilon} \\
&\implies x^2 + y^2 < \epsilon \\
&\implies 2x^2y^2 \leqslant x^2 + y^2 < \epsilon \quad \text{pues } (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 \geqslant 0 \\
&\implies |2x^2y^2 - 0| < \epsilon
\end{aligned}$$

5.2 Teoremas sobre límites

Los teoremas en una variable sobre límites de funciones constantes, funciones lineales, senos, cosenos, etc., así como límites de sumas, productos, cocientes, etc. siguen siendo válidos en varias variables. Pero, hay que recordar que estos teoremas se pueden aplicar si cada límite involucrado, existe.

Teorema 5.1 (Unicidad del límite).
Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe, entonces es único

En particular el teorema dice que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *no existe* si al calcular con diferentes caminos para acercarse a $\mathbf{x}_0$, obtenemos resultados distintos.

Ejemplo 5.2

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *no existe* pues se viola la unicidad del límite,
  - Si nos acercamos a $(0,0)$ sobre la recta $y = x$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$
  - Si nos acercamos a $(0,0)$ sobre la recta $y = 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{x^2} = 0$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ *no existe* pues se viola la unicidad del límite,
  - Si nos acercamos a $(0,0)$ sobre la recta $y = x$,
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+1} = 0$$
  - Si nos acercamos a $(0,0)$ sobre la parábola $y = x^2$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

Definición 5.2 (Continuidad)
Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. La función f es continua en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 5.2 (Continuidad. Cálculo de límites).
Sean $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *funciones continuas* en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \quad \text{y que} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B$$
entonces,

a.) $f \pm g$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f\pm g)(\mathbf{x}) = A \pm B$

b.) $f\cdot g$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f\cdot g)(\mathbf{x}) = A\cdot B$

c.) $\dfrac{f}{g}$ continua en $\mathbf{x}_0$ si $g(\mathbf{x}_0)\neq 0$ y $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f}{g}(\mathbf{x}) = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$

d.) Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $g(\mathbf{x}_0) = B$, entonces $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(g(\mathbf{x})) = h(B)$

e.) Si $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es continua para todo $\mathbf{x},\mathbf{y} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y si $f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}) \in D$, entonces $F[f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x})]$ es continua en D.

En particular, son continuos los polinomios $P(\mathbf{x})$ en varias variables y las fracciones racionales $\dfrac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}$ son continuas en $\mathbf{x}_0$ si $Q(\mathbf{x}_0)\neq 0$. Además si existe un conjunto abierto $V_{\mathbf{x}_0}$ en el que $\dfrac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = f(\mathbf{x})$ excepto talvez en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ entonces
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{P}{Q}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$$
El inciso d.) del teorema 5.2 nos dice que si g es continua en $\mathbf{x}$, entonces las funciones usuales del cálculo $\cos(g(\mathbf{x}))$, $\operatorname{sen}(g(\mathbf{x}))$, $\ln(g(\mathbf{x}))$, etc. son continuas si éstas son continuas en $g(\mathbf{x})$.

Ejemplo 5.3 (Cálculo usando teoremas de límites).

El teorema 5.2 nos permite calcular límites de manera directa.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2y^2 = 0$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y+xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{8}{5}$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) = \ln(1) = 0$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = 2$
- $$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}\cdot\frac{\sqrt{2x-y}+2}{\sqrt{2x-y}+2}\\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{2x-y-4}{(2x-y-4)\cdot(\sqrt{2x-y}+2)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ejercicios

5.2.1 Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{3x-y+z}{xy+z^2}$

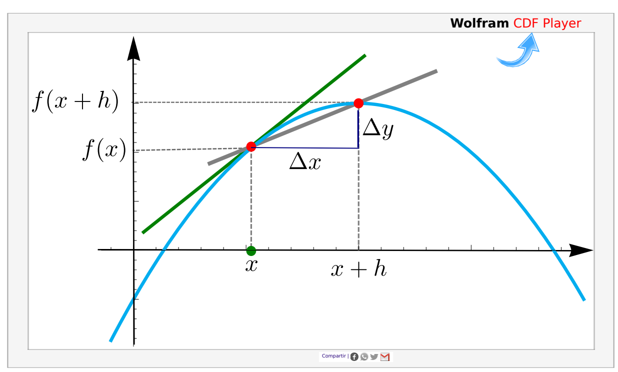
5.2.2 Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y}{(x-4)\,\text{sen}(\pi/2\ +\ y)}$

5.3 Derivada Direccional

La derivada de una función de una variable mide la tasa (instántanea) de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función $y = f(x)$ en x es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Geométricamente, la derivada de f en x es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(x, f(x))$



Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la derivada de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, mide la tasa (instántanea) de cambio de f a través de la recta $L(h) = \mathbf{x} + h\,\mathbf{v}$ cuando $h = 0$. El cambio en $\mathbf{x}$, en la recta L, es $||\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 - h\,\mathbf{v}|| = ||h\,\mathbf{v}|| = h$ (pues $\mathbf{v}$ es unitario). De nuevo, esta derivada en la dirección de $\mathbf{v}$ se obtiene como un límite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Observe que este límite es un límite de una función de una variable h, es decir, este límite es el tipo de límites que calculamos en cálculo en una variable.

Sea S la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ y $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$. Sea C la curva de intersección de la superficie S con el plano generado por la recta L (tal y como se muestra en la figura 5.2). Geométricamente, la derivada (direccional) de f en P (en la dirección de **v**) es la pendiente de la recta tangente a la *curva* C en P.

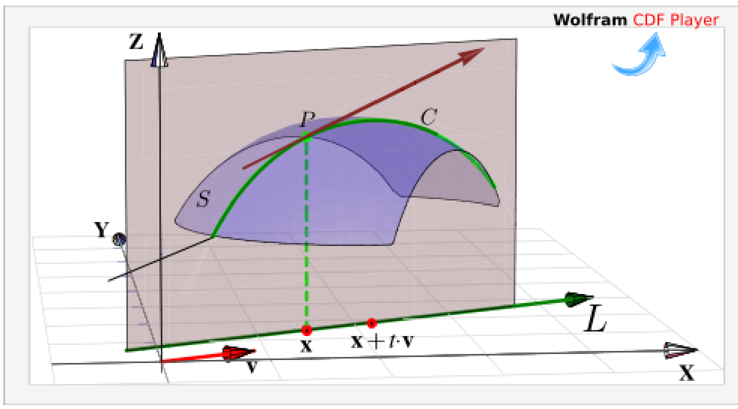


Figura 5.2: Derivada direccional en **x** la dirección de **v**

De particular interés son la derivada en la dirección del eje X, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, y la derivada en la dirección del eje Y, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; llamadas *derivadas parciales* respecto a x e y respectivamente.

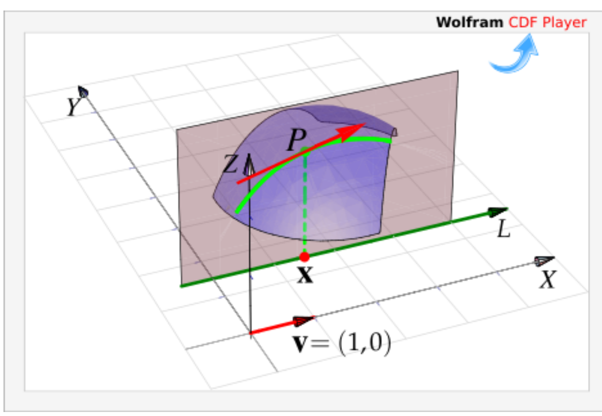


Figura 5.3: Derivada parcial en **x** en la dirección de X

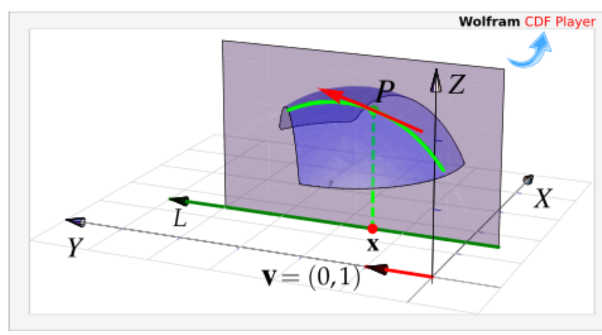


Figura 5.4: Derivada parcial en **x** en la dirección de Y

5.4 Derivadas parciales.

Definición 5.3 (Derivadas parciales).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la *derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f respecto a la variable x_i en el punto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + he_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Aquí $e_i = (0, ..., 1, ...0)$ con un 1 en la i—ésima posición. El dominio de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que este límite existe.

Caso de dos variables

Cuando $z = f(x, y)$, es común denotar las derivadas parciales con $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z_x o f_x. Según la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Es decir, para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ derivamos de manera ordinaria f respecto a x pensando en y como una constante y para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ derivamos de manera oridinaria f respecto a y pensando en x como una constante. Esto es válido siempre y cuando apliquen los teoremas de derivadas en una variable.

En tres o más variables, la situación es similar: Derivamos respecto a la variable de turno, pensado en las otras variables como "constantes".

Notación. Se usan distintas notaciones para las derivadas parciales. Por ejemplo, para hablar de la derivada parcial de f respecto a x, se usan la notaciones $\dfrac{df}{dx}$, f_x, $\partial_x f$, etc.

La notación para evaluar una derivada parcial en un punto también puede tener variaciones. Por ejemplo, para evaluar una derivada parcial de f (respecto a x) en P se usa $f_x(P)$ o también $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$

Ejemplo 5.4

Recordemos que en una variable, si k es una constante, $\begin{cases} \dfrac{d}{du}(k\cdot f(u)) = k\cdot\dfrac{df}{du} \\ \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{k}{f(u)}\right) = \dfrac{-k\cdot\dfrac{df}{du}}{f^2(u)} \end{cases}$

a.) Si $z = x^2y^2 + y$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $z = x^2y^2 + y \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}(x^2)y^2 + \dfrac{d}{dx}(y) = 2xy^2 + 0$

- $z = x^2y^2 + y \implies \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\dfrac{d}{dy}(y^2) + \dfrac{d}{dy}(y) = x^2 2y + 1$

b.) Si $z = \dfrac{x^3}{y^5}$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y^5}\cdot x^3\right) = \dfrac{1}{y^5}\cdot\dfrac{d}{dx}(x^3) = \dfrac{1}{y^5}\cdot 3x^2$

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} \implies \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right) = \dfrac{-x^3\cdot\dfrac{d}{dy}(y^5)}{y^{10}} = \dfrac{-x^3\cdot 5y^4}{y^{10}}$

Ejemplo 5.5

$$\text{Recordemos que,}\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(f(u)) = \dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}, \quad \text{en particular} \quad \dfrac{d}{dx}(f^n(u)) = nf^{n-1}(u)\cdot\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \\[2ex] \dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \dfrac{df}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\dfrac{dg}{dx} \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\dfrac{df}{dx}\cdot g(x) - f(x)\cdot\dfrac{dg}{dx}}{g^2(x)} \end{cases}$$

Si $w = \dfrac{y + z^2\cos^4(zx^3)}{1+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial z}$

Solución:

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{1+y^2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}(y + z^2\cos^4(zx^3)) = \dfrac{0 + 4z^2\cos^3(zx^3)\cdot -\operatorname{sen}(zx^3)\cdot 3x^2z}{1+y^2}$

- $$\begin{aligned}\dfrac{\partial w}{\partial y} &= \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial y}(y + z^2\cos^4(zx^3))\cdot(1+y^2) - \dfrac{\partial}{\partial y}(1+y^2)\cdot(y+z^2\cos^4(zx^3))}{(1+y^2)^2} \\ &= \dfrac{1\cdot(1+y^2) - 2y\cdot(y+z^2\cos^4(zx^3))}{(1+y^2)^2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(y+z^2\cos^4(zx^3)\right)\\ &= \frac{0+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)\cdot\cos^4(zx^3)+z^2\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos^4(zx^3)\right)}{1+y^2}\\ &= \frac{2z\cdot\cos^4(zx^3)+z^2\cdot 4\cos^3(zx^3)\cdot -\operatorname{sen}(zx^3)\cdot 1\cdot x^3}{1+y^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6 (Evaluando derivadas)

El volumen de un cono es $V=\dfrac{\pi r^2 h}{3}$, calcule $\left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=2,\ h=4}$ y $\left.\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_{r=2,\ h=4}$

Solución:

- $\left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=2,\ h=4} = \left.\dfrac{2\pi r h}{3}\right|_{r=2,\ h=4} = \dfrac{16\pi}{3}$
- $\left.\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_{r=2,\ h=4} = \left.\dfrac{\pi r^2}{3}\right|_{r=2,\ h=4} = \dfrac{4\pi}{3}$

Ejemplo 5.7

Verifique que si $z=\arctan(y/x)$, entonces $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

Solución:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-y}{\cancel{x^2}} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{cases}$$

$$\therefore\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{-y}{x^2+y^2}+y\frac{x}{x^2+y^2}=0$$

Ejemplo 5.8

Si $w=z^2\ln(x^2)\cos(y^2)$, determine $g(z)$ tal que $x\ln(x^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 4w$

Solución:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = z^2\cos(y^2)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\ln(x^2)\right) = z^2\cos(y^2)\cdot\dfrac{2}{x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{d}{dz}\left(z^2\right)\,\ln(x^2)\cos(y^2) = 2z\,\ln(x^2)\cos(y^2) \end{cases}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x\ln(x^2)\frac{\partial w}{\partial x}+g(z)\frac{\partial w}{\partial z} &= \cancel{x}\ln(x^2)\,z^2\cos(y^2)\cdot\frac{2}{\cancel{x}}+g(z)\cdot 2z\,\ln(x^2)\cos(y^2) \\ &= 2z^2\ln(x^2)\cos(y^2)+g(z)\cdot 2z\,\ln(x^2)\cos(y^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $g(z)=z$ tendríamos lo que se pide:

$$x\ln(x^2)\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z} = 2z^2\ln(x^2)\cos(y^2)+z\cdot 2z\,\ln(x^2)\cos(y^2) = 4z^2\ln(x^2)\cos(y^2) = 4w \quad ✓$$

Ejemplo 5.9

Si $f(t,\theta)=e^{2\theta}\phi(t,\theta)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$

Solución: : En este caso, como ϕ no es conocida, sus derivadas parciales solo se dejan indicadas.

- $\dfrac{\partial f}{\partial t} = e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{2\theta}\right)\cdot\phi(t,\theta)+e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = 2e^{2\theta}\cdot\phi(t,\theta)+e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}$

Ejemplo 5.10

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables y $u=x^5+y^3$. Si $z=x^2g(u)+f^4(u)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución: : Como f y g no son conocidas, sus derivadas solo se dejan indicadas.

- $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x\cdot g(u)+x^2\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx} + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= 2x\cdot g(u)+x^2\frac{dg}{du}\cdot 5x^4 + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot 5x^4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= x^2\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dy} + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dy}\\ &= x^2\frac{dg}{du}\cdot 3y^2 + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot 3y^2\end{aligned}$$

Ejemplo 5.11

Recordemos que en una variable, si $a>0$ y, f y g son derivables, entonces aplicando regla de la cadena,

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(a^{g(u)}\right) = a^{g(u)}\cdot\ln a\cdot\dfrac{dg}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\\[2ex] \dfrac{d}{dx}\left([f(x)]^{\alpha}\right) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{df}{dx}\end{cases}$$

Si $z=(\operatorname{sen}x)^{y^2}$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left([\operatorname{sen}x]^{y^2}\right) = y^2\cdot[\operatorname{sen}x]^{y^2-1}\cdot\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) = y^2\cdot[\operatorname{sen}x]^{y^2-1}\cdot\cos x$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left([\operatorname{sen}x]^{y^2}\right) = [\operatorname{sen}x]^{y^2}\cdot\ln(\operatorname{sen}x)\cdot\dfrac{d}{dy}\left(y^2\right) = [\operatorname{sen}x]^{y^2}\cdot\ln(\operatorname{sen}x)\cdot 2y$

Ejemplo 5.12 (Cálculo directo y por definición).

Sea $f(x,y)=\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$. Cuando derivamos respecto a x, el factor $\sqrt[3]{y}$ lo podemos ver como una "constante" y cuando derivamos respecto a y, el factor $\sqrt[3]{x}$ lo podemos ver como una "constante".

Aplicando la regla: $\dfrac{d}{du}(k\cdot f(u)) = k\cdot\dfrac{df}{du}$, con k constante, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x^{2/3}\,\sqrt[3]{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right) = \sqrt[3]{x}\,\frac{d}{dy}\left(\sqrt[3]{y}\right) = \sqrt[3]{x}\,\frac{1}{3}y^{2/3}$$

Esta es la manera de derivar f respecto a x y respecto a y usando teoremas de derivadas. Sin embargo esto no decide si la función es derivable o no en $(0,0)$. Para saber si estas derivadas parciales existen en $(0,0)$, se debe calcular usando la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

es decir, en este caso la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(0,0)$ y es cero y también $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

5.5 Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables x e y, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales se llaman segundas derivadas parciales de f.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Si $z = f(x,y)$, se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales,

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

La notación f_{xy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y, mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

Ejemplo 5.13

Si $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Solución: Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3y^2$$

De donde obtenemos que :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + 2xy^2\right] = 4xy$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y + 3y^2\right] = 4xy$

Ejemplo 5.14

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $z = f(u)$ con $u = x^3y^4$. Entonces,

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underbrace{f'(u)}_{} \cdot \underbrace{3x^2y^4}_{}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{f'(u)}_{} \cdot \underbrace{x^3\,4y^3}_{}$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 3x^2y^4 \; + \; 6xy^4 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 4x^3y^3 \; + \; 12x^3y^2 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 3x^2y^4 \; + \; 12x^2y^3 f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 4x^3y^3 \; + \; 12x^2y^3 f'(u)$

Ejemplo 5.15

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, se conoce como ecuación de Laplace, en honor a Pierre Laplace (1749 - 1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Compruebe que la función $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace.

Solución: Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x$$

con lo cual

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \operatorname{sen} x$$

de donde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0$ ✓

Ejemplo 5.16

La ecuación de onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde a es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ satisface la ecuación de onda.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + at$ y $B = x - at$. De esta manera $u = f(A) + g(B)$. Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(A) + g'(B), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(A) + g''(B)$$

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a t están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(A) - ag'(B), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2[f''(A) + g''(B)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \checkmark$$

Ejemplo 5.17

Consideremos f y g funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + y$, entonces $u = xf(A) + yg(A)$. Las derivadas de $u(x, y)$ con respecto a x están dadas por

$$u_x = f(A) + xf'(A) + yg'(A)$$

$$u_{xx} = f'(A) + f'(A) + xf''(A) + yg''(A) = 2f'(A) + xf''(A) + yg''(A)$$

$$u_{xy} = f'(A) + xf''(A) + g'(A) + yg''(A)$$

$$u_y = xf'(A) + g(A) + yg'(A)$$

$$u_{yy} = xf''(A) + g'(A) + g'(A) + yg''(A) = xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A)$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 2\,f'(A) + xf''(x+y) + yg''(A) - 2f'(A) - 2xf''(A) - 2g'(A) \\ & -2yg''(A) + xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.18

Compruebe que la función $u(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Solución: Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\frac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z^2} = -\frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

y al sumarlas obtenemos el resultado deseado.

Observación: Note que las *derivadas parciales mixtas* f_{xy} y f_{yx} en el ejemplo anterior son iguales. El siguiente teorema, da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que estas derivadas son iguales. El teorema es conocido de Clairaut o también como Teorema de Schwarz.

Teorema 5.3 (Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar donde D es un disco abierto con centro en (a,b) y radio δ, si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Ejemplo 5.19 (Hipótesis en el Teorema de Clairaut).

Sea $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y $f(0,0)=0$. Se tiene $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, pero $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. En efecto, aunque f_{xy} y f_{yx} están definidas en $(0,0)$, *no son continuas* en este punto. Para ver esto, podemos calcular estas derivadas de dos maneras distintas y observar que el valor difiere. Primero derivamos sobre la recta $x=0$ y luego sobre la recta $y=0$.

$$z_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = -y$$

y

$$z_x(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hx(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = x$$

Ahora

$$z_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \quad \text{y} \quad z_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

Esto muestra que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. El gráfico de $f(x,y)$ muestra un salto en $(0,0)$

Ejercicios

5.5.1 Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y(2,1)$.

5.5.2 Sea $f(x,y) = \ln^5(x^y + x^2 + 2^y)$ Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

5.5.3 Sea $z(x,y) = 2(ax+by)^2 - (x^2+y^2)$ con $a^2+b^2=1$. Verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5.5.4 Sea $z = f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ con f derivable. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5.5.5 Sea $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Demuestre que $zx\dfrac{\partial z}{\partial x} + zy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

5.5.6 Sea k una constante y $C(x,t) = t^{-1/2} e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

5.5.7 Sea $z = f(x^2y + y) \cdot \sqrt{x + y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

5.5.8 Verifique que $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

5.5.9 Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Verifique que $u(x,t) = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

5.5.10 Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante y f y g funciones dos veces derivables. Verifique que $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

5.5.11 Verifique que $z = \ln(e^x + e^y)$ es solución de las ecuación diferencial $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ y de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

5.5.12 Sea f una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y sea $w(x,y) = f(y \operatorname{sen} x)$. Verifique que

$$\cos(x)\,\frac{\partial w}{\partial x} + y\operatorname{sen}(x)\,\frac{\partial w}{\partial y} = yf'(y \operatorname{sen} x)$$

5.5.13 Sea $g(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(3x - 2y)$. Verifique la identidad

$$x \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} + 6x \cdot g(x,y).$$

5.5.14 La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en paralelo en un circuito eléctrico está dado por la fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$. Calcule $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$. Sugerencia: derive a ambos lados respecto a R_1.

5.5.15 La ley de gases para un gas ideal de masa fija m, temperatura absoluta T, presión P y volumen V es $PV = mRT$ donde R es la constante universal de los gases ideales. Verifique que $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.

5.5.16 La energía cinética de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \dfrac{1}{2}mv^2$. Verifique que $\dfrac{\partial K}{\partial m}\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$.

5.5.17 Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $u = x^2 + y^2$ y $w(x,y) = f(u) \cdot g(y)$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

5.5.18 Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $w(x,y) = f(u) + g(v)$ donde $u = \dfrac{x}{y}$ y $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

5.5.19 Sea $w = e^{3x} \cdot f(x^2 - 4y^2)$, donde f es una función dos veces diferenciable. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

5.5.20 Sea $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ una constante. Verfique que u satisface la ecuacón

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0$$

5.6 Función diferenciable. Diferencial total.

Diferencial en una variable. Geométricamente, si f es derivable en x_0 entonces la ecuación de la recta tangente T a f en $(x_0, f(x_0))$ es

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

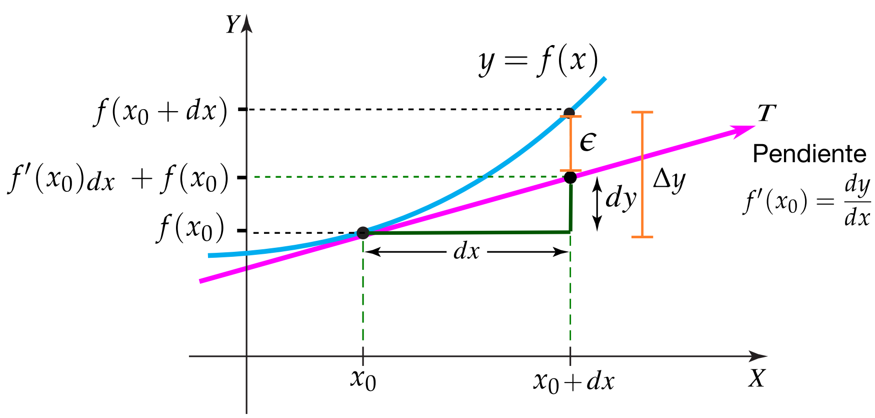
Entonces

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) \approx T(x_0 + \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0) \quad &\Longrightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \\ &\Longrightarrow \quad \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \end{aligned}$$

El diferencial dx puede ser cualquier número (grande o pequeño), si dx es pequeño, Δy se puede aproximar con el diferencial $dy = f'(x_0)\,dx.$ Formalmente,

$$\Delta y = f'(x)dx + \epsilon \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\epsilon}{\Delta x} = 0$$

Esto dice que f es *diferenciable* en x_0 si la distancia ϵ entre el gráfico de f y su tangente se desvanece más rápidamente que el desplazamiento horizontal hacia el punto de tangencia.



Diferencial total en dos variables. Sea S una superficie de ecuación $z = f(x, y)$. El cambio en f en dos variables es

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, \;\; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y supongamos que existe el plano tangente Π a S en P. Más adelante vamos a ver que si las derivadas parciales existen y son continuas en P, dos vectores tangentes son $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$ y $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ que están en el plano tanegnte a S en P. Con estos vectores tangentes obtenenos una ecuación vectorial del plano tangente Π (si hubiera) en $P \in S$. Esta ecuación vectorial es

$$\Pi_T : \; P \; + \; t \cdot (1, 0, f_x(x_0, y_0)) + s \cdot (0, 1, f_y(x_0, y_0)), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $t = dx$ y $s = dy$, y si $Q = (x_0, y_0, z_2) \in \Pi$, la coordenada z de Q es

$$z_2 = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0))\, dy$$

Entonces $f(x_0 + dx,\ y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$

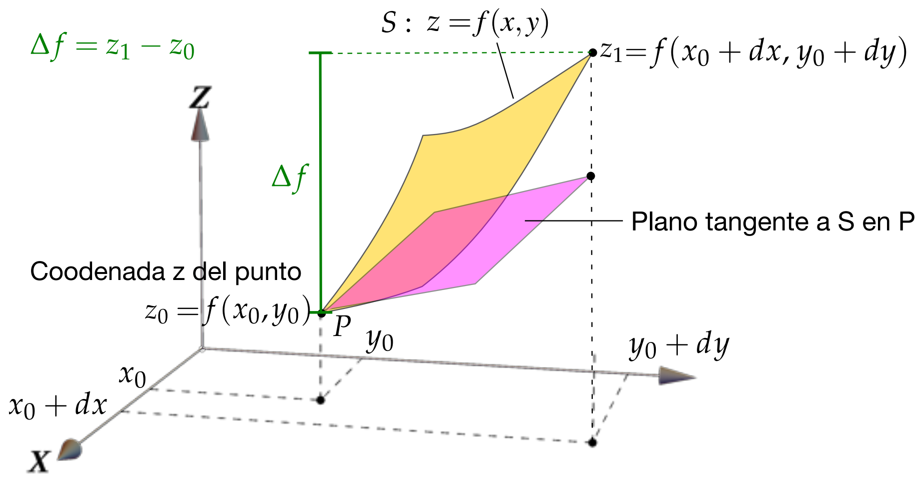


Figura 5.5: $\Delta f = z_1 - z_2$

Tenemos $\Delta f = f(x_0 + dx,\ y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$, es decir,

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$$

El *diferencial total* de f es $df = f_x\, dx + f_y\, dy$.

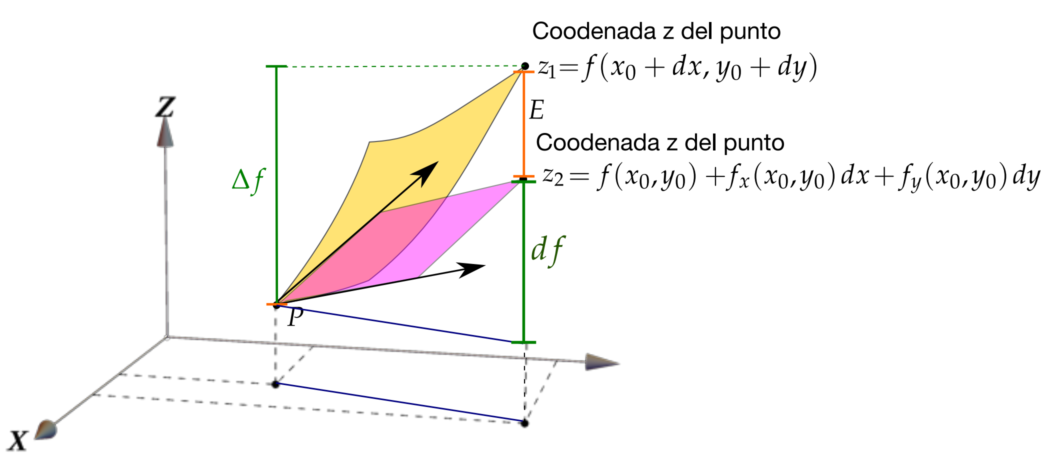


Figura 5.6: $\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)$

(Función diferenciable)

Si la *derivada* $Df(\mathbf{a})$ de f en $\mathbf{a}$ existe, decimos que f es "localmente lineal" o "diferenciable" en $\mathbf{a}$ si $f(\mathbf{a}+\acute{}\mathbf{x})-f(\mathbf{a})$ y $Df(\mathbf{a})\,\acute{}\mathbf{x}$ son indistinguibles en el sentido de que su diferencia se desvanece más rápido que $||\Delta\mathbf{x}||$.

Geométricamente, en particular la función f es *diferenciable* en $\mathbf{a}=(x_0,y_0)$ si la distancia entre la superficie y el plano

$$E = f(x_0+\Delta x,\ \ y_0+\Delta y)\ -\ [f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\,dx+f_y(x_0,y_0)]$$

se desvanece más rápidamente que el desplazamiento horizontal $\sqrt{dx^2+dy^2}=||(x,y)-(x_0,y_0)||$ hacia el punto de tangencia.

Definición 5.4 (Función diferenciable)

Una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es *diferenciable* en (x_0,y_0) si existe un entorno alrededor de (x_0,y_0) en el que

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\,dx+f_y(x_0,y_0)\,dy+E(x,y)\qquad \text{con}\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{E(x,y)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||}=0$$

Es decir, si f es diferenciable en (x_0,y_0), entonces en la cercanías de (x_0,y_0) la función f se puede aproximar usando el plano tangente. Si $z=f(x,y)$ es diferenciable, el diferencial total $df=f_x(P)\,dx+f_y(P)\,dy$ representa el incremento de f a lo largo del plano tangente a f en el punto (x,y). Sería como calcular con el plano tangente en vez de usar la superficie S (ver figura 5.6).

Tenemos un teorema para caracterizar las funciones diferenciables.

Teorema 5.4 (Función diferenciable)

Sea $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. Si las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $(x_0,y_0)\in U$, entonces f es *diferenciable* en (x_0,y_0).

5.7 Regla de la cadena.

Recordemos que en una variable, si $f(u)$ y $u(x)$ son derivables, entonces la regla de la cadena establece

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena nos indica como varía f conforme recorremos la trayectoria $u(x)$. Formalmente es la derivada de f en presencia de un cambio de variable u. En funciones de varias variables la relación persiste en el siguiente sentido

Ya conocemos que si f es *diferenciable* en (x_0,y_0) entonces hay entorno alrededor de (x_0,y_0) en el que

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy + E(x,y) \quad \text{con} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$$

En presencia de una composición de funciones (o mejor "un cambio de variable"), tenemos

Teorema 5.5 (Regla de la cadena – Caso I).

Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ derivables y $z = f(x,y)$ diferenciable en $(x,y) = (x(t),y(t))$, entonces si $z = f(x(t),y(t))$ es derivable,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

Teorema 5.6 (Regla de la cadena – Caso II.)

Sean $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ con derivadas parciales en (x,y). Si $z = f(u,v)$ es diferenciable en $(u,v) = (u(x,y),v(x,y))$ entonces $z = f(u,v)$ tiene derivadas parciales de primer orden en (x,y) y

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.20

Sea $z(x,y) = \sqrt{\arctan(y/x)+\tan(xy)}$. Podemos hacer un cambio de variable y calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ usando la regla de la cadena. Sea $u(x,y) = \arctan(y/x)$ y $v(x,y) = \tan(xy)$, entonces $z = \sqrt{u+v}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y\cdot 1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,y\sec^2(xy)\end{aligned}$$

Al sustituir u y v obtenemos el resultado completo, si fuera necesario.

Ejemplo 5.21

Sea $z(x,y) = x^2+3y^2$, donde $x = e^t$ y $y = \cos(t)$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 2xe^{t}-6y\,\mathrm{sen}(t) \;=\; 2e^{2t}-6\cos(t)\,\mathrm{sen}(t)\end{aligned}$$

Ejemplo 5.22

Sea $z(u,v)=x^2e^{y^3}$, donde $x=uv$ y $y=u^2-v^3$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial u}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial u} \;=\; 2xe^{y^3}v+3x^2y^2e^{y^3}2u\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial v}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial v} \;=\; 2xe^{y^3}u+3x^2y^2e^{y^3}\cdot -3v^2\end{aligned}$$

Ejemplo 5.23

Sea f una función diferenciable y $z(x,y)=f(x^2,xy^2)$. Para derivar usando la regla de la cadena usamos el cambio de variable $u=x^2$ y $v=xy^2$, entonces $z(x,y)=f(u,v)$ y

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y^2\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2xy\end{aligned}$$

Ejemplo 5.24

Sea f una función derivable y $z=f(x,y)$ con $x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\cdot -r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\,r\cos\theta\end{aligned}$$

Ejemplo 5.25

Sea $V = V(P,T)$. Si $P(V-b)e^{RV} = RT$, con b, R constantes, calcule $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

Solución: V es función de P y T. Derivamos a ambos lados respecto a T,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\left[P(V-b)e^{RV}\right] &= \frac{\partial}{\partial T}[RT] \\
P\left[V_T e^{RV} + (V-b)e^{RV} R V_T\right] &= R \\
\therefore \quad V_T &= \frac{R}{Pe^{RV}(1+(V-b)R)}.
\end{aligned}$$

Regla de la cadena y segundas derivadas parciales. Si $z = f(u,v)$ tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces las derivadas parciales de f siguen siendo funciones de u y v.

Si $z = f(u,v)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Esquematicamente se podría ver así:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ejemplo 5.26

Si $z = g(x^2) + f(\arctan x,\ \tan y\,)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Solución: : Primero un cambio de variable $z = g(u) + f(v,w)$ con $\begin{cases} u &= x^2 \\ v &= \arctan x \\ w &= \tan y \end{cases}$

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g'(u)\cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot 0$

b.)
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cdot g'(u) + \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(v,w)\right)\\ &= 2\,g'(u) + 2xg''(u)\cdot 2x - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\cdot 0\right)\end{aligned}$$

c.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\sec^2 y$

d.)
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sec^2 y\cdot\frac{\partial f}{\partial w}(v,w)\right)\\ &= \sec^2 y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\cdot 0\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 5.27

Si $z(x,y) = g(y)\cdot f(x-2y,\ y^3)$. Calcule z_x y z_{xy}.

Solución: Cambio de variable: Sea $u = x-2y,\ \ v = y^3$. Entonces $z(x,y) = g(y)\,f(u,v)$.

$z_x = g(y)\ [f_u\cdot 1\ +\ f_v\cdot 0] = g(y)\,f_u(u,v)$

$z_{xy} = g'(y)\cdot 1\cdot f_u\ +\ g(y)\left[-2\,f_{uu}\ +\ 3y^2 f_{uv}\right]$

Ejemplo 5.28

Cambio de variable: Sea $z(x,y) = g(u,v)$ con $u = x^2y^2$ y $v = xy$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 2xy^2 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\right]\cdot 2xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^2\right]\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\right] \\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\cdot v_y\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot v_y\right] \\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\cdot x\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot x\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.29

Sea $F(u,v) = -u - v$ con $u^2 = x - y$ y $v^2 = x + y$. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, verifique

a.) $F_x = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = \dfrac{v-u}{2uv}$.

Solución: Primero veamos que $2u\,u_x = 1,\ 2v\,v_x = 1,\ 2u\,u_y = -1$ y $2v\,v_y = 1$. Por lo tanto

a.) $F_x = F_u\,u_x + F_v\,v_x = -1\cdot\dfrac{1}{2u} - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = F_u\,u_y + F_v\,v_y = -1\cdot\left(-\dfrac{1}{2u}\right) - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = \dfrac{v-u}{2uv}$.

Ejercicios

5.7.1 Sea $z = xy^2 + x$ con $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \tan(t)$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

5.7.2 Sea $w = x^2 + 2xy + y^2$ con $x = t\cos t$ y $y = t \operatorname{sen} t$. Calcule $\dfrac{dw}{dt}$.

5.7.3 Sea $z = u\sqrt{u + v^2}$ con $u = xy$ y $v = \arctan(y/x)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.7.4 Sea $z = g(y)\cdot f(x,y)$ con f y g funciones con derivadas de segundo orden.

a.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

b.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

c.) Si $x = t^2$ y $y = u^2 + t^3$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial u}$

5.7.5 Sea $z = f(xy, x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5.7.6 Sea $z = \ln^3(xy) + f(xy, x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5.7.7 Sea g derivable y f una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z = f\big(x \operatorname{sen}(y),\ g(x)\big)$

5.7.8 Sea $T(x,t) = e^{-3x} \operatorname{sen}(2t - 3x)$. Determine una constante K tal que

$$6\frac{\partial T}{\partial t} + 3\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - 2\frac{\partial T}{\partial x} \;=\; K \cdot T(x,t)$$

5.7.9 Sea z definida mediante $z = xf(y) + yg(x)$, con f y g funciones dos veces derivables. Calcule $K \in \mathbb{R}$ de tal manera que se verifique la identidad

$$2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - Kx\frac{\partial z}{\partial x} - Ky\frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0.$$

5.7.10 Sea $z = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$, donde $f = f(x,y)$ es una función con derivadas de segundo orden. Si $x = u^2 + v$ y $y = u + v^2$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$. Sugerencia: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

5.7.11 Sea $w = g(x) + f(x,y)$ con $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

5.7.12 Sea $z = f(u,v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden $f_u,\ f_{uv},\ f_{uu}$ y f_{vv} continuas (es decir, $f_{uv} = f_{vu}$). Verifique que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

5.7.13 Sea $z = f(x^2 + \cos y,\ x^2 - 1) - g(3xy^2)$ con g derivable y f con derivadas parciales continuas y de segundo orden. Calcule z_{xy}

5.7.14 Sea $z = x^2 f^4(xy, y^2)$ con f con derivadas parciales continuas. Calcule z_y y z_x

5.7.15 Considere $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{x},\ e^{3x} + 3x\right) + h\left(x^2y^2\right)$, donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y h una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5.7.16 Considere $z = f(2x^2y - y,\ x^2) + g(x^2 - xy)$, donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y g una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5.7.17 Sea $z = f(x^2 - y,\ xy)$ donde $s = x^2 - y$ y $t = xy$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ (Sugerencia: Calcule z_x y z_y y resuelva el sistema pensando en $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ como incognitas).

5.7.18 Verifique que si f es diferenciable, la función $z = f(xy)$ satisface la ecuación $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

5.7.19 Sea $u = f(r)$ con f derivable y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = rf'(r)$$

5.7.20 Supongamos que f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z(x,y) = \dfrac{f(u,v)}{x}$ con $u = x^3$ y $v = 3y - 2$

5.7.21 (*) Supongamos que se sabe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \operatorname{sen}(xy) \quad \text{con} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad y > 0$. Verifique que aplicando un cambio de variable de (x,y) a (u,v) donde $u = xy$ y $v = x/y$; entonces la ecuación $(*)$ se convierte en la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial u} = v \operatorname{sen} u$. Sugerencia: Como $z = z(u,v)$; calcule las derivadas parciales y luego despeje x y y en el cambio de variable. Al sustituir, obtiene el resultado.

5.8 Derivadas de una función definida de manera implícita.

Supongamos que se conoce que z es una función de x e y, es decir, $z = f(x,y)$, pero que z *está definida de manera implícita* por una ecuación del tipo

$$F(x,y,z) = 0$$

Estas situaciones ya las hemos encontrado antes, por ejemplo en la ecuación de una esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Esta ecuación define a z como una función de x y y y en este caso, z se puede despejar:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Cuando una función está definida de manera implícita, no siempre es posible despejarla: Si $y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$ no hay posibilidad de despejar $z = z(x,y)$, aunque teóricamente podría ser posible en un entorno de algún punto. En todo caso, si podemos calcular las derivadas parciales.

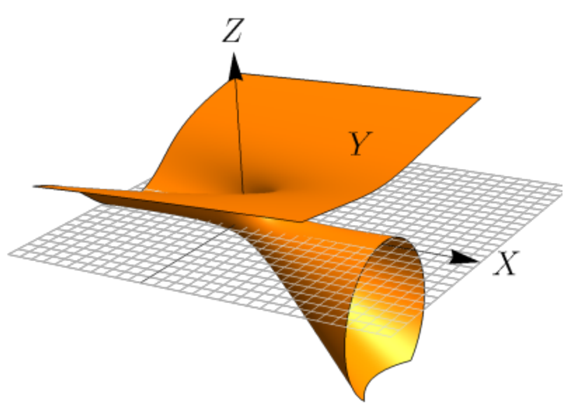


Figura 5.7: Superficie $S: \; y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para z_x y z_y. Supongamos que $z = z(x,y)$ y que $F(x,y,z(x,y)) = 0$ y que en algún conjunto abierto D las derivadas parciales de z existen y la función F es diferenciable en D.

Sea $g(x,y) = F(x,y,z) = 0$, aplicando la regla de la cadena a $g(x,y) = F(u,v,w)$, con $x = u(x,y)$, $y = v(x,y)$ y $w(x,y) = z(x,y)$, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

Ahora, como $\dfrac{\partial g}{\partial x}=0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Despejando,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\quad\text{en todos los puntos de D donde}\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x,y,z(x,y))}\neq 0$$

De manera similar, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$

Teorema 5.7

Si F es diferenciable en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$ y si la ecuación $F(x_1,x_2,...,x_n)=0$ define a x_n como una función diferenciable $x_n=f(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ en algún conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}$$

en aquellos puntos en los que $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\neq 0$.

Una función $z=z(x,y)$ definida de manera implícita por $F(x,y,z)=0$.

Si $z=z(x,y)$ está definida de manera implícita por $F(x,y,z)=0$, de acuerdo a las hipótesis del teorema 5.7, entonces

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}\quad\text{y}\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si x y z son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x=-\frac{F_x}{F_y}\quad\text{y}\quad y_z=-\frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones $F(x,y,z,u)=0$.

Ejemplo 5.30

Sea z definida de manera implícita por $F(x,y,z) = xyz + x + y - z = 0$. Como se cumplen las condiciones del teorema 5.7 entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zy+1}{xy-1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{zx+1}{xy-1}$$

Ejemplo 5.31

Calcule z_x y z_y si $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ define a z como $z = z(x,y)$.

Solución: Dado que $F_x = 2x$, $F_y = -4y - z + 1$, $F_z = 6z - y$, entonces si $F_z \neq 0$,

$$z_x = -\frac{2x}{6z-y}$$

$$z_y = -\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 6z(x,y) - y = 0.\}$

Ejemplo 5.32

Considere la función z definida de manera implícita por $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Calcular z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} y z_{yx}

Solución:

z está definida de manera implícita por $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Entonces,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Para calcular z_{xy}, z_{xx} y z_{yy} debemos notar que z_x y z_y *no son* funciones definidas de implícita, como tal derivamos de manera ordinaria.

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{1\cdot z - x\,z_x}{z^2} = -\frac{z - x\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(z_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{1\cdot z - y z_y}{z^2} = -\frac{z^2+y^2}{z^3},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z}\right) = \frac{y \cdot z_x}{z^2} = \frac{y\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2}.$$

Ejemplo 5.33

Si $F(xz, yz) = 0$ define a z como función implícita de x e y y además cumple con las condiciones del teorema 5.7 en cada punto de una región D, entonces verifique que, en D, se satisface la ecuación

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

Solución: Sea $u = xz$ y $v = yz$, entonces $F(xz, yz) = F(u, v) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u \cdot 0 + F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u \cdot z + F_v \cdot 0}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -y \cdot \frac{F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} + -x \cdot \frac{F_u \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
&= -\frac{z\,(F_u \cdot x + F_v \cdot y)}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\
&= -z
\end{aligned}$$

Ejercicios

5.8.1 Si $x^2y^2 + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 = 4$ define a z como función implícita de x e y, verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

5.8.2 Sea $z = f(z/xy)$ con f dos veces derivable. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

5.8.3 Sea $g\left(\dfrac{xy}{z}, x^2 + y^2\right) = 0$ una ecuación que define a z como una función de x e y. Verifique que si g_x, g_y y g_z existen y son continuas en toda la región en la que $g_z \neq 0$, entonces

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z(x^2 - y^2)}{xy}$$

5.8.4 Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = \dfrac{g(u, v)}{y^2}$ con $u = y^3$ y $v = x - 2$

5.8.5 Sea $z = x\ln(yz)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5.8.6 Si $f(zx, y^2) = xy$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_{xy}.

5.8.7 Si $f(zx, y^2) + g(z^2) = 5$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_x y z_y

5.8.8 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $2g(z) + f(x^2\,, y^2) = 0$ define a z como funcón implícita de x y y.

a) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **b)** Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

5.8.9 Repita el ejercicios anterior con la función $zx + f(x^2, y^2) = 0$.

5.8.10 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $g(z)f^3(x^2\,, y^2) = 0$ define a z como funcón implícita de x y y. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

5.8.11 Sean F una función diferenciable y f una función derivable. La ecuación $F\left(f(xy),\ f(z^2)\right) = 0$ define a z como una función implícita de x y y Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

5.8.12 Sea z definida implícitamente por medio de la relación $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ con f una función con derivada continua. Verifique que z satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

5.8.13 Si $f(x,y) = \dfrac{\cos(7x - y)}{x}$, determine una constante K de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 7 \cdot f(x,y) + \frac{K}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

5.8.14 Si $zx + e^{zy} = x$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_x, z_y y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

5.8.15 Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Si $y = g(z^2) + f(y^2,\, x^2)$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_x, z_y y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

5.8.16 La ecuación de Redlich-Kwong de dos parámetros es $\left[P + \dfrac{n^2 a}{\sqrt{T}V(V+nb)}\right][V - nb] - nRT = 0$ donde a, b son parámetros, R es la constante de gas y n el número de moles. La función $T = T(P,V)$ está definida de manera implícita por esta ecuación. Calcule $\dfrac{\partial T}{\partial P}$.

5.9 (*) Derivación implícita: Caso de dos ecuaciones.

Supongamos que $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F(x,y,u,v) = 0 \qquad \text{y} \qquad G(x,y,u,v) = 0$$

Para deducir las expresiones para u_x, u_y, v_x, v_y se resuelve el sistema

$$\begin{cases} dF &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_u\,du + F_v\,dv = 0 \\ \\ dG &= G_x\,dx + G_y\,dy + G_u\,du + G_v\,dv = 0 \end{cases}$$

para du y dv. Si $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$, obtenemos $du = -\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dx - \dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} dy$

como $du = u_x\,dx + u_y\,dy$ entonces se obtienen las fórmulas (siempre y cuando $J \neq 0.$)

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{J}, \qquad u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{J}$$

y

$$v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{J}, \qquad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{J}$$

Ejemplo 5.34

Si $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$\begin{aligned} F &= u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 \\ G &= u + v - x^2 + y = 0 \end{aligned}$$

calcular u_x y u_y.

Solución: Como $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(u-v)$, entonces, $u_x = \dfrac{x(1-2v)}{u-v}$ y $u_y = \dfrac{1+2v}{2(u-v)}$.

Ejemplo 5.35

Sea $z = f(x,y)$ definida por $z = u + v$ donde $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$\begin{aligned} F &= u + e^{u+v} - x = 0 \\ G &= v + e^{u-v} - y = 0 \end{aligned}$$

Si $u = v = 0$ entonces $x = y = 1$. Calcular $z_x(1,1)$.

Solución: $z_x = u_x + v_y$. Podemos calcular u_x y v_y usando las fórmulas respectivas, sin embargo, para cálculos numéricos es más práctico derivar respecto a x las expresiones $F = 0$ y $G = 0$. En efecto, derivando respecto a x obtenemos

$$u_x + e^{u+v}(u_x + v_x) - 1 = 0 \quad \text{y} \quad v_x + e^{u-v}(u_x - v_x) = 0$$

de modo que cuando $x = 1, y = 1, v = u = 0$ se obtiene

$$2u_x + v_x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad u_x = 0$$

con lo que $u_x = 0$ $v_x = 1$ si $x = 1, y = 1, v = u = 0$. Así que $z_x(1,1) = 0 + 1 = 1$.

5.10 Gradiente.

Definición 5.5 (Campo Gradiente).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función (o campo) escalar diferenciable en una región R, entonces la función (o campo) gradiente de f es la función vectorial $\nabla \mathbf{f} : R \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\nabla \mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = (\, f_{x_1},\, f_{x_2}, ..., f_{x_n})$$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla \mathbf{f}(x,y) = (f_x,\, f_y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla \mathbf{f}(x,y,z) = (f_x,\, f_y,\, f_z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}$

Interpretación geométrica del campo gradiente. El gradiente $\nabla \mathbf{z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial (campo gradiente). Una manera de visualizar el campo gradiente gráficamente es anclar en cada punto (x,y) el respectivo vector $\nabla \mathbf{z}(x,y)$ (se traslada desde el origen). Pero también se puede anclar el vector de tal manera que el punto quede en el medio del vector (como si el vector fuera parte de una recta tangente). En general, la representación gráfica se hace anclando el vector de esta segunda manera y escalando el tamaño de los vectores de tal manera que unos no se sobrepongan sobre los otros, para tener una mejor vizualización de la dirección de "flujo" del campo gradiente. Así lo hace el software (como **Wolfram Mathematica**).

Por ejemplo, consideremos el campo $\nabla \mathbf{z} = (-y, x)$. En la figura 5.8 **a.)** se dibujan dos vectores anclados en el punto, en la figura 5.8 **b.)** se dibujan dos vectores anclados con el punto en el medio y en la figura 5.8 **c.)** se hace la representación gráfica del campo escalando los vectores, tal y como se acostumbra.

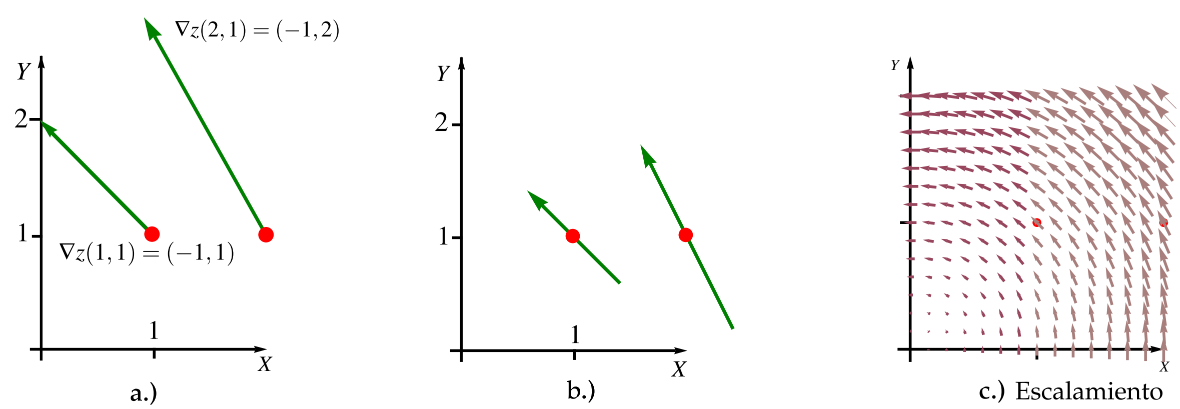


Figura 5.8: Campo gradiente $\nabla \mathbf{z} = (-y, x)$.

Ejemplo 5.36

Consideremos el paraboloide $z - 1 = x^2 + y^2$, el campo gradiente de z es $\nabla \mathbf{z} = (2x, 2y)$. Una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se ve en la figura 5.9. Los vectores apuntan en la dirección de máximo crecimiento del paraboloide (respecto al punto en el que se evalúa el gradiente) y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la 'intensidad' de esta razón de cambio.

En las figuras 5.9, 5.10, 5.11y 5.12, se muestran algunas superficies y su campo gradiente (en el plano XY)

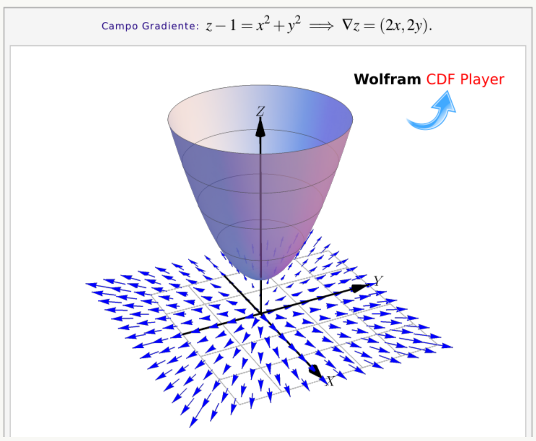


Figura 5.9: $\nabla \mathbf{z}(P)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento respecto a cada punto P

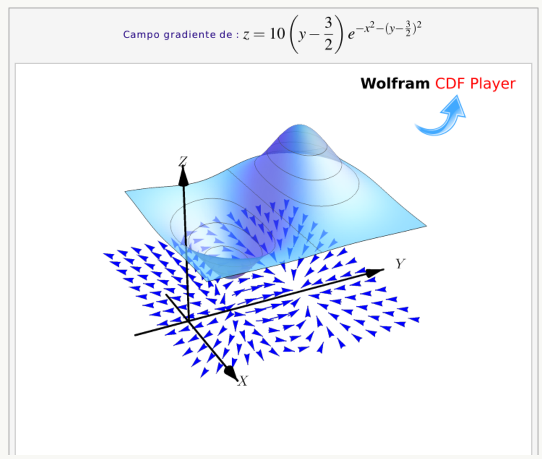


Figura 5.10: $\nabla \mathbf{z}(P)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento respecto a cada punto P

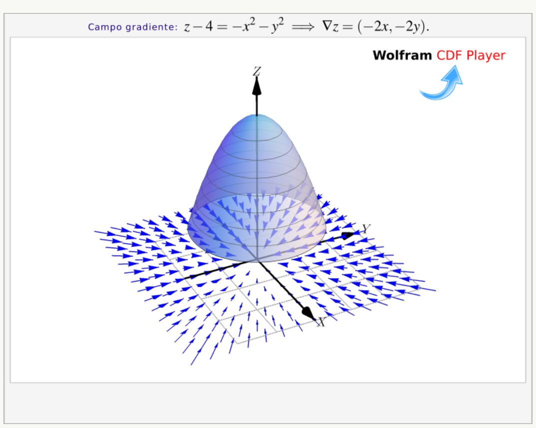


Figura 5.11: $z-4=-x^2-y^2$ y su campo gradiente

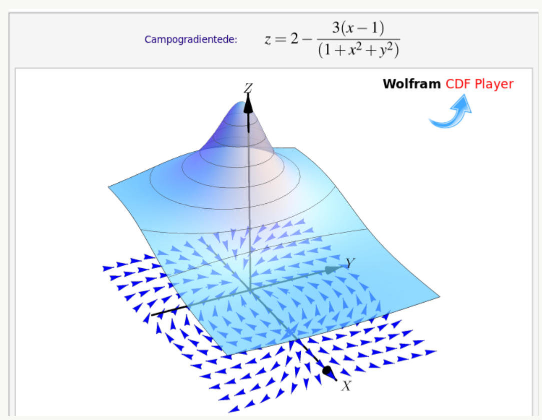


Figura 5.12: Superficie $z = 2 - \dfrac{3(x-1)}{(1+x^2+y^2)}$ y su campo gradiente

Ejemplo 5.37

- Si $f(x,y) = \operatorname{sen} xy + x^2y^2$, calcule $\nabla \mathbf{f}(\pi, 1)$.

  Solución: El gradiente está dado por :

  $$\nabla \mathbf{f}(x,y) = \left(y\cos xy + 2xy^2\right)\ \hat{\mathbf{\imath}} + \left(x\cos xy + 2x^2y\right)\ \hat{\mathbf{\jmath}}$$

  y evaluando

  $$\nabla \mathbf{f}(\pi,1) = (2\pi - 1)\ \hat{\mathbf{\imath}} + \left(2\pi^2 - \pi\right)\ \hat{\mathbf{\jmath}}$$

- Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcule $\nabla \mathbf{z}(x,y)$.

  Solución: Excepto en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (curva de nivel $z = 0$), se puede calcular

  $$\nabla \mathbf{f}(x,y) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z},\right) = -\frac{x}{z}\ \hat{\mathbf{\imath}}\ + -\frac{y}{z}\ \hat{\mathbf{\jmath}}$$

- Si $G(x,y,z) = x^2z + z^3y + xyz$, calcule $\nabla \mathbf{G}(x,y,z)$.

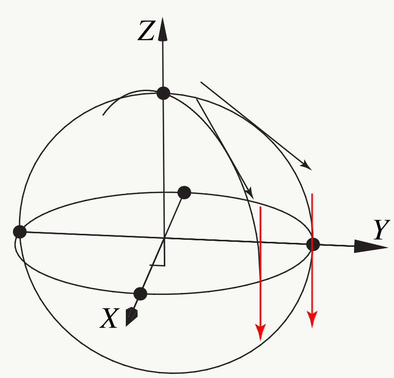
  Solución: $\nabla \mathbf{G}(x,y,z) = (G_x,\ G_y,\ G_z) = (2xz + yz)\ \hat{\mathbf{\imath}}\ +\ (z^3 + xz)\,\hat{\mathbf{\jmath}}\ +\ (x^2 + 3z^2y + xz)\,\hat{\mathbf{k}}$

Ejemplo 5.38

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Sea $P = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}) \in\ S$.

El gradiente de z es $\nabla \mathbf{z}(x,y) = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{x}{z}\right)$.

$\nabla \mathbf{z}(P) = (-1,\ -1)$.



El gradiente no está definido si $z = 0$ porque las derivadas parciales se indefinen (las tangentes a la superficies sobre la circunfencia $x^2 + y^2 = 1$ son rectas verticales)

5.11 Gradiente, curvas y superficies de nivel.

Recordemos que si $z = f(x,y)$ entonces la curva $z = c$ (es decir, $c = f(x,y)$) la llamamos "curva de nivel". Si tenemos $w = g(x,y,z)$, la superficie $w = 0$ (es decir $0 = g(x,y,z)$), se denomina *superficie de nivel* $w = 0$.

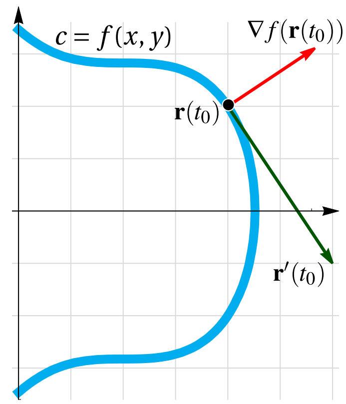


Figura 5.13: El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel

El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel. Formalmente: Consideremos una superficie suave S de ecuación $z = f(x,y)$. Sea C la curva de nivel $f(x,y) = c$ (definida en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$). Supongamos que C está paramerizado por $\mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ con $t \in]a,b[$. Ahora,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t)) = c \quad & \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} f(x(t),\, y(t)) = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

Esto nos dice que si $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0) \in C$ con $t_0 \in [a,b[$, entonces $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}(t_0))$ es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$, es en este sentido que decimos que el gradiente en $\mathbf{x}_0$ es perpendicular a la curva de nivel.

Razonando de manera similar podemos establecer que si S es una superficie de ecuación $G(x,y,z) = 0$, con G derivable con continuidad en el plano XY, y si $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$, entonces,

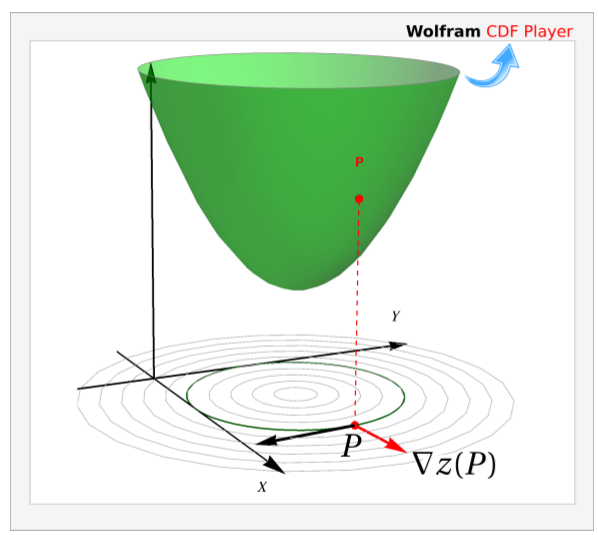


Figura 5.14: $\nabla \mathbf{z}(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $z = z_0$.

1. Si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita en P, se tiene

$$\nabla \mathbf{z}(x,y) = \left(-\frac{G_x}{G_z}, -\frac{G_y}{G_z} \right)$$

   El vector $\nabla \mathbf{z}(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $z = z_0$, es decir $\nabla \mathbf{z}(x_0, y_0)$ es perpendicular al vector tangente en (x_0, y_0). Si necesitamos un vector perpendicular, podríamos usar solamente $(-G_x, -G_y)$. Por supuesto, si la ecuación de la superficie es $z = f(x,y)$, podemos calcular el gradiente de la manera usual tomando $G = z - f(x,y) = 0$ y entonces $G_z = 1$.
2. El vector $\nabla \mathbf{G}(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $w = 0$, es decir $\nabla \mathbf{G}(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a cada curva de la superficie S, que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.

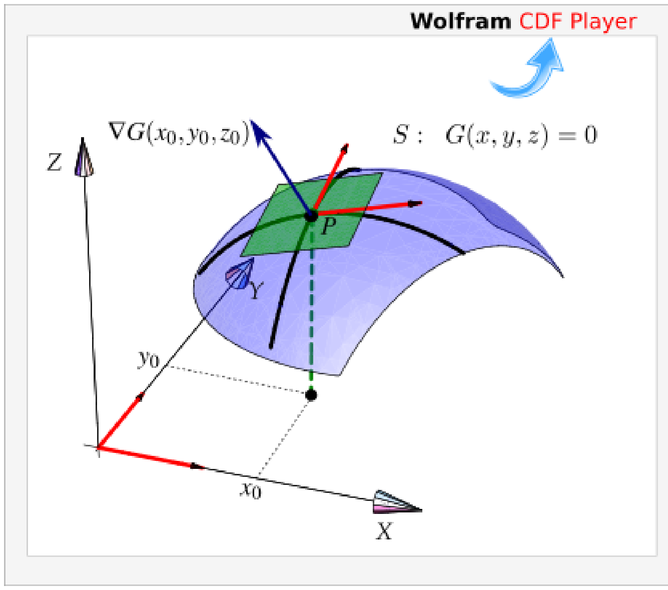


Figura 5.15: $\nabla \mathbf{G}(P)$ es perpendicular (al plano tangente) a S en P.

Ejemplo 5.39

Considere la curva C de ecuación $y^2 - x^2(1+x) = 0$. Sea $P = \left(1/6,\, \sqrt{7}/\sqrt{216}\right)$. Observe que $P \in C$. Calcule un vector *perpendicular* a la curva en P.

Solución: Podemos ver C como una curva de nivel de $z = y^2 - x^2(1+x)$, concretamente la curva de nivel $z = 0$.

De acuerdo a la teoría, el vector $\nabla \mathbf{z}(P)$ es perpendicular a la curva de nivel C en P. Veamos

$$\nabla \mathbf{z}(x, y) = (-x^2 - 2x(x+1),\, 2y)$$

$$\nabla \mathbf{z}(P) = (-5/12,\, \sqrt{7}/\sqrt{54})$$

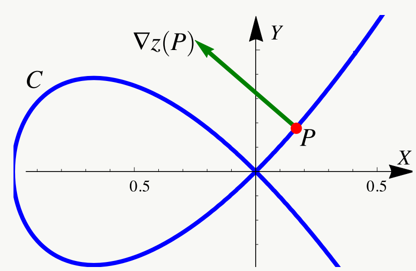


Figura 5.16: $\nabla \mathbf{z}(P)$ es un vector perpendicular a la curva en P

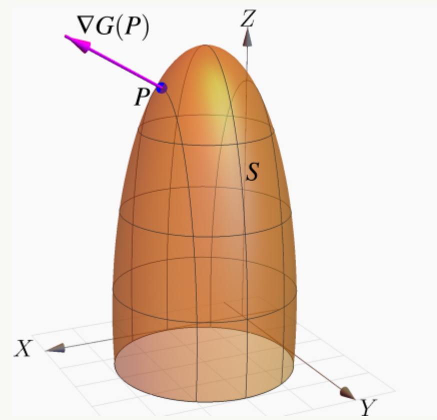
En la figura 5.16 se muestra gráficamente la situación.

Ejemplo 5.40

Considere la superficie S de ecuación

$$\frac{1}{9}(z-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2-4=0.$$

Sea $P=(3,2,1+3\sqrt{3})$. Observe que $P\in S$. Calcule un vector *perpendicular* a la superficie S en P.



Solución: De acuerdo a la teoría, el vector $\nabla\mathbf{G}(P)$ es perpendicular a la curva de nivel S en P donde

$$G(x,y,z)=\frac{1}{9}(z-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2-4.$$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{G}(x,y,z) &= (G_x,\ G_y,\ G_z)\\ &= \left(2(x-2),\ 2(y-2),\ \frac{2}{9}(z-1)\right)\end{aligned}$$

$$\nabla\mathbf{G}(P)=\left(2,0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

En la figura se muestra gráficamente la situación.

5.12 Derivada direccional

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de $z=f(x,y)$ en el punto $\mathbf{x}=(x_0,y_0)$ en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{v}=(a,b)$, para esto consideremos la superficie S con ecuación $z=f(x,y)$ (la gráfica de f) y sea $z_0=f(x_0,y_0)$. Entonces el punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ pertenece a S. El plano vertical generado por la recta L que pasa por el punto $(x_0,y_0,0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$, interseca a la superficie S en la curva C. La pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

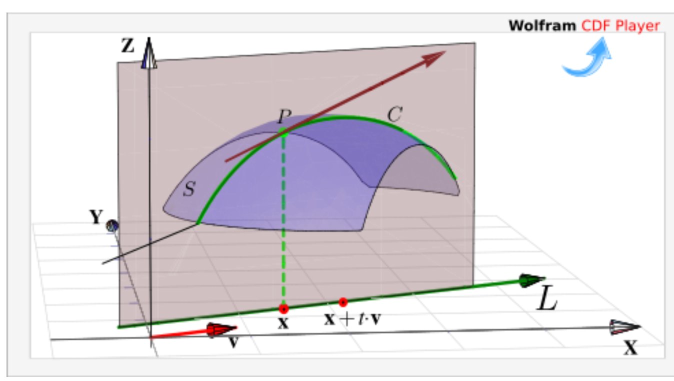


Figura 5.17: Derivada direccional

Sea $Q=(x,y,z)$ otro punto sobre la curva C, y sean $P'=(x_0,y_0)$ y $Q'=P'+h\mathbf{v}$ las proyecciones ortogonales sobre el plano XY de los puntos P y Q, entonces

$$\mathbf{P'Q'}=Q'-P'=h\mathbf{v}$$

para algún escalar h. Así pues,

$$x - x_0 = ha \Longrightarrow x = x_0 + ha$$
$$y - y_0 = hb \Longrightarrow y = y_0 + hb$$

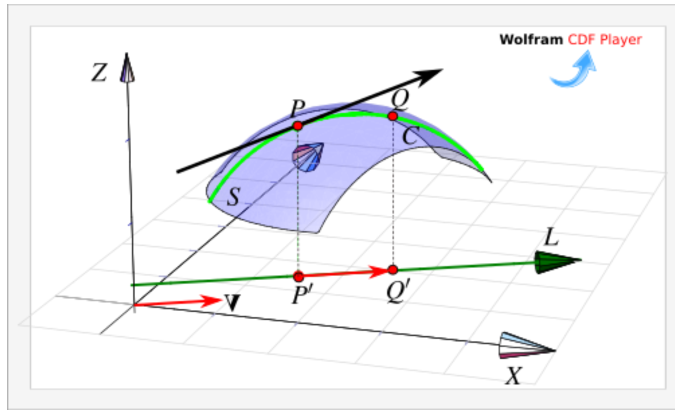


Figura 5.18: $||\mathbf{P'Q'}|| = h||\mathbf{v}||$

El cambio sobre recta L es $||\mathbf{P'Q'}|| = h||\mathbf{v}|| = h$ pues $\mathbf{v}$ es unitario, por tanto la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h||\mathbf{v}||} = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb)\ -\ f(x_0, y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \longrightarrow 0$ (siempre y cuando este límite exista) obtenemos la tasa de cambio instantánea de z (con respecto a la distancia) en la dirección de $\mathbf{v}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{v}$.

Definición 5.6 (Derivada direccional).

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sean $(x_0, y_0) \in D$ y $\mathbf{v} = (a, b)$ un vector *unitario*, entonces la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\mathbf{v}$, está dada por :

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Aplicando regla de la cadena, obtenemos una fórmula para la derivada direccional en términos del gradiente. Supongamos que queremos calcular la derivada direccional en la dirección de un vector $\mathbf{v} = (a, b)$ no necesariamente unitario, entonces si $(x, y) = (x_0 + ha,\ y_0 + hb)$,

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h||\mathbf{v}||} \\
&= \frac{1}{||\mathbf{v}||} \cdot \frac{d}{dh}\, f(x, y)\Big|_{h=0} \\
&= \frac{1}{||\mathbf{v}||} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x_h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y_h \right) \\
&= \nabla \mathbf{f}(x_0, y_0) \cdot \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}
\end{aligned}$$

Teorema 5.8 (Cálculo de la derivada direccional).

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en D, entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector no nulo $\mathbf{v} = (a, b)$ y está dada por:

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y) = \nabla \mathbf{f}(x,y)\cdot\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = f_x(x,y)\frac{a}{||\mathbf{v}||} + f_y(x,y)\frac{b}{||\mathbf{v}||}$$

Ejemplo 5.41

Calcule la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y $\mathbf{v} = (\sqrt{3},\ 1)$. Calcule $D_{\mathbf{v}}\, f(1,2)$.

Solución:

- Evaluar el gradiente: Como $\nabla \mathbf{f}(x,y) = (3x^2 - 3y,\ -3x + 8y)$ entonces $\nabla \mathbf{f}(1,2) = (-3,\ 13)$
- $||\mathbf{v}|| = 2$
- Cálculo: $\left\{\begin{array}{rcl} D_{\mathbf{u}}f(1,2) & = & \nabla \mathbf{f}(1,2)\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \\ & = & (-3,\ 13)\cdot\dfrac{(\sqrt{3},\ 1)}{2} \\ & = & -3\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 13\,\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Ejemplo 5.42

Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = x\ \text{sen}(yz)$, en el punto $P = (1,3,0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{\mathbf{k}}$.

Solución:

- El vector gradiente de la función f esta dado por

$$\nabla \mathbf{f}(x,y,z) = (\text{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$$

evaluando en P tenemos que $\nabla \mathbf{f}(1,3,0) = (0,0,3)$.

- Por otro lado, como $||\mathbf{v}|| = \sqrt{6}$, un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\hat{\mathbf{k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

- Cálculo: $D_{\mathbf{v}}f(1,3,0) = \nabla \mathbf{f}(1,3,0)\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = (0,0,3)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

Componente. La fórmula

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y) = \nabla \mathbf{f}(x,y)\cdot\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente $\nabla \mathbf{f}(P)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$

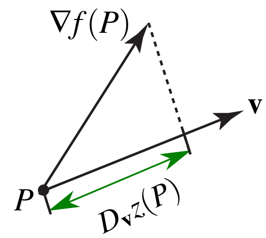


Figura 5.19

Dirección de máximo y mínimo cambio. Suponga que tenemos una función f de dos o de tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto P dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones. De modo que podemos plantear la siguiente pregunta : ¿En cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad?, y ¿cuál es la máxima razón de cambio?.

Intuitivamente, de acuerdo a la figura 5.19, la derivada direccional en P aumenta conforme el vector $\mathbf{v}$ se acerca al gradiente.

Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema.

Teorema 5.9 (Dirección de máximo cambio).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f$ en (x,y) es $||\nabla \mathbf{f}(x,y)||$ y se presenta cuando el vector no nulo $\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla \mathbf{f}(x,y)$.

Podemos justificar esto, informalmente, de la manera que sigue. Primero recordemos que si $\theta = \measuredangle u,v$ entonces $u\cdot v = ||u||\cdot||v||\cos(\theta)$. Ahora

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(x,y) &= \nabla \mathbf{f}(x,y)\cdot\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \\ &= ||\nabla \mathbf{f}(x,y)||\cos\theta. \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre el vector *unitario* $\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$ y el vector $\nabla \mathbf{f}(x,y)$.

El valor de $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ aumenta o disminuye solo si $\cos\theta$ cambia (si giramos el vector $\mathbf{v}$).

Así que el máximo valor se obtiene cuando $\cos\theta = 1$ (es decir $\theta = 0$). Por tanto $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ es máxima cuando $\theta = 0$ y en ese caso $\mathbf{v}$ y $\nabla\mathbf{f}(x,y)$ son paralelos.

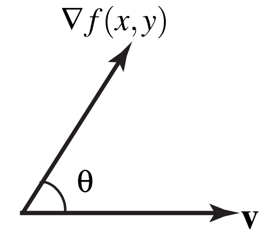


Figura 5.20

Valor mínimo: El valor mínimo de la derivada direccional en (x,y) es $-||\nabla\mathbf{f}(x,y)||$ y ocurre cuando $\mathbf{v}$ tiene la misma dirección $-\nabla\mathbf{f}(x,y)$.

Observación: f se mantiene constante sobre las curvas de nivel; la dirección (un vector $\vec{u}$) en la que el cambio (instantáneo) de f respecto a P es nulo es la dirección de un vector perpendicular a $\nabla\mathbf{f}(P)$. Que la derivada direccional se anule en P en la dirección de $\vec{u}$ no significa, por supuesto que en esta dirección la función se mantenga constante (esto solo pasa sobre las curvas de nivel) excepto que la curva de nivel sea una recta.

Ejemplo 5.43

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura de la derecha. Si la temperatura en un punto (x,y) de la placa está dada por

$$T(x,y) = 4(x-2)^2 - 7(y-0.4)^2$$

determine la dirección en la que debe de ir un insecto que está en el punto $P = (0,0)$, para que se caliente lo más rápidamente. ¿Y qué debe hacer el insecto si desea ir por un camino en el que la temperatura se mantenga constante?

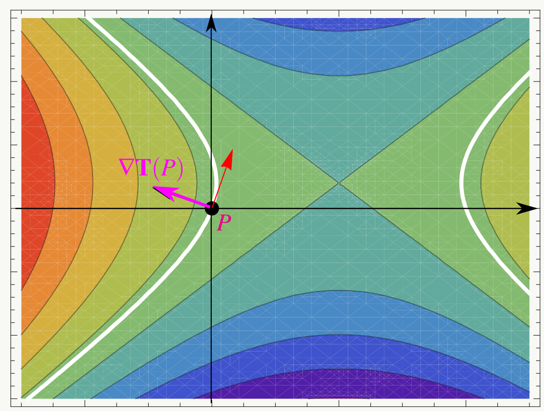


Figura 5.21: Mejor dirección, respecto a $(0,0)$.

Solución:

La dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente respeto a P es la dirección del gradiente (vector magenta en la figura): $\nabla\mathbf{T}(x,y) = (8(x-2), -14(y-0.4)) \Longrightarrow \nabla\mathbf{T}(0,0) = (-16, 5.6)$

En cuanto a la otra pregunta, aunque la derivada direccional es nula en la dirección de un vector perpendicular al gradiente (vector rojo en la figura) esto solo dice que la razón de cambio instántaneo en esa dirección es cero. La trayectoria en la que la temperatra se mantiene constante es la curva de nivel $T(x,y) = T(0,0)$ (curvas blancas). Es por ahí donde debería caminar el insecto.

Ejemplo 5.44

Suponga que la temperatura en un punto (x,y,z) en el espacio está dada por

$$T(x,y,z) \;=\; \frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$$

donde T está medida en grados centígrados y x,y,z están en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto al punto $(1,1,-2)$? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento ?

Solución: El gradiente de T es

$$\nabla \mathbf{T}(x,y,z) \;=\; -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto $P=(1,1,-2)$ obtenemos $\nabla \mathbf{T}(1,1,-2) \;=\; \dfrac{5}{8}\left(-\,\hat{\mathbf{i}}-2\,\hat{\mathbf{j}}+6\,\hat{\mathbf{k}}\right)$

Por tanto, la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente

$$\mathbf{v} \;=\; -\,\hat{\mathbf{i}}-2\,\hat{\mathbf{j}}+6\,\hat{\mathbf{k}}$$

La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente $||\nabla \mathbf{T}(1,1,-2)|| \;=\; \dfrac{5}{8}\,||-\,\hat{\mathbf{i}}-2\,\hat{\mathbf{j}}+6\,\hat{\mathbf{k}}|| \;=\; \dfrac{5\sqrt{41}}{8}$

Ejemplo 5.45

Considere la superficie $S:\; x^2+y^2+z^2=4$ y $P=\left(1/\sqrt{3},\,1/\sqrt{3},\,\sqrt{10/3}\right)$. Derivando implícitamente obtenemos,

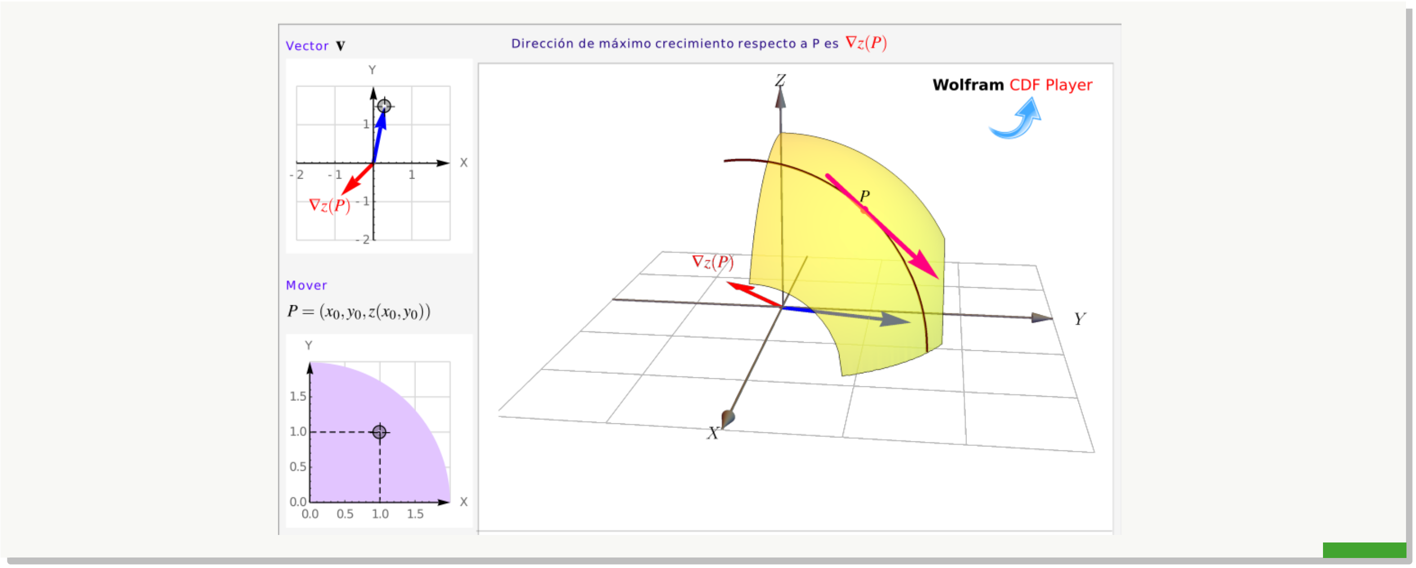
$$\nabla \mathbf{z} = \left(-\frac{x}{z},\,-\frac{y}{z}\right) \quad \text{y} \quad \nabla \mathbf{z}(P) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\,-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

En particular, la pendiente de la recta tangente en P en la dirección de $\mathbf{v}=(1,1)$ es

$$D_{(1,1)}z(P) = \nabla \mathbf{z}(1/\sqrt{3},\,1/\sqrt{3})\cdot\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1.41421$$

mientras que la pendiente de la recta tangente en P en la dirección de $\nabla \mathbf{z}(P)$ es

$$D_{\nabla \mathbf{z}(P)}z(P) = \nabla \mathbf{z}(P)\cdot\frac{\nabla \mathbf{z}(P)}{||\nabla \mathbf{z}(P)||} = ||\nabla \mathbf{z}(P)|| = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$$



Ejercicios

5.12.1 Sea $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ la ecuación de una superficie S.

a.) Calcule $D_{\mathbf{u}} f(R)$ si $\mathbf{u} = (-2,1)$ y $R = (1,-1,2)$ es un punto en la superficie.

b.) Determine el punto $P = (a,b,c) \in S$ para el cual la derivada direccional de f en P es $\sqrt{2}$ en dirección de $\mathbf{u} = (-2,1)$ y $\sqrt{5}$ en la dirección de $\mathbf{v} = (1,1)$.

c.) Determine un vector $\mathbf{u}$ para el cual la derivada direccional en $R = (1,-1,2) \in S$ es máxima y calcule su valor.

5.12.2 Sea $x^2 + xyz + z^3 = 1$ la ecuación de una superficie S.

a.) Calcule $D_{\mathbf{u}} z(Q)$ si $u = (-2,1)$ y $Q = (1,2,0) \in S$

b.) Determine $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que en $P = (1,b,0) \in S$ y $D_{\mathbf{u}} z(P) = \sqrt{2}$.

c.) Determine un vector $\mathbf{u}$ para el cual la derivada direccional en $R = (1,-1,1) \in S$ es mínima y calcule su valor.

5.12.3 Considere la superficie S de ecuación $z^3 + xz + y = 1$. $P = (1,1,0) \in S$

a.) Calcule $D_{\mathbf{u}} z(P)$ donde $\mathbf{u} = (1,-2)$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en P y en cuál dirección $\mathbf{v}$ se alcanza?

5.12.4 Considere la superficie S de ecuación $xyz^2 = 8z$. $P = (1,1,8) \in S$

a.) Calcule $D_{\mathbf{u}}z(P)$ donde $\mathbf{u} = (-5, \sqrt{2})$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en P y en cuál dirección $\mathbf{v}$ se alcanza?

5.12.5 Considere la superficie S de ecuación $e^{xz} + xy = yz + 1$. Sea $P = (0,1,0) \in S$. Calcule la derivada direccional de z en P en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1,2)$.

5.12.6 Considere la superficie S de ecuación $x^2 + xz^3 = -y^2 z$ y $P = (1,0,-1) \in S$. Calcule $D_{\mathbf{u}}z(P)$ donde $\mathbf{u} = (1,-1)$

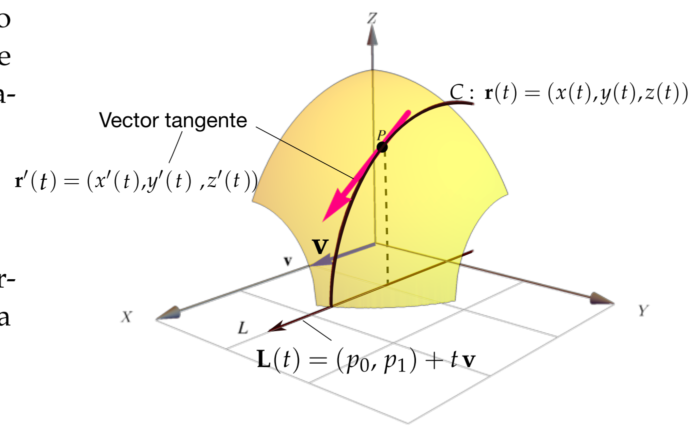
5.13 Plano tangente, rectas tangentes y un vector normal.

Recta tangente "en la dirección de v". Sea S una superficie suave de ecuación $S: \; z = f(x,y)$. Como vimos en la introducción a las parametrizaciones de una curva, si una curva C, contenida en S, está parametrizada como

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\; y(t),\; z(x(t), y(t)))$$

entonces, si tenemos un punto cualquiera es esta curva, digamos, $Q = \mathbf{r}(t)$, entonces un vector tangente a esta curva en P es

$$\mathbf{r}'(t) = \big(x'(t),\; y'(t),\; \nabla \mathbf{z}(P) \cdot (x'(t),\; y'(t)\;)\big)$$



La recta tangente a $S: \; z = f(x,y)$ en $P = (p_0, p_1, p_2) \in S$, "en la dirección de $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$" se refiere a la recta tangente, en P, a la curva C de intersección entre la superficie S y el plano generado por la recta

$$\mathbf{L}(t) = (p_0, p_1) + t \cdot (v_0, v_1)$$

Como $x = x(t) = p_0 + t\,v_0$ y $y = y(t) = p_1 + t\,v_1$, la curva C tiene ecuación paramétrica

$$C: \; \mathbf{r}(t) = (p_0 + t\,v_0,\; p_1 + tv_1,\; z(x,\; y)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x &= p_0 + t\,v_0 \\ y &= \,= p_1 + t\,v_1 \\ P &= \mathbf{r}(0) \end{cases}$$

Entonces: como $P = \mathbf{r}(0)$, un vector tangente en P "en la dirección de $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$" es

$$\mathbf{r}'(0) = (v_0,\;\; v_1, \nabla\, \mathbf{z}P) \cdot (v_0, v_1))$$

Por tanto una ecuación vectorial de la recta tangente en P "en la dirección de $\mathbf{v}$" sería

$$\mathbf{L_T}(t) = P + t \cdot \mathbf{r}'(0), \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{L_T}(t) = P + t \cdot (v_0,\;\; v_1, \nabla\, \mathbf{z}(P) \cdot (v_0, v_1))$$

Podemos multiplicar $\mathbf{r}'(0)$ por $1/||\mathbf{v}||$ si queremos que esta ecuación quede en términos de la derivada direccional,

$$\mathbf{L_v}(t) = P + t \cdot \frac{\mathbf{r}'(0)}{||\mathbf{v}||} \;=\; P + t \cdot \left(\frac{v_0}{||\mathbf{v}||}, \frac{v_1}{||\mathbf{v}||}, D_{\mathbf{v}} z(P) \right)$$

Rectas tangentes en la dirección de $\mathbf{v}$

Si S tiene ecuación $z = f(x,y)$ con f diferenciable, entonces una ecuación paramétrica de la recta tangente a $P = (p_0, p_1, p_2)$ en la dirección del eje X se obtiene tomando $\mathbf{v} = (1,0)$ y una ecuación paramétrica de la recta tangente a P en la dirección del eje Y se obtiene tomando $\mathbf{v} = (0,1)$

- $\mathbf{L_X}(t) = P + t \cdot (1,\, 0,\, z_x(P))$ o $\mathbf{L_X}(x) = (x, p_1, p_2 + (x - x_0) f_x(p_0,\, p_1))$
- $\mathbf{L_Y}(t) = P + t \cdot (0,\, 1,\, z_y(P))$ o $\mathbf{L_y}(x) = (p_0, y, p_2 + (y - p_1) f_y(p_0,\, p_1))$
- La recta tangente en P, en dirección de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ es

$$\mathbf{L_v}(t) = P + t \cdot (v_0,\; v_1,\; \nabla\, \mathbf{z}(P) \cdot (v_0, v_1))$$

o, en términos de la derivada direccional, $\mathbf{L_v}(t) = P + t \cdot \left(\frac{v_0}{||\mathbf{v}||}, \frac{v_1}{||\mathbf{v}||}, D_{\mathbf{v}} z(P) \right)$

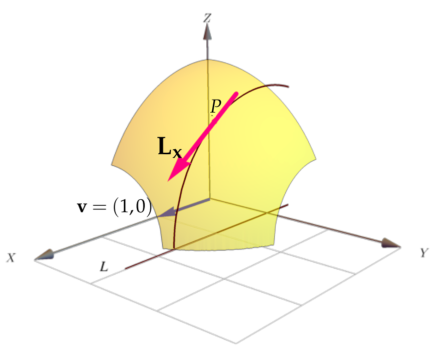


Figura 5.22: $\mathbf{v} = (1,0)$

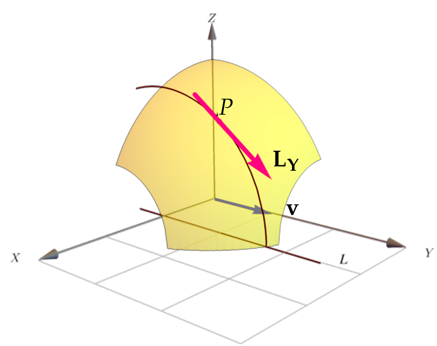


Figura 5.23: $\mathbf{v} = (0,1)$

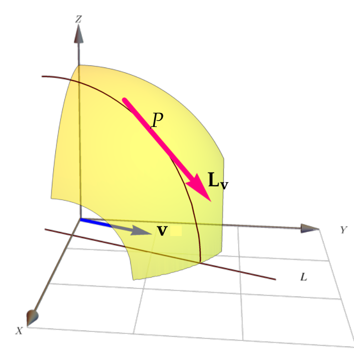


Figura 5.24: $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$

Un Vector normal. Sea $S:\; z = f(x,y)$ una superficie suave y $P \in S$. Del párrafo anterior sabemos que dos vectores tangentes a S en P son $(1,\, 0,\, z_x(P))$ y $(0,\, 1,\, z_y(P))$, entonces un vector normal a S en P es

$$\mathbf{N}(P) = (1,\, 0,\, z_x(P)) \times (0,\, 1,\, z_y(P)) = (-f_x(P), -f_y(P), 1)$$

Si tenemos $S:\; G(x,y,z) = 0$, entonces usamos derivación implícita y (si $G_z(P) \neq 0$)

$$\mathbf{N}(P) = (-f_x(P), -f_y(P), 1) = \left(\frac{G_x}{G_z}, \frac{G_y}{G_z}, \frac{G_z}{G_z} \right)$$

Como solo nos interesa la dirección, podemos tomar $\mathbf{N}(P) = (G_x(P),\; G_y(P),\; G_z(P))$ como un vector normal.

Un vector normal

No hay un solo vector normal, aunque todos tienen la misma dirección, el tamaño puede variar.

- Si S tiene ecuación $z = f(x,y)$ entonces si ponemos $G(x,y,z) = z - f(x,y)$, un vector normal es

$$\mathbf{N} = (-z_x,\; -z_y, 1)$$

- Si S está definida de manera implícita por $G(x,y,z)=0$, entonces un vector normal es

$$\mathbf{N_1}=\nabla G=(G_x,\; G_y,\; G_z) \quad \text{o también} \quad \mathbf{N_2}=\left(\frac{G_x}{G_z},\; \frac{G_y}{G_z},\; 1\right)=\frac{1}{G_z}(G_x,\; G_y,\; G_z) \quad \text{si} \quad G_z\neq 0.$$

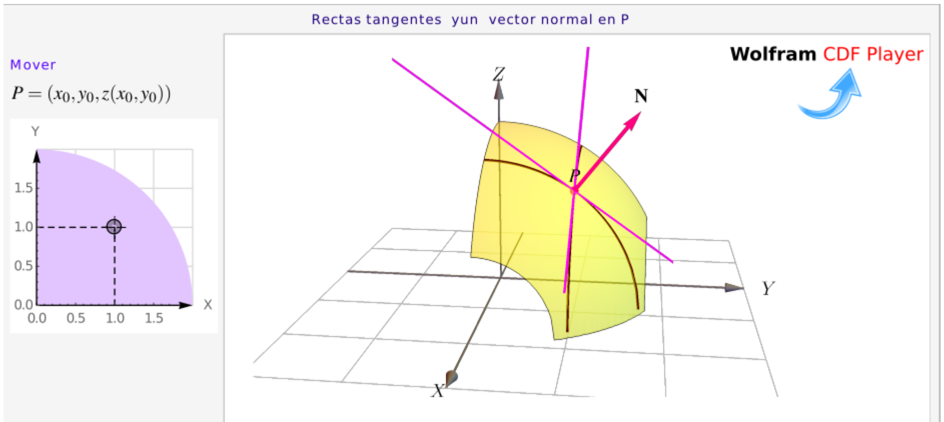


Figura 5.25: Tangentes y un vector normal a S en P.

Ecuación cartesiana del plano tangente. Podemos obtener la ecuación cartesiana del plano tangente (si existiera) usando un vector normal a la superficie S. Como ya vimos, si $S:\; G(x,y,z)=0$, entonces un vector normal a S en $P\in S$ es

$$\mathbf{N}(P)=\nabla G(P)$$

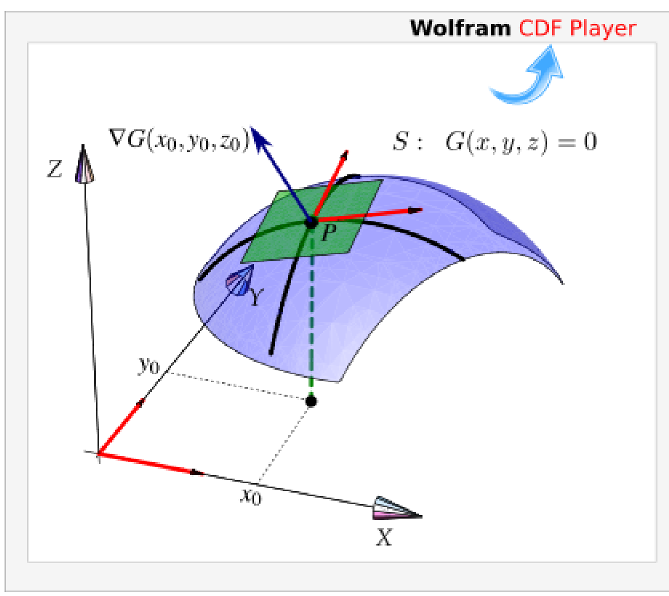


Figura 5.26: $\nabla\mathbf{G}(P)$ es perpendicular (al plano tangente) a S en P.

Así, una ecuación del plano tangente en $P\in S$ es

$$ax+by+cz=d \qquad \text{con} \qquad (a,b,c)=\nabla\mathbf{G}(P) \qquad \text{y} \qquad d=\nabla\mathbf{G}(P)\cdot P.$$

Plano Tengente

- Si la superficie S tiene ecuación $G(x,y,z)=0$ con G diferenciable, el plano tangente en $P\in S$ tiene ecuación cartesiana

$$G_x(P)\,x \;+\; G_y(P)\,y \;+\; G_z(P)\,z = \nabla\mathbf{G}(P)\cdot P$$

- Si S tiene ecuación $z=f(x,y)$ con f diferenciable, entonces $G(x,y,z)=z-f(x,y)$ y $\nabla\mathbf{G}(P)=(-z_x(P),\,-z_y(P),\,1)$, por tanto el plano tangente en $P=(p_0,p_1,p_2)\in S$ tiene ecuación cartesiana

$$\begin{aligned} G_x(P)\,x \;+\; G_y(P)\,y \;+\; G_z(P)\,z &= \nabla\mathbf{G}(P)\cdot P \\ z_x(P)\,x \;+\; z_y(P)\,y \;+\; z &= (-z_x(P),\,-z_y(P),\,1)\cdot(p_0,p_1,p_2) \end{aligned}$$

Es decir,

$$z_x(P)\,(x-p_0)+z_y(P)\,(y-p_1) \;=\; z-p_2$$

Ejemplo 5.46

Sea S la superficie de ecuación $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$. Aunque $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, no hay plano tangente pues la función es discontinua en este punto (aunque esté definida).

Ejemplo 5.47

Sea S una superficie de ecuación $z=\ln(x^2+y^2)+x(y+3)$ y $P=(1,0,3)\in S$.

a.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X, es decir, en la dirección de $\mathbf{v}=(1,0)$.

b.) Determine una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{v}=(-1,3)$.

c.) Determine una ecuación cartesiana del plano tangente a S en P

Solución: Podemos usar las ecuaciones que indicamos más arriba.

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}+y+3$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_Q=5.$ Entonces una ecuación de la recta tangente en la dirección del eje X es

$$\mathbf{L}_x(t)=P+t\cdot(1,\,0,\,5)$$

b.) Como $\nabla z=\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}+y+3,\ \dfrac{2y}{x^2+y^2}+x\right)$, entonces, una ecuación de la recta tangente en la dirección $\mathbf{v}=(-1,3)$ es

$$\mathbf{L}_v(t) = P + t\cdot(-1,\,3,\,\nabla z(1,0)\cdot(-1,3)) \;=\; P + t\cdot(-1,\,3,\,(5,1)\cdot(-1,3)) \;=\; P + t\cdot(-1,\,3,\,-2)$$

o, en términos de la derivada direccional,

$$\mathbf{L}_v(t) = P + t\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\,\frac{3}{\sqrt{10}},\,\frac{-2}{10}\right)$$

c.) Si $G(x,y,z) = z - \ln(x^2+y^2) - x(y+3)$ entonces $\nabla G = \left(-\dfrac{2x}{x^2+y^2} + y + 3,\; -\dfrac{2y}{x^2+y^2} + x,\; 1\right)$.
Un vector normal es $\mathbf{N} = (-5,-1,1)$. Una ecuación cartesiana del plano tangente a S en Q es

$$-5x - y + z = (-5,-1,1)\cdot(1,0,3) = -2$$

Ejemplo 5.48

Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2$. Obtener una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P = (1,1,3)$.

Solución:

Primera manera. En este caso $z_x(x,y) = 2x$ y $z_y(x,y) = 4y$. Entonces una ecuación cartesiana sería,

$$z_x(1,1)\,(x-1) + z_y(1,1)\,(y-1) \;=\; z-3,$$

es decir,

$$2(x-1) + 4\,(y-1) \;=\; z-3,$$

Otra manera. Sea $S:\; G(x,y,z) = z - x^2 - 2y^2 = 0$. Entonces un vector normal al plano tangente a S en P es $\nabla \mathbf{G} = (-2x,\,-4y,\,1)$. Ahora, $\nabla\mathbf{G}(1,1,3) = (-2,-4,1)$, entonces una ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} -2x - 4y + 1\,z &= \nabla\mathbf{G}(1,1,3)\cdot P \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.49

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Sea $P = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S$. Calculemos la ecuación cartesiana del plano tangente en P.

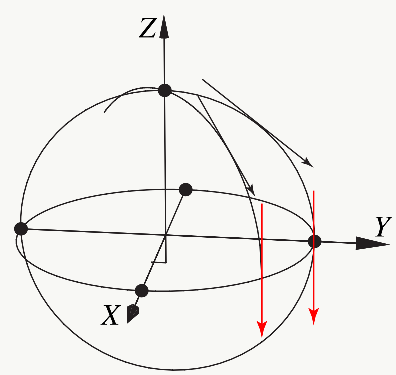
- La ecuación de S es $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z) = (2x,\, 2y,\, 2z)$.
- $N = \nabla\mathbf{G}(P) = (2/\sqrt{3},\, 2/\sqrt{3},\, 2/\sqrt{3})$ y $d = P\cdot\nabla\mathbf{G}(P) = 2$
- Una ecuación cartesiana del plano tangente: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,y + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,z = 2$ o también $x+y+z=\sqrt{3}$.

Ejemplo 5.50

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1.$ y $P=(0,\,1,\,0)\in S.$ Calcule la ecuación del plano tangente a S en $P.$

Solución: Sea $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1.$ Entonces $\nabla\mathbf{G}(x,y,z) = (2x,\; 2y,\; 2z).$ Por tanto un vector normal es $N = G(0,\,1,\,0) = (0,\,2,\,0)$



La ecuación cartesiana del plano tangente a S en P es $0\cdot x + 2\cdot y + 0\cdot z = 2,$ es decir $y=1.$

Observe que en este punto, como $\nabla\mathbf{z}(x,y) = \left(-\dfrac{x}{z},\, -\dfrac{x}{z}\right)$, la derivada direccional no existe.

Ejemplo 5.51

Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1.$ Encuentre los puntos $Q=(a,b,c)\in S$ tal que el plano tangente en Q sea paralelo al plano $2x-y+3z=1.$

Solución: Q tiene tres incógnitas así que necesitamos, en principio, tres ecuaciones.

- Como $Q\in S,$ esto nos da una ecuación: $a^2+b^2+c^2=1.$
- Como el plano tangente en Q es paralelo al plano $2x-y+3z=1,$ sus vectores normales deben ser paralelos, es decir

$$\nabla\mathbf{G}(Q) = \lambda\,(2,-1,3)$$

  esto nos da tres ecuaciones adicionales y una incógnita más, $\lambda.$

- Para encontrar Q solo debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &=& 1 \\ \nabla \mathbf{G}(Q) &=& \lambda\,(2,-1,3) \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &=& 1 \\ (2a,2b,2c) &=& \lambda\,(2,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 &=& 1 \\ 2a &=& 2\lambda \\ 2b &=& -\lambda \\ 2c &=& 3\lambda \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos las dos soluciones

$$Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2/7}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right),\ \lambda = -\sqrt{2/7} \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2/7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right),\ \lambda = \sqrt{2/7}$$

Ejercicios

5.13.1 Sea $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ la ecuación de una superficie S.

a.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R = (1,-1,2)$ "en la dirección del eje X" (en la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,0)$)

b.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R = (1,-1,2)$ "en la dirección del eje Y" (en la dirección del vector $\mathbf{v} = (0,1)$)

c.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en $R = (1,-1,2)$ "en la direción del vector $\mathbf{u} = (-2,1)$"

d.) Determine un vector normal a S en $R = (1,-1,2)$

e.) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R = (1,-1,2) \in S$.

f.) Determine un vector $\mathbf{u}$ para el cual la derivada direccional en $R = (1,-1,2) \in S$ es máxima y calcule su valor.

5.13.2 Sea $x^2 + xyz + z^3 = 1$ la ecuación de una superficie S. Encuentre una ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R = (1,-1,1) \in S$.

5.13.3 Considere la superficie $S : xyz + \ln(xyz) - z = 0$ y el punto $P(1,1,1) \in S$.

a.) Determine una ecuación del plano tangente a S en P.

b.) Determine una ecuación de la recta tangente a S en P en la dirección del eje X.

c.) Determine una ecuación de la recta tangente a S en P, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (2,3)$.

d.) (*) Determine si hay algún punto Q en la superficie S en la que el plano tangente sea $x+y+z=0$

5.13.4 Considere la superficie $S : z = x^2 + y^2$.

a.) (*) ¿Existe $P \in S$ tal que una ecuación del plano tangente a S en P es $2x+2y+z=0$?

b.) Determine un punto $Q \in S$ si se sabe que las rectas tangentes a S en Q, en las direcciones de $\mathbf{u} = (1,1)$ y $\mathbf{v} = (-1,1)$ tienen una ecuación vectorial $L_u(t) = Q + t\,(1,1,5)$ y $L_v(t) = Q + t\,(-1,1,4)$, respectivamente.

5.13.5 Considere la superficie S de ecuación $z^3 + xz + y = 1$. $P = (1,1,0) \in S$. Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P

5.13.6 Calcule una ecuación vectorial de la recta normal a la superficie $S:\ x^2+y^2+z^2 = 1$ en el punto $P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$

5.13.7 Considere la superficie S de ecuación $e^{xz} + xy = yz + 1$. Sea $P = (0,1,0) \in S$.

a.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la dirección del eje X" (en la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,0)$)

b.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la dirección del eje Y" (en la dirección del vector $\mathbf{v} = (0,1)$)

c.) Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a S en P "en la direción del vector $\mathbf{v} = (2,-4)$"

d.) Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente a S en P.

5.13.8 Considere la superficie S de ecuación $x^2 + xz^3 = -y^2 z$ y $P = (1,0,-1) \in S$. Calcule una ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto P

5.13.9 Considere la superficie $S:\ z = \cos(x + \operatorname{sen} y)$

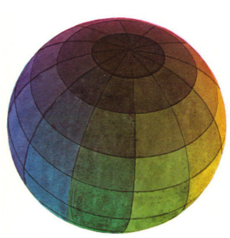
a.) Calcule $D_{\mathbf{v}} z(1,1)$ donde $\mathbf{v} = (2,1)$

b.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección del eje X

c.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección del eje Y

d.) Calcule una ecuación vectorial de la recta tangente a S en $P = (1,1,z(1,1))$ en la dirección de $\mathbf{v} = (2,1)$

e.) Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P = (1, 1, z(1, 1))$



Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

6 — Máximos y Mínimos

6.1 Introducción

¿Por qué, en una variable, en un punto crítico $\mathbf{p}$, f alcanza un máximo local si $f''(\mathbf{p}) < 0$?. En una variable, los puntos críticos de f son los puntos $x = \mathbf{p}$ en los que $f'(\mathbf{p}) = 0$ (o en los que f' se indefine). Muchas veces se puede clasificar este punto crítico con el signo de $f''(\mathbf{p})$. Esto se puede establecer usando polinomios de Taylor. Según el teorema de Taylor, en los alrededores de $\mathbf{p}$

Interpretación geométrica. Observe que le signo de $f''(\mathbf{p}) \neq 0$ decide el signo (y por tanto la concavidad) del polinomio de Taylor de orden dos: Como $f'(\mathbf{p}) = 0$,

$$f(x) \;-\; f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\,f''(\mathbf{p})(x-\mathbf{p})^2 + R_2(\mathbf{p},x)$$

por tanto, la cuadrática $y = f''(\mathbf{p})(x-\mathbf{p})^2$ siempre es positiva o siempre es negativa y además domina al resto R_2 en algún entorno de $\mathbf{p}$. Si $f''(\mathbf{p}) = 0$ no podemos decir algo del signo (solo nos queda el resto $R_2(\mathbf{p},x)$).

En la figura que sigue se muestra la gráfica del polinomio de Taylor P_2 y la gráfica de f. Recordemos que

$$P_2(x) = f(\mathbf{p}) + f'(\mathbf{p})(x-p) + \frac{f''(\mathbf{p})}{2}\,(x-h)^2$$

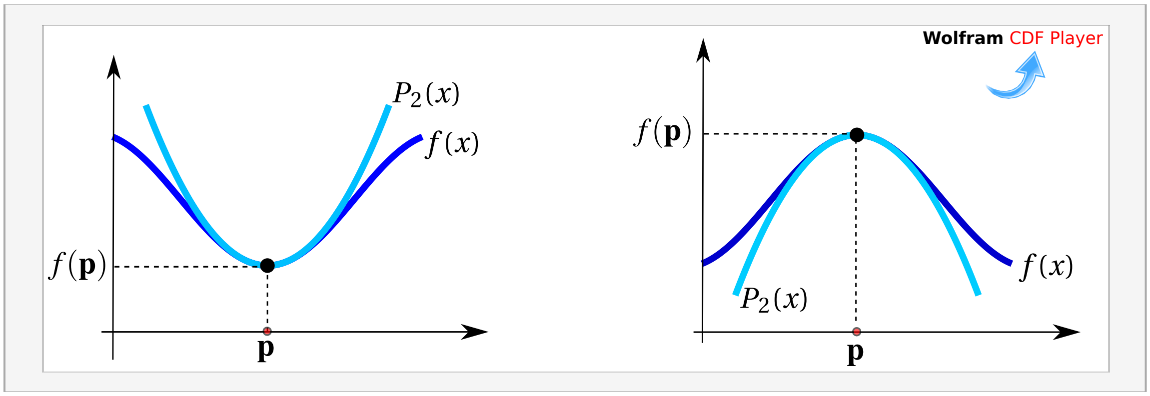


Figura 6.1: El signo de $f''(\mathbf{p})$ se usa para clasificar puntos críticos.

Formalmente, el signo de $f(\mathbf{p}+h) \;-\; f(\mathbf{p})$ coincide con el signo del término de segundo orden (la parábola) $y = f''(\mathbf{p})(x-\mathbf{p})^2$ en un entorno de $\mathbf{p}$

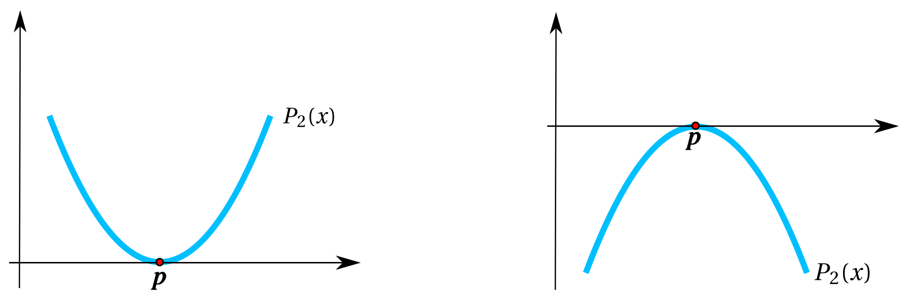


Figura 6.2: Parábolas $f''(\mathbf{p})(x-\mathbf{p})^2$ con $f''(\mathbf{p}) > 0$ y $f''(\mathbf{p}) < 0$

6.2 Máximos y mínimos locales en dos variables.

Como en cálculo en una variable, los extremos *locales* de una función de dos variables son puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo en un entorno del dominio de la función. Si la función está definida en una región , los extremos *globales* son los puntos donde la función toma valores máximos o mínimos en toda esta región, y esto podría suceder en cualquier parte de la región en consideración. Recordemos que un entorno abierto alrededor de $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ de radio δ es el conjunto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, ||\mathbf{x}-\mathbf{p}|| < \delta\}$, es decir, un disco (sin borde) con centro en $\mathbf{p}$ y de radio δ.

Definición 6.1 (Extremos locales).

Sea f función de dos variables, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ f tiene un máximo local en $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ si existe un entorno abierto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$ tal que $f(x,y) \leqslant f(\mathbf{p})$ para todo $(x,y) \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$. El punto $(p_1, p_2, f(\mathbf{p}))$ se dice un máximo local de f y el número $f(\mathbf{p})$ es el máximo de f en el entorno $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$.

Sea f función de dos variables, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. f tiene un mínimo local en $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ si existe un entorno abierto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$ tal que $f(x,y) \geqslant f(\mathbf{p})$ para todo $(x,y) \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$. El punto $(p_1, p_2, f(\mathbf{p}))$ se dice un mínimo local de f y el número $f(\mathbf{p})$ es el mínimo de f en el entorno $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$.

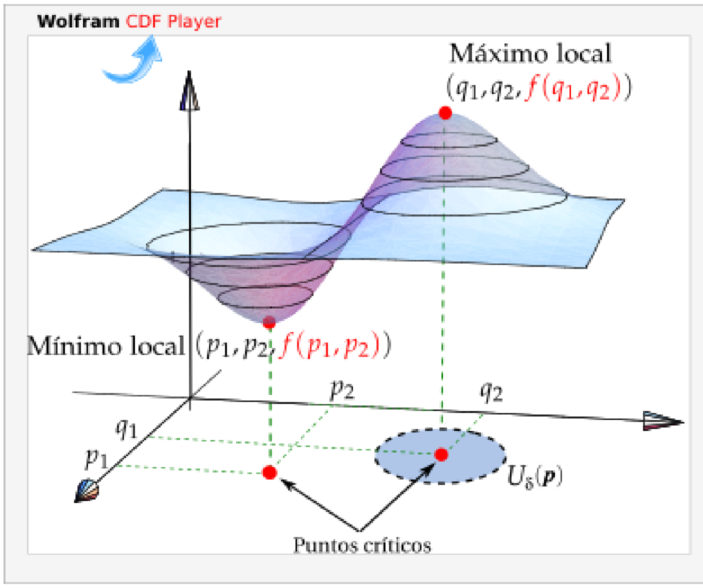


Figura 6.3: Puntos críticos y un máximo y un mínimo local.

Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos en el dominio de f, entonces f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto) en $\mathbf{p}$.

Puntos críticos y extremos locales

Definición 6.2 (Punto crítico).

Un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de f si $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$, es decir, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 0$

También si $\mathbf{p}$ es un punto en el interior del dominio de f, es punto crítico si ∇f no esta definida en este punto, pero aquí solo consideramos extremos "suaves".

Definición 6.3 (Punto de silla).

Un punto crítico $\mathbf{p}$ donde f no alcanza un máximo ni mínimo local se llama *punto de silla*

Si $\mathbf{p}$ es un punto de silla de f, hay un entorno $\mathcal{U}_\mathbf{p}$ alrededor de $\mathbf{p}$ en el que hay elementos $\mathbf{x}$ para los que $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) > 0$ y hay elementos $\mathbf{x}$ en los que $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) < 0$. Esta definición de "punto de silla" puede variar según el texto.

Como en cálculo en una variable, los extremos locales se alcanzan en puntos críticos, es decir, en el caso de que f sea diferenciable, la derivada de f se anula en los puntos críticos. Pero también hay puntos críticos en los que f no alcanza máximos ni mínimos locales (los llamados puntos de silla).

Teorema 6.1

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ es un extremo local de f entonces $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$, es decir, $\mathbf{p}$ es punto crítico de f.

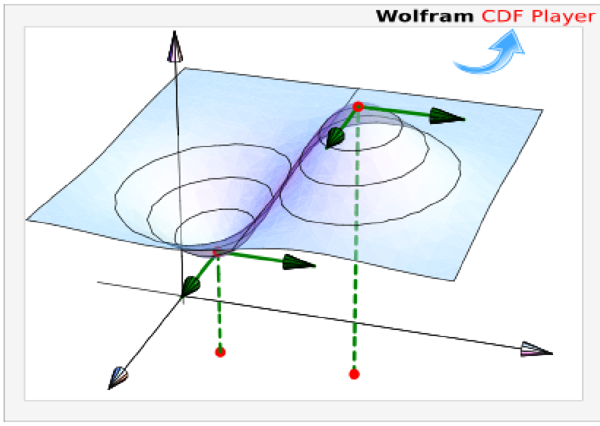


Figura 6.4: En los extremos locales, $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$

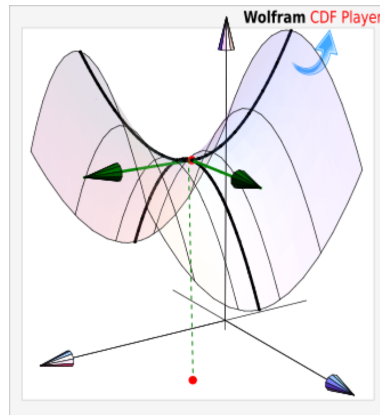


Figura 6.5: En los puntos de silla, $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$

6.3 Clasificación de puntos críticos

De manera análoga al caso de una variable, usamos el polinomio de Taylor de segundo orden (como una primera opción) para clasificar puntos críticos.

La fórmula de Taylor *de segundo orden* en dos variables, alrededor de (a,b) se puede definir en un entorno $\mathcal{U}$ abierto alrededor de (a,b), si $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, es de clase C^2. En ese caso,

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \\ &+ \tfrac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{x} = (x,y)$, $\mathbf{p} = (a,b)$, $(h,k) = (x-a, y-b)$, $A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$ y $C = f_{yy}(a,b)$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{p}) + f_x(\mathbf{p})h + f_y(\mathbf{p})k + \tfrac{1}{2}\left[f_{xx}(\mathbf{p})h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{p})hk + f_{yy}(\mathbf{p})k^2\right] \\ &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (h,k) + \tfrac{1}{2}\left[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right] + \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \end{aligned}$$

donde el resto $\mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ disminuye más rápido que $||\mathbf{x}-\mathbf{p}||^2$, es decir, $\dfrac{\mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{||\mathbf{x}-\mathbf{p}||^2} \to 0$ si $\mathbf{x} \to \mathbf{p}$

Ahora, si $\mathbf{p}$ es un punto crítico de f, entonces

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right] + \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = f_{xx}(\mathbf{p}) \\ B = f_{xy}(\mathbf{p}) \\ C = f_{yy}(\mathbf{p}) \end{cases}$$

Para determinar si en el el punto crítico $\mathbf{p}$, la función f alcanza un máximo o mínimo local, debemos determinar el signo de $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ en un entorno de $\mathbf{p}$, para saber si $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{p})$ o $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{p})$. Si en cualquier entorno de $\mathbf{p}$ hay puntos donde f cambia de signo, entonces tenemos un punto de silla.

La teoría es similar al caso de una variable: En presencia de extremos locales, el signo de $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ es el signo de $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ en un entorno suficientemente pequeño de cada punto crítico donde f alcanza máximos o mínimos locales[1]. Si el determinante $D_2 = AC - B^2 > 0$, entonces la forma cuadrática $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$, es siempre positiva o siempre negativa. Si $D_2 = AC - B < 0$ la forma cuadrática cambia de signo.

Podemos analizar el signo de $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ completando cuadrados. Sea $D_2 = AC - B^2$, entonces

$$A(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) = (Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2 \implies A(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad D_2 > 0$$

Entonces

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \geqslant 0 \quad \text{si} \quad D_2 > 0 \quad \text{y} \quad A > 0$$

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \leqslant 0 \quad \text{si} \quad D_2 > 0 \quad \text{y} \quad A < 0$$

con esto se puede establecer que

a.) $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) \geqslant 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$ si $D_2 > 0$ y si $A > 0$

b.) $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) \leqslant 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$ si $D_2 > 0$ y si $A < 0$

Si $D_2 < 0$ entonces, podemos razonar con varios casos. Por simplicidad solo consideremos dos casos con $A \neq 0$ y $C \neq 0$. Si $B = 0$ entonces A y C tienen signos contrarios, por lo que la forma cuadrática cambia de signo sobre las rectas $x = 0$ y $y = 0$. Si $B \neq 0$, entonces la forma cuadrática cambia de signo sobre las rectas $y = 0$ y $By = -Ax$. Entonces se podría establecer, comparando $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) \geqslant 0$ con la forma cuadrática, que $\mathbf{p}$ es un punto de silla.

Si $D_2 = 0$ entonces en general, si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, hay rectas que pasan por el origen, sobre las que el término $(Ah + Bk)^2$ se anula, entonces $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sobre estas rectas, es decir, no podemos decir algo acerca del signo de $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$.

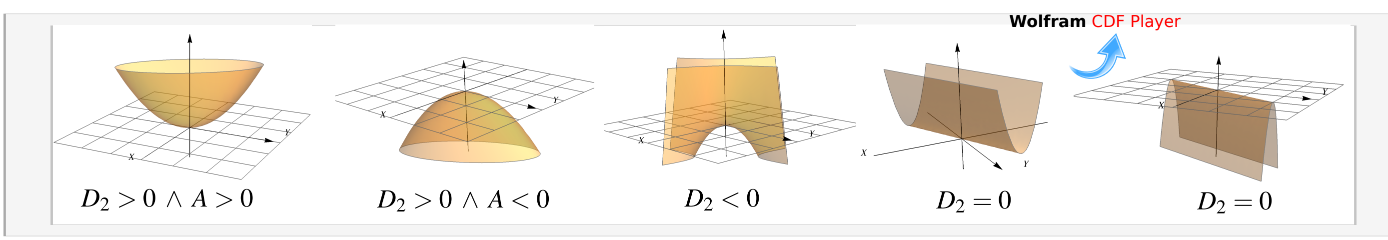


Figura 6.6: Forma cuadrática $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ para distintos valores de D_2 y A

[1]Esto es así porque debido a una propiedad de las formas cuadráticas que son *siempre positivas*: existe un $M > 0$ tal que para todo h

$$\frac{1}{2}\left[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right] \geqslant M||\mathbf{x} - \mathbf{p}||^2$$

y como $\dfrac{\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{||\mathbf{x} - \mathbf{p}||^2} \to 0 \quad$ si $\quad \mathbf{x} \to \mathbf{p}$, entonces hay un entorno alrededor de $\mathbf{p}$ en el que $|\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{p})| < M||\mathbf{x} - \mathbf{p}||^2$, es decir, la forma cuadrática domina al resto $\mathbf{r}$ en este entorno. El caso de una forma cuadrática *siempre negativa* es similar. Se usa la misma idea si la forma cuadratica cambia de signo para mostrar que Δf también cambia de signo.

Específicamente: *Si* f *tiene segundas derivadas continuas y si el determinante* $D_2 = AC - B^2$ *es positivo, entonces el signo de* $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ *es el signo de* $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$, *en un entorno suficientemente pequeño de* $\mathbf{p}$. *Si el determinante* H *es negativo, entonces* $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ *cambia de signo con la forma cuadrática, en trayectorias contenidas en un entorno de* $\mathbf{p}$.

En vista de la anterior afirmación, la clasificación de los puntos críticos depende del signo de la forma cuadrática (si $D_2 \neq 0$). El signo de la forma cuadrática es fácil de establecer usando el discriminante D_2. La idea geométrica es la que se muestra a continuación.

Teorema 6.2 (Condición suficiente).

Sea $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el "discriminante" $D_2(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ es punto crítico de f, entonces

a.) si $D_2(x_0,y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local en (x_0,y_0).

b.) si $D_2(x_0,y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, entonces f alcanza un máximo local en (x_0,y_0).

c.) Si $D_2(x_0,y_0) < 0$, entonces $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es un punto de silla.

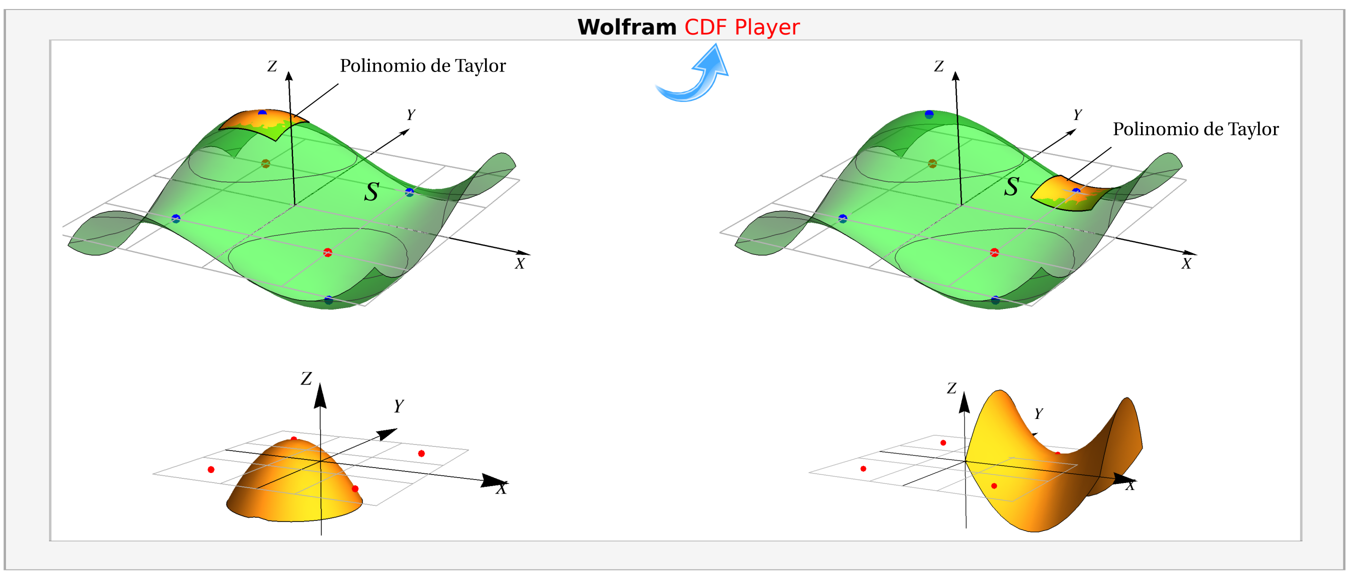


Figura 6.7: Polinomio de Taylor $P_2(x,y)$ y la forma cuadrática, sobre la superficie S

El teorema solo da condiciones suficientes: No nos dice algo si $D_2(x_0,y_0) = 0$ pues, como ya vimos en este caso, en un entorno de $\mathbf{p}$,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) \;=\; \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{p})$$

por lo que no podemos determinar el signo de $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ (ver el ejercicio 6.3.1). En este caso se podría usar otros métodos para clasificar.

En el teorema se puede usar f_{yy} en vez de f_{xx} pues si $D_2(x_0,y_0)>0,$ ambas tienen el mismo signo.

Ejemplo 6.1 (Polinomio de Taylor y clasisificación de puntos críticos).

Considere la superficie $S:\ z = x\,e^{-x^2-y^2+1}+1.$

Puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x=0 & \Longrightarrow & e^{-x^2-y^2+1}(1-2x^2) & = & 0 & \Longrightarrow & x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (E1) \\ f_y=0 & \Longrightarrow & -2xye^{-x^2-y^2+1} & = & 0 & \Longrightarrow & x=0 \vee y=0 \quad (E2) \end{cases}$$

Una solución (x_0,y_0) del sistema requiere que se anule la ecuación E1 y la ecuación E2. La ecuación E1 solo tiene como soluciones posibles $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Por lo tanto, en la E2 tenemos que descartar $x=0.$ La solución dels sistema es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \vee \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

El polinomio de Taylor en (a,b) es

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor *en un punto crítico* $Pc=(a,b)$ es el que sigue, *la expresión en magenta es la forma cuadrática que determina la clasificación del punto crítico*.

$$T_2(x,y) = f(a,b)+\tfrac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]$$

$$\text{donde}\begin{cases} f_{xx}(x,y) &=& e^{-x^2-y^2+1}(4x^3-6x) \\ f_{xy}(x,y) &=& e^{-x^2-y^2+1}(4x^2y-2y) \\ f_{yy}(x,y) &=& e^{-x^2-y^2+1}(4xy^2-2x) \end{cases}$$

En el código que sigue, en MATHEMATICA, `f[x,y]` es la función y `T[x,y]` es cada polinomio de Taylor. Se realiza la representación gráfica en un entorno adecuado de cada punto crítico.

```
dx=0.5; dy=0.5;
Plot3D[f[x,y],{x,-2,2},{y, -1,1}, Mesh->None],

T[x_,y_]=1+Sqrt[E/2]+1/2 (-2 Sqrt[2 E] (-(1/Sqrt[2])+x)^2-Sqrt[2 E] y^2);
```

```
Plot3D[T[x,y],{x,0.7-dx,0.70+dx},{y, 0-dy,0+dy}, Mesh->None]

T[x_,y_]=1-Sqrt[E/2]+1/2 (2 Sqrt[2 E] (1/Sqrt[2]+x)^2+Sqrt[2 E] y^2);
Plot3D[T[x,y],{x,0.7-dx,0.70+dx},{y, 0-dy,0+dy}, Mesh->None]
```

En el código que sigue, en MATHEMATICA, **F_i[x,y]** son las formas cuadráticas:

```
F_1[x_,y_]=1/2 (-2 Sqrt[2 E] (-(1/Sqrt[2])+x)^2-Sqrt[2 E] y^2);

F_2[x_,y_]=1/2 (2 Sqrt[2 E] (1/Sqrt[2]+x)^2+Sqrt[2 E] y^2);
```

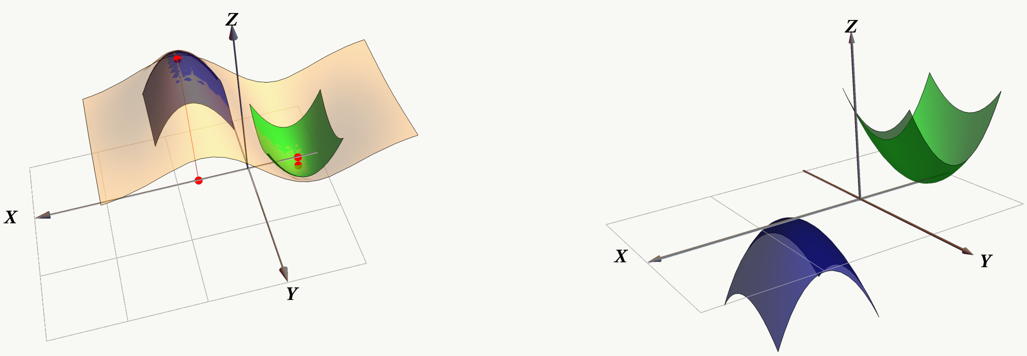


Figura 6.8: Polinomio de Taylor y las formas cuadráticas, con un solo signo!

Clasificación de los puntos críticos usando el teorema 6.2

$$D_1 = f_{xx} = e^{-x^2-y^2+1}(4x^3-6x)$$

$$D_2 = e^{-2x^2-2y^2+2}\begin{vmatrix} 4x^3-6x & 4x^2y-2y \\ 4x^2y-2y & 4xy^2-2x \end{vmatrix} = e^{-2x^2-2y^2+2}(12x^2-8x^2y^2-4y^2-8x^4)$$

$Pc = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	$D_2(Pc) = 4e > 0$	$f_{xx}(Pc) = -2\sqrt{2e} < 0$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 1+\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$ máximo local
$Pc = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	$D_2Pc(Pc) = 4e > 0$	$f_{xx}(Pc) = 2\sqrt{2e} > 0$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 1-\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$ mínimo local

Ejemplo 6.2

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3+3y-y^3-3x$.

Solución:

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 &= 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \\ \\ 3 - 3y^2 &= 0 \Longrightarrow y = \pm 1 \end{cases}$

En este caso, cualquier combinación de signos anula el sistema, por eso los puntos críticos son $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$.

Clasificación. $D_2(x,y) = (6x)(-6y) - (0)^2$

(x_0, y_0)	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$H = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$(1,1)$	6	-36	$(1,1,0)$ es punto de silla
$(1,-1)$	6	36	$(1,-1,-1.2)$ es mínimo local.
$(-1,1)$	-6	36	$(-1,1,1.2)$ es máximo local.
$(-1,-1)$	-6	-36	$(-1,-1,0)$ es punto de silla

La representación gráfica de f se muestra en al figura.

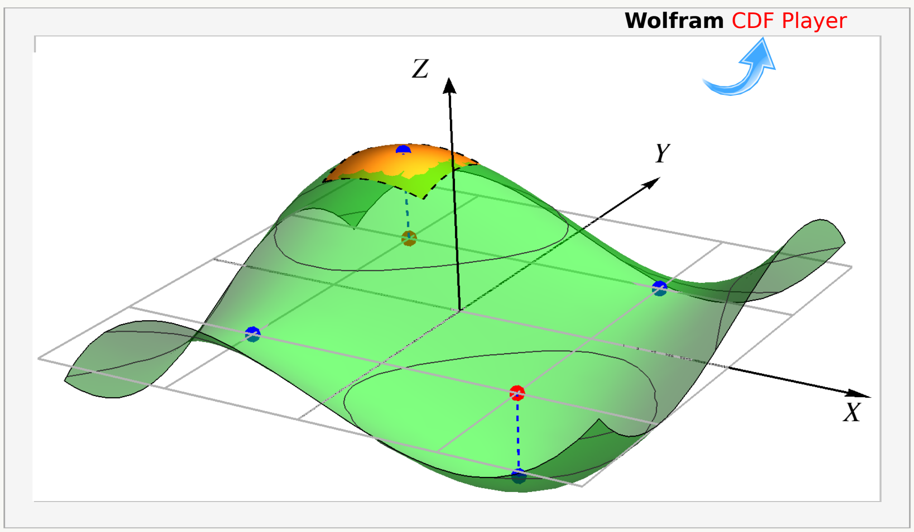


Figura 6.9: $f(x,y) = x^3 + 3y - y^3 - 3x$

Ejemplo 6.3

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Solución:

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4y - 4x &= 0 \\ \\ 4y^3 - 4y + 4x &= 0 \quad \text{(E2)} \end{cases}$

Sumando miembro a miembro obtenemos $x^3 + y^3 = 0 \implies x = -y$.

Ahora sustituimos en la ecuación (E2), queda $4x^3 - 4x - 4x = 0 \implies x(x^2 - 2) = 0$; con lo cual obtenemos los puntos críticos

$$(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Clasificación. $D_2(x,y) = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - (4)^2$

(x_0, y_0)	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$H = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$(0,0)$	-4	0	Criterio no decide.
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	20	384	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -8)$ es mínimo local.
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	20	384	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -8)$ es mínimo local.

La representación gráfica de f se muestra en al figura. Aunque $D_2(0,0) = 0$ y el criterio no proporciona información, la gráfica a la derecha nos indica que se trata de un punto de silla.

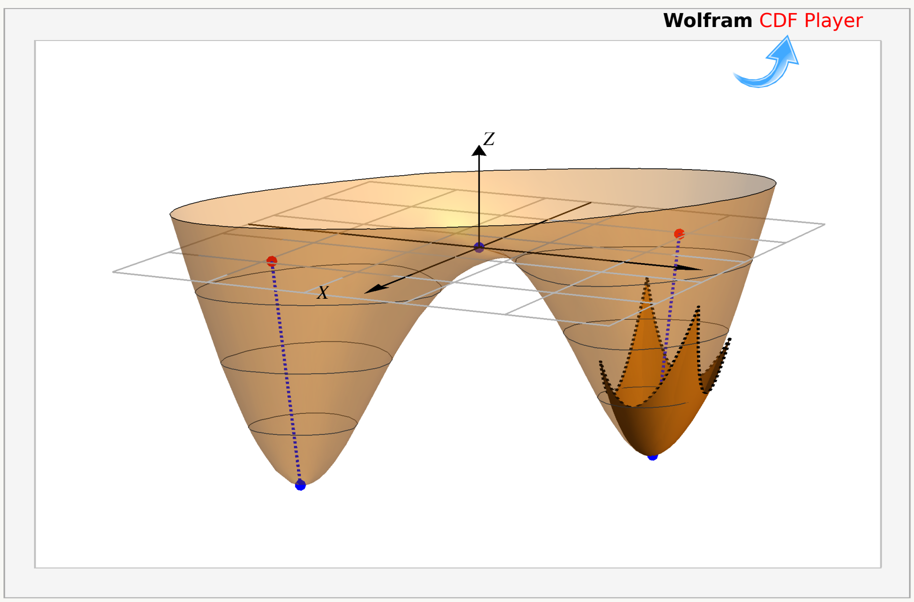


Figura 6.10: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Ejemplo 6.4

Sea $f(x,y) = 6xy - 2x^2y - 3xy^2$. Calcule y clasifique los puntos críticos de f.

Solución: Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema $\nabla f = (0,0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6y-4xy-3y^2 &= 0 \\ \\ 6x-2x^2-6xy &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y(6-4x-3y) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad y=0 \;\; \text{o} \;\; y=\dfrac{6-4x}{3} \\ \\ 6x-2x^2-6xy &= 0 \qquad \text{(E2)} \end{cases}$$

- Si $y=0$, al sustituir en la ecuación (E2) obtenemos los puntos críticos $(0,0),(3,0)$.

- Si $y=\dfrac{6-4x}{3}$, al sustituir en la ecuación (E2) obtenemos los puntos críticos $(0,2),\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$.

Clasificación. $D_2(x,y)=(-4y)(-6x)-[6-4x-6y]^2$

(x_0,y_0)	$D_1=f_{xx}(x_0,y_0)$	$H=D_2(x_0,y_0)$	Clasificación
$(0,0)$	0	-36	$(0,0,0)$ es punto de silla
$(3,0)$	0	-36	$(3,0,0)$ es punto de silla
$(0,2)$	-8	-36	$(0,2,0)$ es punto de silla
$(1,2/3)$	$-8/3$	12	$(1,2/3,4/3)$ es máximo local.

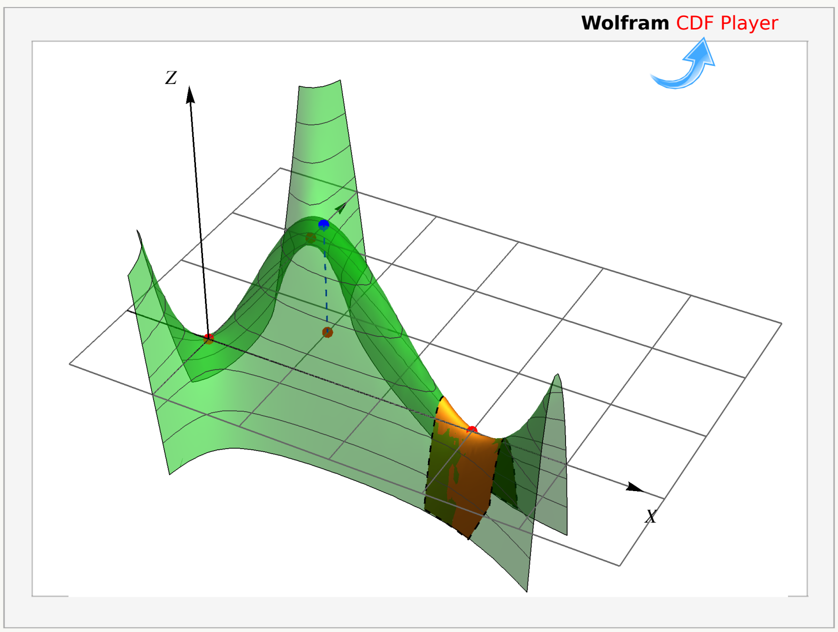


Figura 6.11: $f(x,y)=6xy-2x^2y-3xy^2$

Ejemplo 6.5

Sea $z=yxe^{-x}+y^2$. Calcule y clasifique los puntos críticos de z.

Solución: Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema $\nabla z=(0,0)$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial z}{\partial x} & = & 0\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} & = & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{-x}y - e^{-x}xy & = & 0\\[2ex] e^{-x}x + 2y & = & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y(1-x) & = & 0 & \Longrightarrow\ y=0 \ \text{ o } \ x=1\\[2ex] e^{-x}x + 2y & = & 0 & \qquad \text{(E2)}\end{array}\right.$$

I caso. Si $y = 0$, sustituimos en (E2) y obtenemos $x = 0$.

II caso Si $x = 1$ sustituimos en (E2) y obtenemos $y = -\dfrac{1}{2e}$.

Clasificación. $D_2(x,y) = 2y\, e^{-x}\,(x-2) - (e^{-x} - e^{-x}x)^2$

(x_0,y_0)	$D_1 = f_{xx}(x_0,y_0)$	$H = D_2(x_0,y_0)$	Clasificación
$(0,0)$	0	$-1 < 0$	$(0,0,0)$ es punto de silla
$\left(1,-\dfrac{1}{2e}\right)$	$\dfrac{1}{2e^2} > 0$	$\dfrac{1}{e^2} > 0$	$(1,-1/2e,\ -1/4e^2)$ es mínimo local

Ejemplo 6.6

Sea $z = x^2y^2 - x - y$. Calcule y clasifique los puntos críticos de z.

Solución: Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema $\nabla z = (0,0)$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial z}{\partial x} & = & 0\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} & = & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2xy^2 - 1 & = & 0 & \quad \text{(E1)}\\[2ex] 2x^2y - 1 & = & 0 & \quad \text{(E2)}\end{array}\right.$$

Como $y = 0$ *no es solución*, podemos despejar $x = \dfrac{1}{2y^2}$ de (E1). Ahora sustituimos en (E2) y obtenemos $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$. Entonces tenemos el punto crítico [a] $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$.

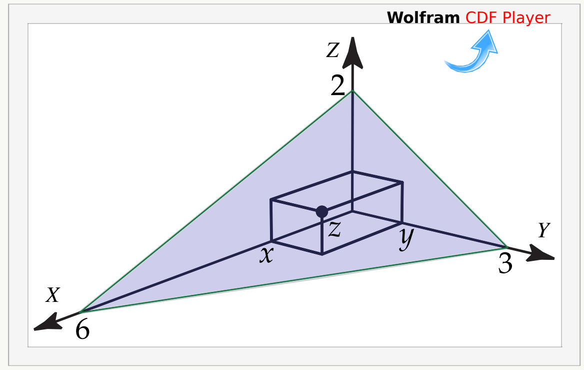
Clasificación. $D_2(x,y) = 2y^2 \cdot 2x^2 - (4xy)^2$

(x_0,y_0)	$D_1 = f_{xx}(x_0,y_0)$	$H = D_2(x_0,y_0)$	Clasificación
$\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$	$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$	$-3\sqrt[3]{4} < 0$	$\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ -\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)$ es punto de silla

[a] Este punto también lo podríamos encontrar multiplicando a ambos lados la ecuación 1 por x y la ecuación 2 por y y sustitutir $2x^2y^2 = x$ en la ecuación 2.

Ejemplo 6.7

Calcule el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z=6$.



Solución: Debemos maximizar $V = xyz$. Como $z = 2 - x/3 - 2y/3$, el volumen de la caja es $V = xy\,(2 - x/3 - 2y/3)$.

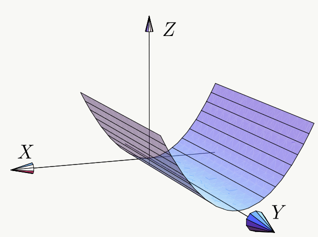
Puntos críticos. Nos interesa solo $x > 0$ y $y > 0$. Entonces,

$$\begin{cases} V_x &= 0 \\ V_y &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\dfrac{2y}{3}(-3+x+y) &= 0 \\ -\dfrac{x}{3}(-6+x+4y) &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3+x+y &= 0 \\ -6+x+4y &= 0 \end{cases} \implies x=2, \quad y=1.$$

Clasificación. $D_2(x,y) = V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 = -\dfrac{2y}{3} \cdot -\dfrac{4x}{3} - \left[\dfrac{2}{3}(x+2y-3)\right]^2$. Así $D_2(2,1) = 4/3 > 0$ y $D_1 = V_{xx}(2,1) = -2/3 < 0$. Esto nos dice que el volumen es máximo cuando las dimensiones de la caja son $x=2$, $y=1$ y $z = \dfrac{2}{3}$. Por otro lado, el volumen máximo es $\dfrac{4}{3}ul^3$.

Ejemplo 6.8

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2$.



Solución: Primero calculamos los **puntos críticos**

$$\begin{cases} f_x &= 2x &= 0 \\ f_y &= 0 &= 0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(0,y)$. Así que tenemos un número infinito de puntos críticos. $D_2(x,y) = (2)(0) - (0)^2 = 0$ así que este criterio no da información aunque, de acuerdo a la gráfica , se trata de puntos donde f alcanza mínimos locales.

Ejercicios

6.3.1 Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = -3x^2y + x^2 + xy^3$.

6.3.2 Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

6.3.3 Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

6.3.4 Sea $z = xy + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}$ la ecuación de una superficie (con a y b constantes). Si $P = (1,2)$ es un punto crítico de z, determine si en $\mathbf{p}$ la función *alcanza* un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

6.3.5 Calcular y clasificar los puntos críticos de $z = 4x^2 - xy + y^2$.

6.3.6 Calcule y clasifique los puntos críticos de $z = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$.

6.3.7 Hallar el punto del paraboloide $P:\ z = x^2 + y^2 + 2$ más cercano al punto $Q = (2,2,2)$.

6.3.8 Calcule y clasifique los puntos críticos de $z = 4xy - 2x^2 - y^4$

6.3.9 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un envase de forma rectangular, de volumen de $10\ \text{cm}^3$ y costo mínimo, si el material de los lados de la caja cuestan 10 colones el centímetro cuadrado y el material de la tapa y el fondo cuestan 20 colones el centímetro cuadrado?.

6.3.10 Calcule y clasifique los puntos críticos de $z = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3xy^2}{2} + y^3$

6.3.11 Calcule el volumen de la caja de base rectángular más grande, que tenga caras en los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, en el primer octante, y un vértice en el plano $2x + 2y + 2z = 10$ (haga un dibujo).

6.3.12 Resuelva el ejercicio anterior si el plano tiene ecuación $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, con $abc > 0$ con a, b, c números positivos.

6.3.13 Encuentre las dimensiones da la caja de base rectángular de máximo volumen, si el área de su superficie total debe ser de 64cm^2

6.3.14 Sea $z = yxe^{-x} + y^2$. Calcule y clasifique los puntos críticos de z.

6.4 Máximos y mínimos locales $n \geqslant 3$.

Como en cálculo en una variable, los extremos `locales` de una función de varias variables son puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo en un entorno del dominio de la función. Si la función está definida en una región D, los extremos *globales* son los puntos donde la función toma valores máximos o mínimos y esto podría suceder en cualquier parte de la región en consideración. Recordemos que un entorno abierto alrededor de $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ de radio δ es el conjunto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| < \delta\}$ (discos sin borde en $\mathbb{R}^2$ y el interior de esferas en $\mathbb{R}^3$).

Definición 6.4 (Extremos locales).

Sea f función escalar de n variables, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

f tiene un máximo local en $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \in R^n$ si existe un entorno abierto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant f(\mathbf{p})$ para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$. El punto $(p_1, p_2, ..., p_n, f(\mathbf{p}))$ se dice un máximo local de f y el número $f(\mathbf{p})$ es el máximo de f en el entorno $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$.

f tiene un mínimo local en $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \in R^n$ si existe un entorno abierto $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant f(\mathbf{p})$ para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$. El punto $(p_1, p_2, ..., p_n, f(\mathbf{p}))$ se dice un mínimo local de f y el número $f(\mathbf{p})$ es el mínimo de f en el entorno $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$.

Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos en el dominio de f, entonces f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto) en $\mathbf{p}$.

Puntos críticos y extremos locales

Recordemos que la derivada de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $\mathbf{D}f = \nabla \mathbf{f}$. Un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de f si $\mathbf{D}f(\mathbf{p}) = 0$ (o si $\mathbf{D}f$ no esta definida en este punto), es decir, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 0,\ i = 1, 2, ..., n.$ Un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local se llama *punto de silla.*

Como en cálculo en una variable, los extremos locales son puntos críticos, es decir, en el caso de que f sea diferenciable, la derivada de f se anula en los puntos críticos.

Teorema 6.3

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ es un extremo local de f entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{p}) = 0$, es decir, $\mathbf{p}$ es punto crítico de f.

Clasificación de puntos críticos

La fórmula de Taylor *de segundo orden* en n variables dice que si $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$ es un entorno alrededor de $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es de clase C^2 en $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{p})$, entonces si $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, existe $0 < \xi < 1$ tal que

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + R_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \quad \text{con} \quad R_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}).$$

Si definimos $D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T$.

Así, la fórmula de Taylor de segundo orden se puede escribir como,

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T + \frac{1}{2}\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T, \quad 0 < \xi < 1.$$

La matriz *Hesssiana*[2] de f en $\mathbf{x}$ es la matriz $D^2f(\mathbf{x})$.

Evaluando en un punto crítico $\mathbf{p}$, $Df(\mathbf{p}) = 0$ y la fórmula de Taylor de *segundo orden* queda

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T, \quad \text{para algún} \quad \xi \in]\,0,1[.$$

También se puede expresar como:

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T + ||\mathbf{h}||^2 E_2(\mathbf{p},\mathbf{h}), \quad \text{con} \quad E_2(\mathbf{p},\mathbf{h}) \to 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{h} \to 0$$

Como el error $||\mathbf{h}||^2 E_2(\mathbf{p},\mathbf{h}) \to 0$ más rápido que $||\mathbf{h}||^2$, entonces en un entorno pequeño de $\mathbf{p}$, el signo de la resta $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ es el signo de $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$.

$\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$ depende de $\mathbf{h}$. Para establecer si $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$ es positiva o negativa para todos los valores de $\mathbf{h}$ en un entorno, se usa la teoría de formas cuadráticas.

Matriz definida positiva y matriz definida negativa.

Definición 6.5

Una forma cuadrática $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot A_{n\times n} \cdot \mathbf{h}^T$, es *definida positiva* si $g(\mathbf{h}) \geqslant 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ solo si $\mathbf{h} = 0$. Similarmente, g es *definida negativa* si $g(\mathbf{h}) \leqslant 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ solo si $\mathbf{h} = 0$.

Del álgebra lineal se sabe que si $A = (a_{ij})_{n\times n}$ y

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \text{Det}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad D_n = \text{Det}\begin{bmatrix} a_{11}\ldots & \ldots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\ldots & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces

- $\mathbf{h} \cdot A_{n\times n} \cdot \mathbf{h}^T$ es definitiva positiva si $D_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$
- $\mathbf{h} \cdot A_{n\times n} \cdot \mathbf{h}^T$ es definitiva negativa si $\mathbf{sgn}(D_i) = (-1)^i$ para $i = 1, 2, ..., n$

[2] En honor a Ludwing Otto Hesse $(1811 - 1874)$.

Test de clasificación. Para funciones de varias variables la clasificación de un punto crítico $\mathbf{p}$ se puede establecer si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida positiva o definida negativa. Esto se hace calculando los menores $D_1, D_2, ..., D_n$.

Teorema 6.4 (Condición suficiente).

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto y $f:\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en $\mathcal{U}$ y $\mathbf{p}\in\mathcal{U}$ un punto crítico de f. Si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida positiva, entonces $\mathbf{p}$ es un mínimo relativo de f. Similarmente, si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida negativa, entonces $\mathbf{p}$ es un máximo relativo de f.

En la demostración de este teorema se establece que si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida positiva entonces en la fórmula de Taylor obtenemos $f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})\geqslant 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$, es decir $f(\mathbf{p})$ es un valor mínimo local. Similarmente, si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida negativa entonces en la fórmula de Taylor obtenemos $f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})\leqslant 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$, es decir $f(\mathbf{p})$ es un valor máximo local.

Clasificación de puntos críticos en el caso de dos variables.

De acuerdo a lo que hemos establecido en la sección anterior, en el caso de dos variables es sencillo determinar si $\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T$ es definida positiva o definida negativa. En este caso,

$$\mathbf{h}\cdot D^2 f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{h}^T = (h_1 \;\; h_2)\begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) \\ & \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \\ h_2\end{pmatrix}.$$

Si f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, las derivadas mixtas son iguales y entonces $D_1(\mathbf{p}) = f_{xx}(\mathbf{p})$ y $D_2 = f_{xx}(\mathbf{p})\cdot f_{yy}(\mathbf{p}) - [f_{xy}(\mathbf{p})]^2$. En este caso a veces se usa $f_{xx}(\mathbf{p})$ en vez de D_1 y $D_2(\mathbf{p})$ en vez de D_2.

Teorema 6.5 (Condición suficiente).

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 en un conjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Sea

$$D_2(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2.$$

Si $(x_0,y_0)\in\mathcal{U}$ es punto crítico de f, entonces

a.) si $D_2(x_0,y_0)>0$ y $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, entonces f alcanza un mínimo local en (x_0,y_0).

b.) si $D_2(x_0,y_0)>0$ y $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, entonces f alcanza un máximo local en (x_0,y_0).

c.) Si $D_2(x_0,y_0)<0$, entonces $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es u punto de silla.

Criterio de clasificación para $n \geqslant 3$.

Del teorema de Taylor y de la teoría de formas cuadráticas, podemos obtener las siguientes condiciones suficientes para un máximo o un mínimo local.

Teorema 6.6

Sea $D_1(\mathbf{p})$, $D_2(\mathbf{p})$, ..., $D_n(\mathbf{p})$, n determinantes definidos como sigue:

$$D_i(\mathbf{p}) = \text{Det} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_1x_i}(\mathbf{p}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_2x_i}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_ix_1}(\mathbf{p}) & f_{x_ix_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_ix_i}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}_{i\times i}$$

Entonces,

- f alcanza un un mínimo en $\mathbf{p}$ si $D_1(\mathbf{p}) > 0$, $D_2(\mathbf{p}) > 0$, ..., $D_n(\mathbf{p}) > 0$
- f alcanza un un máximo en $\mathbf{p}$ si todos los determinantes pares son positivos y todos los determinantes impares son negativos, i. e., $D_i(\mathbf{p}) > 0$ si i es par $D_i(\mathbf{p}) < 0$ si i es impar
- Si ninguna de estas condiciones es satisfecha, entonces en $\mathbf{p}$ podría haber o no haber un extremo local.

El criterio no decide si $D_i(\mathbf{p}) = 0$ para algún i

Ejemplo 6.9

Encontrar los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$

Solución:

- **Puntos críticos:** Resolvemos el sistema $\begin{cases} f_x = & x - y + z & = & 0 \\ f_y = & -x + 3y - z & = & 0 \\ f_z = & x - y + 4z & = & 0 \end{cases}$

así, el único punto crítico es $P = (0,0,0)$.

- **Test:** Como tenemos una función de tres variables, calculamos $D_1(\mathbf{p})$, $D_2(\mathbf{p})$ y $D_3(\mathbf{p})$

$$D_3(\mathbf{p}) = \text{Det}\begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) & f_{xz}(\mathbf{p}) \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p}) & f_{yz}(\mathbf{p}) \\ f_{zx}(\mathbf{p}) & f_{zy}(\mathbf{p}) & f_{zz}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} > 0$$

$$D_2(\mathbf{p}) = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} > 0, \quad D_1(\mathbf{p}) = f_x x(\mathbf{p}) = 1 > 0$$

por lo tanto en $P = (0,0,0)$ f alcanza un mínimo local. El mínimo local es $(0,0,0,f(\mathbf{p}))$

Ejemplo 6.10

$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - zy$.

Solución:

• **Puntos críticos:** Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} f_x = & 2x & = & 0 \\ f_y = & -2y - z & = & 0 \\ f_z = & -y & = & 0 \end{cases}$$

así, el único punto crítico es $P = (0,0,0)$.

• **Test:** Como tenemos una función de tres variables, calculamos $D_1(\mathbf{p})$, $D_2(\mathbf{p})$ y $D_3(\mathbf{p})$

$$D_3(\mathbf{p}) = \text{Det}\begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) & f_{xz}(\mathbf{p}) \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p}) & f_{yz}(\mathbf{p}) \\ f_{zx}(\mathbf{p}) & f_{zy}(\mathbf{p}) & f_{zz}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$D_2(\mathbf{p}) = \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0, \quad D_1(\mathbf{p}) = f_{xx}(\mathbf{p}) = 2 > 0$$

Tenemos que en $(0,0,0,f(0,0,0))$ es un punto de silla

Ejercicios

En los siguientes ejercicios calcule y clasifique (si el criterio lo permite) los puntos críticos de las siguientes funciones:

6.4.1 $f(x,y,z) = 4xy - 2x^2 - 3y^2 + z^2$,

6.4.2 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 - yz - x$,

6.4.3 $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xy + z$

6.4.4 $f(x,y,z) = x^2 - z^2 - zyx$

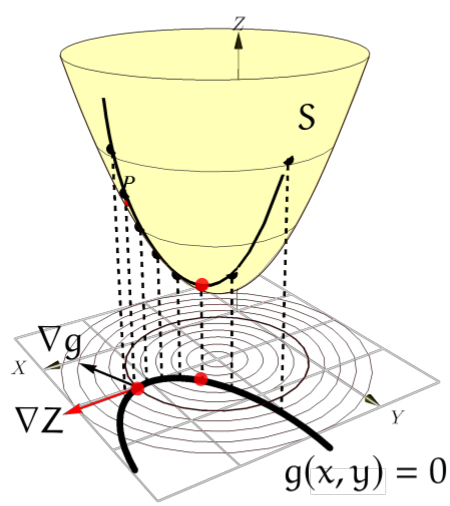
6.4.5 $f(x,y,z) = x^2 - xy + xz^2 + x + y^2 - z^2$

6.5 Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange

Supóngase que queremos hallar los máximos y los mínimos relativos de $z = f(x,y)$ sujeto a la restricción $g(x,y) = 0$. Esto significa que la función $f(x,y)$ solo podrá ser evaluada en los puntos (x,y) que estén en la curva de nivel $g(x,y) = 0$, es decir $f(x,y)$ está restringida (o sujeta) a $g(x,y) = 0$.

Una manera de resolver este problema, en el caso de un mínimo local, se puede obtener con un análisis geométrico de la situación: En las cercanías de un mínimo local, nos desplazamos sobre g en la dirección de máximo *decrecimiento* de f, hasta el punto "más profundo" que puede alcanzarse sobre g en esta dirección. Este punto podría ser el mínimo local con restricciones que andamos buscando.

Digamos que $P = (a,b,c)$ es el mínimo local con restricciones. Para poder determinar este punto con una ecuación, podemos pensar que viajamos a "este punto más profundo" atravesando curvas de nivel, entonces la "última" curva de nivel debería ser una curva de nivel $z = c$ tangente a g en $\mathbf{p}$ (si $\mathbf{p}$ no es un punto terminal de g). Que estas curvas sean tangentes significa que sus gradientes son paralelos, es decir, $\nabla z(a,b) = \lambda \nabla g(a,b.)$ Esta es la ecuación que usamos para determinar P.



El análisis es similar para determinar un máximo local con restricciones: En las cercanías de un máximo local, nos desplazamos sobre g en la dirección de máximo crecimiento hasta el punto más profundo que podamos alcanzar, sobre g.

Teorema 6.7 (Multiplicadores Lagrange. Condición de primer orden)

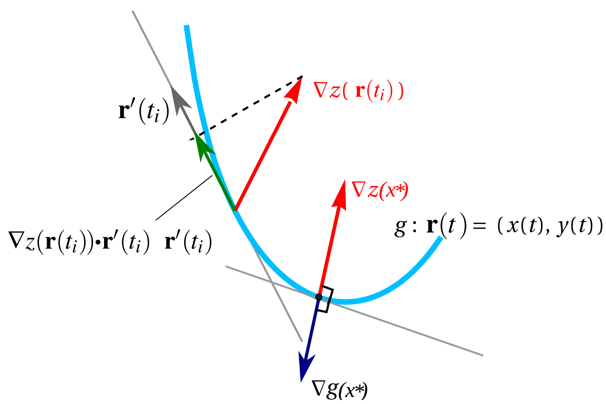
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sean $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones C^1 y sea $\mathbf{x}^*$ un extremo local de f en el conjunto $D = \{\mathbf{x} \in U \,|\, g(\mathbf{x}) = 0.\}$ Entonces, si $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq (0,0)$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (que puede ser cero) tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*) = (0,0)$$

El teorema dice que los extremos locales $\mathbf{x}^*$ de f sujetos a la restricción $g(x,y)=0$ (y $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq (0,0)$), son puntos críticos de la función "lagrangiana" $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$, pero no necesariamente viceversa. Puede suceder que algunos puntos críticos de L no sean extremos locales de f sujeto a la restricción $g(x,y)=0$.

En el caso de $z = f(x,y)$ sujeta a $g(x,y)=0$, podríamos informalmente justificar el teorema así: Supongamos que la curva g se puede dar en forma paramétrica como $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ y sea $\mathbf{x}^* = \mathbf{r}(t_0)$ un extremo local de este problema con restricciones. Entonces, usando regla de la cadena, debería tenerse $\left.\dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\right|_{t=t_0} = 0,$ entonces

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{dt} f(x(t),y(t))\right|_{t=t_0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\right)\right|_{t=t_0} = \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$



Esto nos dice que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ es perpendicular al vector tangente a la curva de restricción en $\mathbf{x}^*$, es decir, $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ y $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ son paralelos donde se alcanzan los extremos locales (si $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq 0$)... pero no necesariamente viceversa.

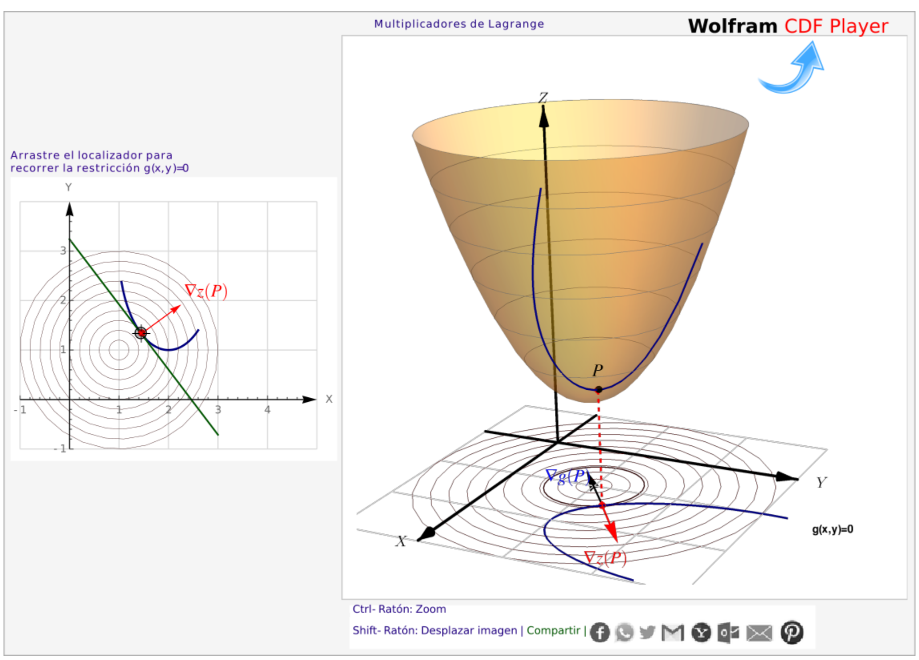


Figura 6.12: Un problema de optimización con restricciones.

Método de los multiplicadores de Lagrange con una restricción:

- Para minimizar o maximizar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeta a la condición $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, se busca los puntos críticos de $L(x_1, y_1, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda g(x_1, x_2, ..., x_n)$ (asumimos $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$).

  Para hallar los puntos críticos de $L(x_1, y_1, ..., x_n, \lambda)$ se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} L_{x_1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{x_n} & = & 0 \\ g(x_1, x_2, ..., x_n) & = & 0 \end{cases}$$

  En tres variables, podríamos encontrar los puntos críticos del problema de optimización, como soluciones del sistema

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z)$$

  A λ se le llama multiplicador (de Lagrange). Observe que λ podría ser cero. Esto pasa por ejemplo cuando un extremo local con restricciones coincide con un extremo local (sin restricciones).

6.6 Clasificación de puntos críticos para problemas con restricciones.

Para determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o no son ni máximos ni mínimos, se puede recurrir a al criterio de la "Hessiana orlada"

Si $\mathbf{p}$ es un punto crítico del problema

"Optimizar la *función objetivo*: $f(x_1,\ x_2,\ ..., x_n)$ sujeta a la restricción: $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ "

es decir, sí $\nabla L(\mathbf{p}) = 0$ (con $\nabla g(\mathbf{p}) \neq 0$), entonces el siguiente teorema nos da un criterio para clasificar los puntos críticos.

Teorema 6.8

Consideremos el hessiano orlado

$$\overline{D}_n(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(\mathbf{p}) & g_{x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & g_{x_n}(\mathbf{p}) \\ g_{x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_1x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ g_{x_2}(\mathbf{p}) & L_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_2x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_2x_n}(\mathbf{p}) \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n}(\mathbf{p}) & L_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & L_{x_nx_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{vmatrix}$$

y los menores principales

$$\overline{D}_i(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(\mathbf{p}) & g_{x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & g_{x_i}(\mathbf{p}) \\ g_{x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_1x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_1x_i}(\mathbf{p}) \\ g_{x_2}(\mathbf{p}) & L_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_2x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_2x_i}(\mathbf{p}) \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_i}(\mathbf{p}) & L_{x_ix_1}(\mathbf{p}) & L_{x_ix_2}(\mathbf{p}) & \cdots & L_{x_ix_i}(\mathbf{p}) \end{vmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{p}$ es un punto crítico de $L(x_1, ..., x_n, \lambda)$ (asumimos $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$) se tiene

- En $\mathbf{p}$ f alcanza un mínimo local si $D_2(\mathbf{p}) < 0$, $D_3(\mathbf{p}) < 0$, ..., $D_n(\mathbf{p}) < 0$
- En $\mathbf{p}$ f alcanza un máximo local si todos los determinantes pares son positivos y todos los determinantes impares son negativos, i. e.,
  - $D_i(\mathbf{p}) > 0$ si $i \geqslant 2$, es par
  - $D_i(\mathbf{p}) < 0$ si i es impar

En el anterior teorema, no aparece $\overline{D}_1$ pues $\overline{D}_1(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(\mathbf{p}) \\ g_{x_1}(\mathbf{p}) & L_{x_1x_1}(\mathbf{p}) \end{vmatrix} = -(g_{x_1}(\mathbf{p}))^2 < 0$ (es siempre es negativo).

Cuando aparece más de una restricción, se debe considerar un hessiano con más de una orla:

Si hay n variables y m restricciones ($m < n$) de la forma $g^i(x_1, ..., x_n) = c_i$ entonces la lagrangiana será

$$L = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [c_i - g^i(x_1, ..., x_n)]$$

y el hessiano orlado será:

$$\begin{vmatrix} 0\ 0\ \cdots\ 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \cdots\ 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_n^m \\ g_1^1\ g_1^2\ \cdots\ g_1^m & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n^1\ g_n^2\ \cdots\ g_n^m & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

Casos $n = 2$ y $n = 3$

- Caso $n = 2$.

$$\overline{D}_2(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(\mathbf{p}) & g_y(\mathbf{p}) \\ g_x(\mathbf{p}) & L_{xx}(\mathbf{p}) & L_{xy}(\mathbf{p}) \\ g_y(\mathbf{p}) & L_{yx}(\mathbf{p}) & L_{yy}(\mathbf{p}) \end{vmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \lambda_1)$ es un punto crítico de $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$ (asumimos $\nabla g(x,y) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$) se tiene

- En (p_1, p_2) f alcanza un mínimo local si $D_2(\mathbf{p}) < 0$,

- En (p_1, p_2) f alcanza un máximo local $D_2(\mathbf{p}) > 0$,

• Caso $n = 3$.

$$\overline{D}_2(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(\mathbf{p}) & g_y(\mathbf{p}) \\ g_x(\mathbf{p}) & L_{xx}(\mathbf{p}) & L_{xy}(\mathbf{p}) \\ g_y(\mathbf{p}) & L_{yx}(\mathbf{p}) & L_{yy}(\mathbf{p}) \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{D}_3(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(\mathbf{p}) & g_y(\mathbf{p}) & g_z(\mathbf{p}) \\ g_x(\mathbf{p}) & L_{xx}(\mathbf{p}) & L_{xy}(\mathbf{p}) & L_{xz}(\mathbf{p}) \\ g_y(\mathbf{p}) & L_{yx}(\mathbf{p}) & L_{yy}(\mathbf{p}) & L_{yz}(\mathbf{p}) \\ g_z(\mathbf{p}) & L_{zx}(\mathbf{p}) & L_{zy}(\mathbf{p}) & L_{zz}(\mathbf{p}) \end{vmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \lambda_1)$ es un punto crítico de $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - c)$ (asumimos $\nabla g(x,y,z) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{p}$) se tiene

- En $(p_1, p_2), p_3$ f alcanza un mínimo local si $D_2(\mathbf{p}) < 0$ y $D_3(\mathbf{p}) < 0$

- En (p_1, p_2, p_3) f alcanza un máximo local $D_2(\mathbf{p}) > 0$ y $D_3(\mathbf{p}) < 0$

Ejemplo 6.11

Optimizar $f(x,y) = x^2 - x(y-1)^2 - x + (y-1)^2 + 1$ sujeto a la restricción $2x = (y-1)^2$.

Solución: $L(x,y,\lambda) = x^2 - x(y-1)^2 - x + (y-1)^2 + 1 \;-\; \lambda\left((y-1)^2 - 2x\right)$

Puntos críticos.

$$\begin{cases} L_x = 2x - (y-1)^2 - 1 + 2\lambda & = \;0 \quad \text{E1} \\ L_y = -2x(y-1) + 2(y-1) - 2\lambda(y-1) & = \;0 \quad \text{E2} \\ L_\lambda = (y-1)^2 - 2x & = \;0 \quad \text{E3} \end{cases}$$

De la ecuación E3 tenemos $2x = (y-1)^2$. Sustituyendo en E1 queda

$$-1 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en E3, queda

$$-(y-1)[(y-1)^2-1]=0 \implies \begin{cases} y=1 & \text{y por tanto} \quad x=0 \\ y=0 & \text{y por tanto} \quad x=1/2 \\ y=2 & \text{y por tanto} \quad x=1/2 \end{cases}$$

Los puntos críticos, con $\lambda = 1/2$, son $(0,1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(\frac{1}{2},2\right)$

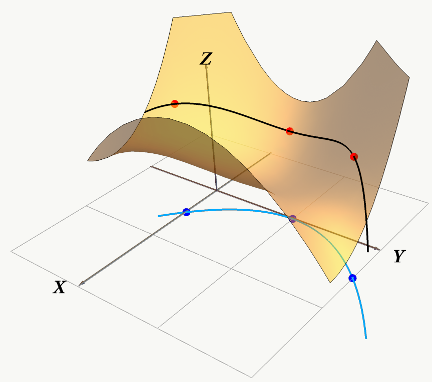
Clasificación.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2(y-1) \\ -2 & 2 & -2(y-1) \\ 2(y-1) & -2(y-1) & -2\lambda-2x+2 \end{vmatrix}$$

Ahora evaluamos los puntos críticos (con $\lambda = 1/2$)

- $D_2(0,1,1/2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4,$

entonces $(0,1,1)$ es un mínimo local del problema



- $D_2(1/2,0,1/2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$

entonces $(1/2,2,5/4)$ es máximo local

- $D_2(1/2,2,1/2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$

entonces $(1/2,0,5/4)$ es máximo local

Ejemplo 6.12

Hallar los extremos de $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x + 4y = 2$.

Solución: La función lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x+4y-2)$.

Puntos críticos: $\begin{cases} L_x = 2x-\lambda & = & 0 & \implies & \lambda = 2x \\ L_y = 2y-4\lambda & = & 0 & \implies & y = 4x \\ L_\lambda = 2-x-4y & = & 0 & \implies & x = \frac{2}{17} \end{cases} \implies \lambda = \frac{4}{17},\ x = \frac{2}{17},\ y = \frac{8}{17}.$

Así, el único punto crítico es: $P = \left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{8}{17}\right)$

Clasificación: Usemos el teorema para clasificar los puntos críticos. En este caso, solo debemos calcular el hessiano orlado $\overline{D}_2$

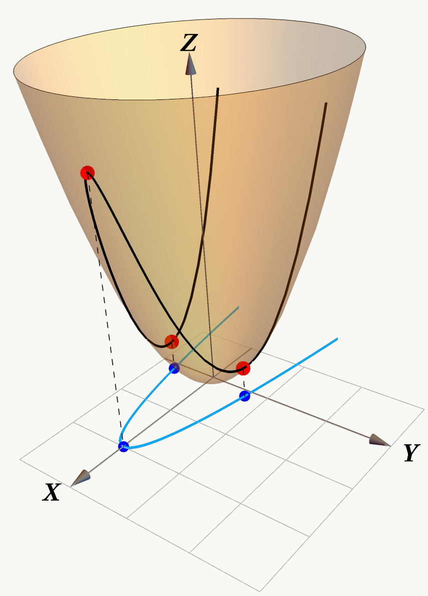
$$\overline{D}_2(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(\mathbf{p}) & g_y(\mathbf{p}) \\ g_x(\mathbf{p}) & L_{xx}(\mathbf{p}) & L_{xy}(\mathbf{p}) \\ g_y(\mathbf{p}) & L_{yx}(\mathbf{p}) & L_{yy}(\mathbf{p}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -34 < 0$$

así que $\left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{8}{17}, f\left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{8}{17}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{8}{17}, \dfrac{14}{17}\right)$ es un mínimo local del problema con restricciones

El siguiente ejemplo es una pequeña variación del anterior, excepto que la solución del sistema no lineal es más cuidado.

Ejemplo 6.13

Hallar los extremos de $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x + 4y^2 = 2$.



Solución: La función lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + 4y^2 - 2)$.

Puntos críticos: $\begin{cases} L_x = 2x - \lambda & = 0 \quad \text{E1} \\ L_y = 2y - 8\lambda y & = 0 \quad \text{E2} \\ x + 4y^2 - 2 & = 0 \quad \text{E3} \end{cases}$

- Si despejamos primero $\lambda = 2x$ en E1 y sustituimos en E2, queda

$$2y - 8(2x)y = 0 \implies 2y(1 - 8x) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Pero estos valores de x y y *no satisfacen la e cuación E3*: $\dfrac{1}{8} + 4 \cdot 0^2 - 2 \neq 0$. Por tanto se descartan.

- Podemos iniciar despejando $x = 2 - 4y^2$ en E3 y sustituir en E1,

$$2(2-4y^2) - \lambda = 0 \implies \lambda = 4 - 8y^2$$

Ahora sustituimos en E2 y queda

$$2y - 8(4-8y^2)y = 0 \implies 2y(1-16+32y^2) = 0 \implies \begin{cases} y &= 0 \\ y &= \pm\sqrt{\dfrac{15}{32}} \end{cases}$$

Como ya usamos las tres ecuaciones podemos concluir que la solución del sistema es

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x &= 2 \\ \lambda &= 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y &= \sqrt{\dfrac{15}{32}} \\ x &= \dfrac{1}{8} \\ \lambda &= \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y &= -\sqrt{\dfrac{15}{32}} \\ x &= \dfrac{1}{8} \\ \lambda &= \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Clasificación: Ahora vamos a clasificar los puntos críticos: En este caso, solo debemos calcular el hessiano orlado $\overline{D}_2$

$$\overline{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 8y \\ 1 & 2 & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{vmatrix}$$

- $\overline{D}_2\,(0,2,4) = 30 \implies (0,2,4)$ es un máximo local
- $\overline{D}_2\left(\dfrac{1}{8}, \sqrt{\dfrac{15}{32}}, \dfrac{1}{4}\right) = -60 \implies \left(\dfrac{1}{8}, \sqrt{\dfrac{15}{32}}, \dfrac{31}{64}\right)$ es un mínimo local
- $\overline{D}_2\left(\dfrac{1}{8}, -\sqrt{\dfrac{15}{32}}, \dfrac{1}{4}\right) = -60 \implies \left(\dfrac{1}{8}, -\sqrt{\dfrac{15}{32}}, \dfrac{31}{64}\right)$ es un mínimo local

Ejemplo 6.14

Maximizar $f(x,y) = 2y - x$ sujeto a $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

Solución: $F(x,y,\lambda) = 2y - x - \lambda(y - \operatorname{sen} x)$

Puntos críticos:

$$\begin{cases} F_x = -1 + \lambda \cos x & = 0 \\ F_y = 2 - \lambda & = 0 \\ F_\lambda = -y + \operatorname{sen} x & = 0 \end{cases} \implies \lambda = 2, \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \text{ o sea, } x = \tfrac{\pi}{3}, \quad x = \tfrac{5\pi}{3}.$$

Así los puntos críticos son: $P_1 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $P_2 = (\frac{5\pi}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$

Clasificación: Usemos el teorema para clasificar los puntos críticos. En este caso, solo debemos calcular el hessiano orlado $\overline{D}_2$

$$\overline{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\cos x & 1 \\ -\cos x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

así que $\overline{D}_2(P_1) = \overline{D}_2(P_2) = 0$ y, en este caso, el criterio no da información.

Ejemplo 6.15

Maximizar y minimizar $f(x,y) = x^2 + \dfrac{1}{3}\left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 1$ sujeto a la restricción $x^2 + \dfrac{4y^2}{9} = 1$.

Solución: Sea $L(x,y,\lambda) = x^2 + \dfrac{1}{3}\left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 - \lambda\left(x^2 + \dfrac{4y^2}{9} - 1\right)$.

$$\begin{cases} L_x & = 0 \\ L_y & = 0 \\ L_\lambda & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2\lambda x & = 0 \implies x(1-\lambda) = 0 \quad (E1) \\ \dfrac{2}{3}\left(y - \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{8\lambda y}{9} & = 0 \quad (E2) \\ 1 - x^2 - \dfrac{4y^2}{9} & = 0 \quad (E3) \end{cases}$$

- De (E1) vemos que la solución del sistema requiere que $x = 0$ o $\lambda = 1$.
- Si $x = 0$, sustituyendo en (E3) obtenemos los puntos $y = \pm 3/2$.
- Si $\lambda = 1$, sustituimos en la ecuación (E2) y obtenemos $y = -4.5$, pero al sustituir en la ecuación (E3) nos da una solución compleja.

Los puntos críticos de L son $(0, 3/2)$ con $\lambda = 0$ y $(0, -3/2)$ con $\lambda = 1.5$.

Clasificación:

$$\overline{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & \frac{8y}{9} \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ \frac{8y}{9} & 0 & \frac{2}{3}-\frac{8\lambda}{9} \end{vmatrix}$$

$$\text{Entonces} \begin{cases} \overline{D}_2(0,3/2,0) & = & -32/9 < 0 \implies (0,3/2,f(0,3/2)) \text{ es un mínimo local} \\ \overline{D}_2(0,-3/2,3/2) & = & 16/9 > 0 \implies (0,-3/2,f(0,-3/2)) \text{ es un máximo local} \end{cases}$$

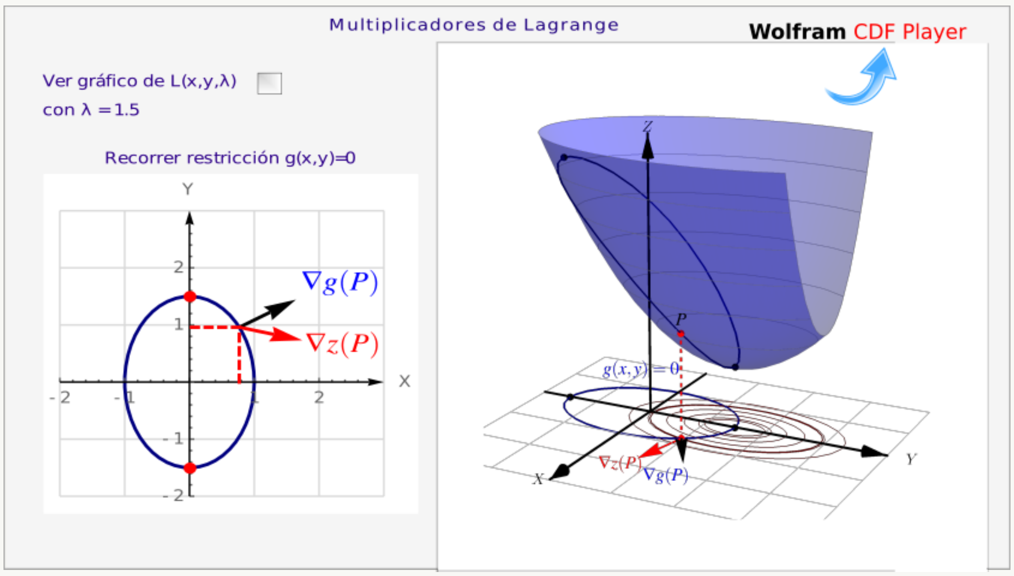


Figura 6.13: Un problema de optimización con restricciones.

Ejemplo 6.16

Verifique que el problema "Minimizar $z = x^2 + y^2$ sujeto a $x - y = 0$" tiene como solución el mínimo local de z, es decir $(0,0,0)$.

Solución: Sea $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x-y)$.

$$\begin{cases} L_x & = & 0 \\ L_y & = & 0 \\ L_\lambda & = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - \lambda & = & 0 \\ 2y + \lambda & = & 0 \\ x - y & = & 0 \quad \text{(E3)} \end{cases}$$

Sustituyendo $x = \lambda/2$ y $y = -\lambda/2$ en $(E3)$ obtenemos $\lambda = 0$ y, por tanto, $x = 0,\ y = 0.$

En este caso, $\lambda = 0$ indica que el mínimo con restricciones coincide con un mínimo local de z.

Clasificación: $\overline{D}_2(0,0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$ Efectivamente $(0,0,0)$ es un mínimo local.

Ejemplo 6.17

Determine tres números reales positivos $x,\ y,\ z$ cuya suma sea 10 y su producto máximo.

Solución: Hay que maximizar el producto $P = xyz$ sujeto a la restricción $x+y+z = 10$.

Sea $L(x,y,\lambda) = xyz - \lambda(x+y+z-10)$.

$$\begin{cases} L_x & = & 0 \\ L_y & = & 0 \\ L_z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} yz-\lambda & = & 0 \\ xz-\lambda & = & 0 \\ xy-\lambda & = & 0 \\ x+y+z-10 & = & 0 & \text{(E4)} \end{cases}$$

Despejando λ obtenemos

$$yz = xz \quad \text{y} \quad xz = xy.$$

Como $x,\ y$ y z son, en este caso, positivos; podemos cancelar y entonces $x = y = z$. Sustituyendo en (E4) nos queda $3x - 10 = 0$, es decir, $x = y = z = \dfrac{10}{3}$ y $\lambda = 100/9$

Clasificación:

$$\overline{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \overline{D}_2(10/3,\ 10/3,\ 10/3,\ 100/9) = \frac{20}{3} > 0$$

$$\overline{D}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \overline{D}_3(10/3,\ 10/3,\ 10/3,\ 100/9) = -\frac{100}{3} < 0$$

Entonces en $(10/3,\ 10/3,\ 10/3)$ el producto alcanza un máximo local.

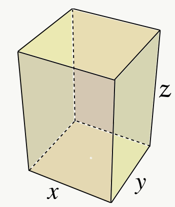
Los tres números buscados on $x = y = z = \dfrac{10}{3}$

Ejemplo 6.18

Para la construcción de una caja de base rectangular, con tapa, con un volumen de 16m^3 se tiene la siguiente función de costo para los materiales

$$C(x, y, h) = 18xy + 16xh + 12yh$$

Utilizando Multiplicadores de Lagrange, calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea mínimo.



Solución: Sean x el largo, y el ancho y h la altura de la caja. Como se requiere minimizar el costo, la función objetivo es $C(x, y, h) = 18xy + 16xh + 12yh$. La restricción (ligadura) es $V = 16$, es decir. $xyh - 16 = 0$

Así:

$$L(x, y, h, \lambda) = 18xy + 16xh + 12yh - \lambda(xyh - 16) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llcl} L_x: & 18y + 16h - \lambda yh & = & 0 \\ L_y: & 18x + 12h - \lambda xh & = & 0 \\ L_h: & 16x + 12y - \lambda xy & = & 0 \\ L_\lambda: & -(xyh - 16) & = & 0 \end{array} \right.$$

Multiplicando (E1) por x, (E2) por y y (E3) por h, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{llcll} L_x: & 18yx + 16hx - \lambda xyh & = & 0 & \text{(E1)} \\ L_y: & 18xy + 12hy - \lambda yxh & = & 0 & \text{(E2)} \\ L_h: & 16xh + 12yh - \lambda xyh & = & 0 & \text{(E3)} \\ L_\lambda: & xyh & = & 16 & \text{(E4)} \end{array} \right.$$

- Igualando (E1) y (E2) tenemos $18yx + 16hx = 18xy + 12hy \implies y = \dfrac{4}{3}x$ (pues $h \neq 0$, se puede cancelar)
- Igualando (E1) y (E3) tenemos $18yx + 16hx = 16xh + 12yh \implies h = \dfrac{18}{12}x$ (pues $y \neq 0$, se puede cancelar)

Sustituyendo $y = \dfrac{4}{3}x$ y $h = \dfrac{18}{12}x$ en (E4) se obtiene $x = 2$. Por tanto, $x = 2$, $y = \dfrac{8}{3}$, $h = 3$ (y $\lambda = 12$)

Clasificación.

$$\overline{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & yz & xz \\ yz & 0 & 18 - \lambda z \\ xz & 18 - \lambda z & 0 \end{vmatrix} \implies \overline{D}_2(2, 8/3, 3, 12) = -1728 < 0$$

$$\overline{D}_3 = \begin{vmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 18-\lambda z & 16-\lambda y \\ xz & 18-\lambda z & 0 & 12-\lambda x \\ xy & 16-\lambda y & 12-\lambda x & 0 \end{vmatrix} \implies \overline{D}_3(2,8/3,3,12) = -27648 < 0$$

Entonces en $\left(2,\dfrac{8}{3},3\right)$ el costo es mínimo. Las dimensiones de la caja para que el costo sea mínimo son $x=2,\;\; y=\dfrac{8}{3},\;\; h=3$

Ejercicios

En cada uno de los ejercicios que siguen, resuelva le problema de optimización propuesto y usando el criterio de clasificación, clasifique los puntos críticos encontrados.

6.6.1 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y)=x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2=-1$" tiene un máximo y un mínimo local. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine el máximo local y el mínimo local.

6.6.2 (*) Considere el plano $\Pi:\; Ax+By+z+D=0.$ Determine el punto $Q\in\Pi$ en el que la distancia del origen hasta el plano Π es mínima e indique esta distancia.

6.6.3 Utilice el método de Multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de una caja en la cual la suma de las longitudes de todas las aristas es 120 metros y que tenga el mayor volumen posible. Debe usar el criterio de clasificación.

6.6.4 Considere el problema: Optimizar $f(x,y) = x^2-(x-1)^2+y+(y-1)^2$ sujeto a la restricción $y-(x-1)^2=0.$ Calcule y clasifique los puntos críticos asociados al problema

6.6.5 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y)=x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2=1$" tiene varios máximos y un mínimos locales. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine los máximos locales y los mínimos locales.

6.6.6 Considere el plano $\Pi: x-2y+4z=4$ y $Q=(1,0,1)\notin\Pi.$ Determine el punto $P=(x,y,z)\in\Pi$ tal que la distancia $d(Q,\Pi)=d(Q,P)$ es mínima.

6.6.7 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y)=x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2=-1$" tiene un máximo y un mínimo local. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine el máximo local y el mínimo local.

6.6.8 Considere el problema: "Optimizar $f(x,y)=x^2+y^3+1$ sujeto a la restricción $x^2-y^2=1$" tiene varios máximos y un mínimos locales. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine los máximos locales y los mínimos locales.

6.6.9 Considere el plano $\Pi: x-2y+4z=4$ y $Q=(1,0,1)\notin\Pi$. Determine el punto $P=(x,y,z)\in\Pi$ tal que la distancia $d(Q,\Pi)=d(Q,P)$ es mínima.

6.6.10 Considere la superficie $S:\ z=x^2-y^2$ y $Q=(0,2,2)\notin S$. Determine el punto $P=(x,y,z)\in S$ tal que la distancia $d(Q,S)=d(Q,P)$ es mínima.

6.6.11 Considere la superficie S de ecuación $xy^2z=32$.

a.) Si $(x,y,z)\in\mathbf{S}$ entonces $x\neq0$, $y\neq0$ y $z\neq0$, ¿Porqué?

b.) Use multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos $\mathbf{Q}=(x,y,z)\in\mathbf{S}$ que están más cerca del origen $O=(0,0,0)$.

6.6.12 La densidad de una superficie metálica esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ está dada por $\rho=2+xz+y^2$. Encuentre los puntos donde la densidad es mayor y menor.

6.6.13 Maximizar $z=1-y$ sujeto a la condición $x^6+y^6=1$.

6.6.14 Obtener el máximo local de $f(x,y)=9-x^2-y^2$ sujeta a $x+y=3$

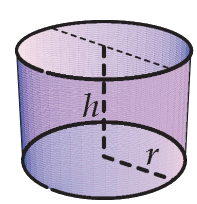
6.6.15 Sean k una constante positiva y $C(r,h)=2kr^2+2.5(2krh)$ con $r,h>0$. Minimizar $C(r,h)$ sujeta a la restricción $kr^2h=1000$.

6.6.16 Determine los valores máximos y mínimos de $z=x^2y^2$ sujeta a la condición $x^2+y^2=1$.

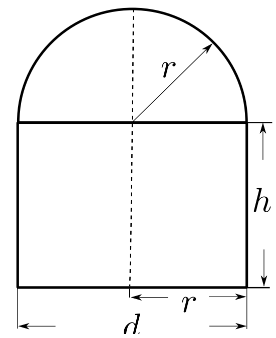
6.6.17 Calcule el valor mínimo de la función $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$ si (x,y) son puntos de la hipérbola $x^2-y^2=1$.

6.6.18 Un tanque sin tapa, de forma de caja rectangular, debe tener un volumen de 8000 cm^3. Los costos anuales de calefacción se calculan de la siguiente manera: \$2 por cm^2 para el fondo y para dos de las caras laterales (opuestas) y \$4 por cm^2 para las restantes dos caras laterales. Hallar las dimensiones del tanque que minimizan el costo.

6.6.19 Se quiere construir un cilindro circular recto con fondo pero *sin* tapa (ver figura). Si se dispone de $48\pi\,\text{cm}^2$ de lata para construirlo; use multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones del cilindro de tal manera que su volumen sea máximo.



6.6.20 Se desea construir un tanque para almacenar agua caliente en un cilindro con un tope esférico (media esfera).
El tanque se debe diseñar de tal manera que puede almacenar 300m^3 de líquido. Determinar la altura total y el diámetro del tanque de tal manera que la pérdida de calor en la superficie sea mínima. (La pérdida de calor en la superficie será mínima si su área es mínima).



6.6.21 (*) Consideremos el problema: Minimizar $f(x,y) = x^3 + y^3$ sujeto a la restricción $g = x - y = 0$. $(0,0)$ *no* es ni máximo ni mínimo local de f en D pues $\forall\, \epsilon > 0$, $(\epsilon,\epsilon) \in D$ y $(-\epsilon,-\epsilon) \in D$ pero $f(0,0) = 0 > f(-\epsilon,-\epsilon) = -2\epsilon^3$ y $f(0,0) = 0 < f(\epsilon,\epsilon) = 2\epsilon^3$. Sin embargo, verifique que $(0,0)$ es la única solución del sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$

6.6.22 (*) Consideremos el problema: Maximizar $z = -y$ sujeto a la restricción $y^3 - x^2 = 0$. El punto $(0,0,0)$ es un máximo local para este problema pues como $y^3 = x^2$ entonces $y \geqslant 0$ por lo que $z(x,y) = -y \leqslant= 0 = z(0,0)\ \ \forall\,(x,y) \in D$. Verfique que $(0,0)$ no es punto crítico de $L(x,y,\lambda) = -y - \lambda(y^3 - x^2)$.

6.7 ¿Puede fallar el método de Lagrange?

En general, el método de multiplicadores de Lagrange es muy eficiente, sin embargo los puntos críticos de L no necesariamente son solución del problema de optimización que da origen a L.

Consideremos el problema: Minimizar $f(x,y) = x^3 + y^3$ sujeto a la restricción $g = x - y = 0$.

$(0,0)$ *no* es ni máximo ni mínimo local de f en D pues $\forall\, \epsilon > 0$, $(\epsilon,\epsilon) \in D$ y $(-\epsilon,-\epsilon) \in D$ pero $f(0,0) = 0 > f(-\epsilon,-\epsilon) = -2\epsilon^3$ y $f(0,0) = 0 < f(\epsilon,\epsilon) = 2\epsilon^3$.

Sin embargo $(0,0)$ satisface $\nabla g(0,0) = (1,-1) \neq (0,0)$ y es la única solución (con $\lambda = 0$) del sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$,

$$\begin{array}{rcl} L_x &=& 3x^2 - \lambda \ = \ 0 \\ L_y &=& 3y^2 - \lambda \ = \ 0 \\ L_\lambda &=& x - y \ = \ 0 \end{array}$$

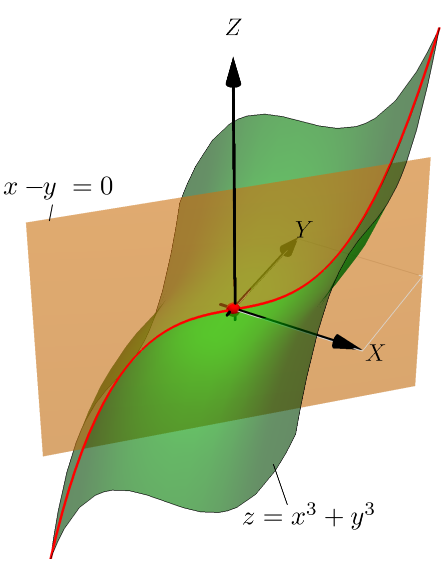


Figura 6.14: $(0,0,0)$ es punto crítico de L pero no es solución del problema

■ **Cuando ∇g se anula.** El método de multiplicadores de Lagrange requiere que ∇g no se anule en los puntos críticos de f sobre D para que el conjunto de puntos críticos de L contenga al conjunto de puntos críticos de f sobre D. Si $\nabla g(x)$ se anula podrían pasar varias cosas de cuidado.

Consideramos el problema de mínimizar la distancia de la curva $(x-1)^3-y^2=0$ al origen, es decir, minimizar $d=\sqrt{x^2+y^2}$ sujeta a $(x-1)^3-y^2=0$. Este problema es equivalente al problema:

$$\text{Minimizar } d=x^2+y^2 \text{ sujeta a } (x-1)^3-y^2=0.$$

$x=1$ y $y=0$ es una solución del problema (como se ve gráficamente), pues este punto está en la curva de restricción y también $(x-1)^3=y^2$ entonces $(x-1)^3\geqslant 0 \implies x\geqslant 1$. Por tanto de D, $d(x,y)=x^2+y^2\geqslant d(1,0)=1$.

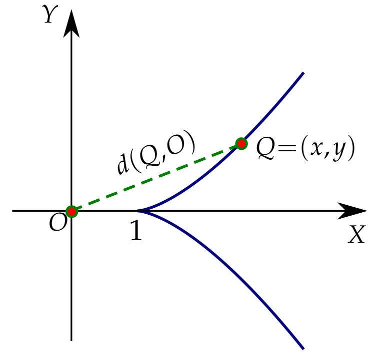


Figura 6.15: La distancia de la curva al origen se minimiza si $x=1$ y $y=0$

$(1,0)$ no es punto crítico de L. La lagrangiana sería $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda[(x-1)^3-y^2]$ y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x-3\lambda(x-1)^2 &= 0 \quad \text{(E1)}\\ 2y+2y\lambda &= 0 \quad \text{(E2)}\\ (x-1)^3-y^2 &= 0 \quad \text{(E3)}\end{cases}$$

Factorizando en (E2) obtenemos $y=0$ y $\lambda=-1$. Sustituyendo $y=0$ en (E3) nos da $x=1$, pero este valor no es solución pues no satisface (E1). Sustituyendo $\lambda=-1$ en (E1) nos da la cuadrática $3x^2-4x+3=0$ que tiene raíces complejas, así que ***el sistema no tiene soluciones*** en $\mathbb{R}$ y los puntos críticos de L no detectan el mínimo local $(1,0,1)$

Problema: Maximizar $z=-y$ sujeto a la restricción $y^3-x^2=0$

$(0,0,0)$ es un máximo local para este problema pues como $y^3=x^2$ entonces $y\geqslant 0$ por lo que $z(x,y)=-y\leqslant=0=z(0,0)\ \ \forall\,(x,y)\in D$.

$(0,0)$ no es punto crítico de $L(x,y,\lambda)=-y-\lambda(y^3-x^2)$. El sistema $\nabla L=0$ no tiene solución. El método de multiplicadores de Lagrange no detecta el óptimo.

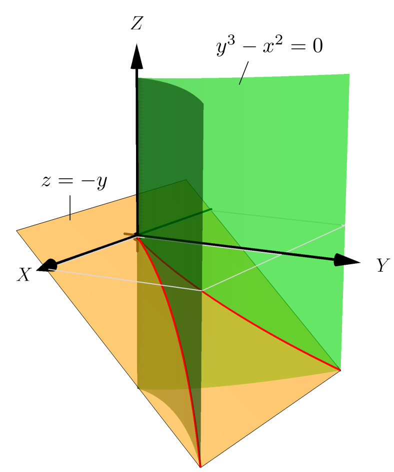


Figura 6.16: Máximo local en $(0,0,0)$

Problema: Maximizar $z=2x^3-3x^2$ sujeto a la restricción $(3-x)^3-y^2=0$

Este problema tiene solo un máximo local cuando $x=3$ y $y=0$ pero este máximo no está dentro de los cuatro puntos críticos de L.

El sistema $\nabla L=0$ tiene cuatro soluciones, todas con $\lambda=0$,

$(0, \pm 3\sqrt{3}, 0)$,

$(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)$

y no detecta el máximo local en $(3, 0)$.

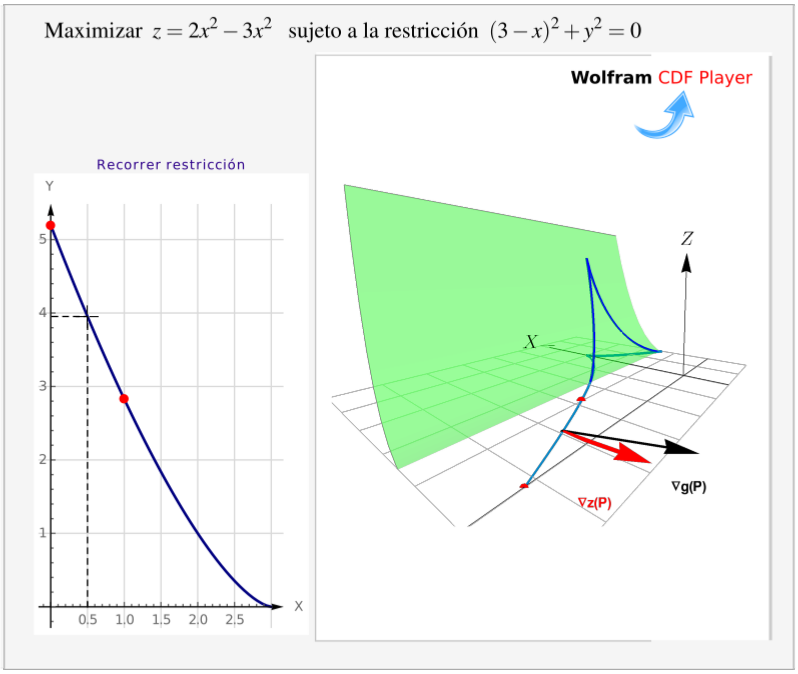


Figura 6.17: Máximo local se alcanza en $(3, 0)$, pero éste no es punto crítico de L

Problema: Mínimo $z = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 - y^2 = 0$

El mínimo local se alcanza en $(0, 0)$ y aunque $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, ahora sí $(0, 0)$ es solución del problema de optimización. En este caso $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ por lo que trivialmente la ecuación $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$ tiene infinitas solución $(0, 0, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

■ **Multiplicadores de Lagrange vs sustituir la restricción.** Consideremos el problema

$$\text{Optimizar} \quad z = x^2 - y^2 \quad \text{sujeto a la restricción} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Con multiplicadores de Lagrange

$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\nabla L = 0 \implies (x, y, \lambda) = \begin{cases} (0, -1, -1) \\ (0, 1, -1) \\ (1, 0, 1) \\ (-1, 0, 1) \end{cases}$$

Con una sustitución

Si hacemos la sustitución $y^2 = 1 - x^2$ en $z = x^2 - y^2$,

$$z = 2x^2 - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \implies (x, y) = \begin{cases} (0, -1) \\ (0, 1) \end{cases}$$

El método de sustitución funciona si hacemos la otra sustitución $x^2 = 1 - y^2$... pero...

Determinar extremos absolutos. Si el conjunto de puntos A_g donde la restricción g se anula, es cerrado y acotado y si f es continua entonces si hay extremos absolutos en A_g. Formalmente uno obtiene los valores de la función en los puntos críticos y los compara con los valores de la función en la frontera de A_g y así obtiene los extremos absolutos.

Los puntos críticos los detectamos usando el método de multiplicadores de Lagrange, pero también a veces hay extremos excepcionales en A_g en los que el gradiente de f o el de g se indefinen o puntos donde el gradiente de g se anula como el ejemplo anterior.

Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

7 — Integrales Múltiples

7.1 Introducción: Sumas de Riemann en una variable

Particiones de $[a,b]$. Una *partición* P en n subintervalos del intervalo $[a,b]$ es una colección $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ tal que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ y $\bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] = [a,b]$. Se denota con $||P||$ la "norma" de la partición.

$$||P|| = \max_{k=1,...,n} |x_{k-1} - x_k|$$

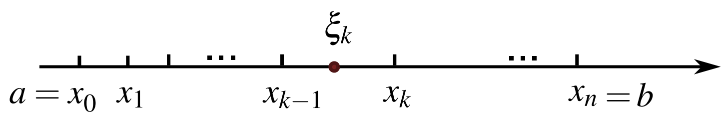


Figura 7.1: Partición del intervalo $[a,b]$

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$. Una *suma de Riemann* de f respecto a una partición $P = \{x_0, ...x_n\}$, es una suma de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

con $\quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad$ y $\quad \Delta x_k = |x_{k-1} - x_k|.$

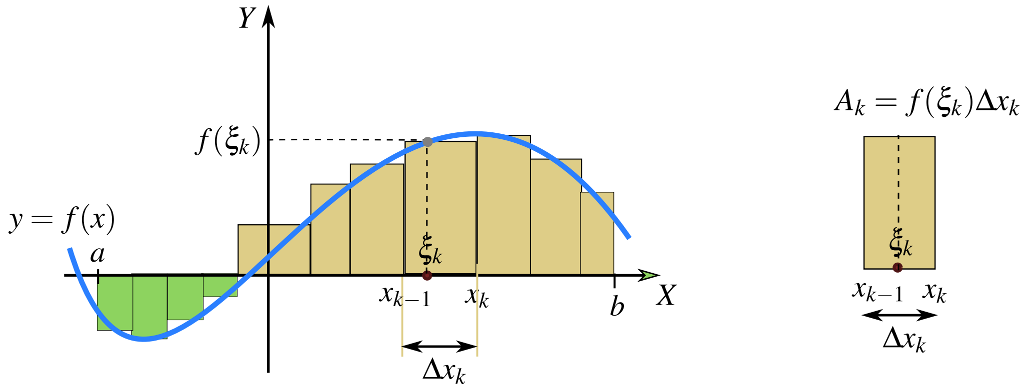


Figura 7.2: Suma de Riemann respecto a la partición P

Observe que $A_k = f(\xi_k)\Delta x_k$ puede ser negtivo si $f(\xi_k) < 0$.

Teorema 7.1 (Integral de Riemann)

Sea f una función definida en $[a,b]$. Si existe un número I para el que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $n \geqslant N$ y ξ_k es escogido arbitrariamente en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, con $x_k = a + k(b-a)/n$, se cumple

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\frac{b-a}{n} - I \right| < \varepsilon$$

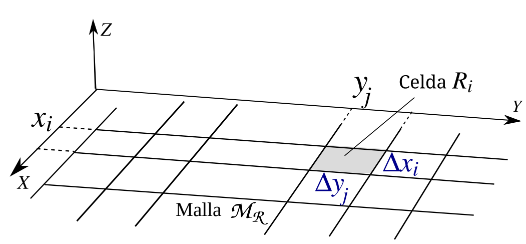
entonces f es integrable en el sentido Riemann.

Dado que si f es Riemann-integrable entonces se cumple el teorema y si se cumple el teorema, f es Riemann integrable, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \iff I = (b-a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{n}$$

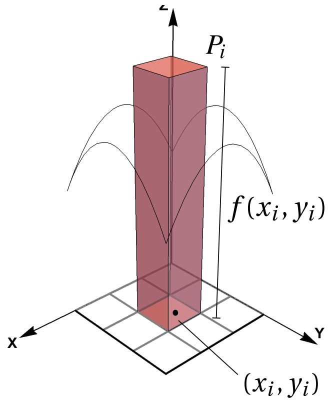
7.2 Integral doble

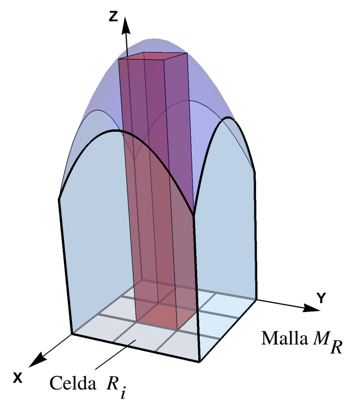
Sea $R = [a,b] \times [c,d]$, y sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida y acotada sobre R. Supongamos que $M_R = \{R_{11}, R_{12}, ...R_{nm}\}$ es un conjunto de nm *rectángulos* que conforman una *malla* que cubre R (ver figura). El área de cada celda R_{ij} la denotamos con ΔA_{ij}. La malla M_R es el conjunto de rectángulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.



Una *suma de Riemann* de f sobre R es una expresión de la forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij}$ donde $(x_i,y_j)\in R_{ij}$.

Si f es continua y positiva sobre R, entonces $f(x_i,y_j)\Delta A_{ij}$ aproxima el volumen de cada paralelepípedo P_{ij} de base R_{ij} y altura $f(x_i,y_j)$; en este caso la *suma de Riemann* aproxima el volumen del sólido entre la región R y el gráfico de f.





Diámetro de la malla. El *diámetro* de cada celda R_{ij} es la máxima distancia entre todas las distancias entre cualesquiera dos puntos en R_{ij} y se denota $||R_{ij}||$. El *diámetro* de la malla M_R es $||M_R|| = \text{Sup}_i\{||R_{ij}||\}$. Conforme $||M_R||\to 0$, el área de cada celda tiende a cero, es decir, $\Delta A_{ij}\to 0$ y la cantidad de celdas se hace infinitamente grande: $n\to\infty$.

Volumen. Si f es continua y no negativa en la región R, entonces e siguiente límite existe,

$$V_Q = \lim_{||M||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \qquad \text{con} \quad nm = \text{Card}(M)$$

y V_Q es el volumen de sólido Q, limitado por la región R y la superficie $S:\ z=f(x,y)$. El límite se toma sobre todas las posibles mallas rectángulares M_R con (x_i,y_j) cualquier punto de R_{ij}.

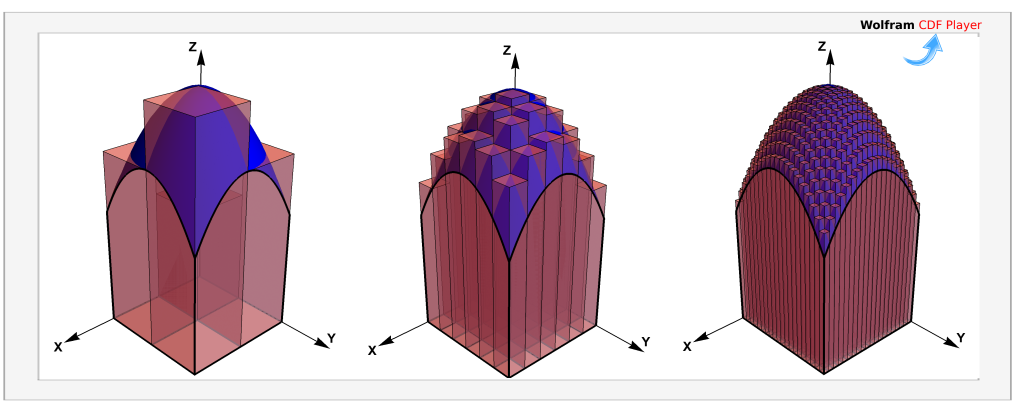


Figura 7.3: Aproximación del volumen de un sólido con sumas de Riemann

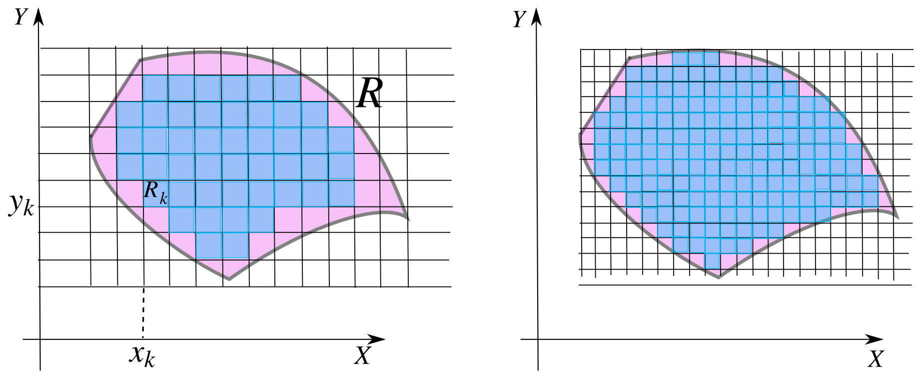
Caso general. Si la región R es una región cerrada y acotada y f es no negativa y está definida y es acotada sobre R, entonces usamos una malla de rectángulos R_{ij}, contenidos en la región R, de área ΔA_{ij} contenidos en R. Si f es no negativa en la región R, entonces el volumen V del sólido Q limitado por R y la superficie $S:\ z=f(x,y)$ se aproxima con

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij}$$

siendo $\Delta A_k = \Delta x_k\,\Delta y_k$.

Suponiendo que f es continua sobre R y que la región R está limitada por una curva suave a trozos (con un número finito de trozos), entonces conforme $||M_R||\to 0$, el área de cada celda tiende a cero, es decir, $\Delta A_k\to 0$ y la cantidad de celdas se hace infinitamente grande ($n \to \infty$) y la unión de los rectángulos R_{ij} se va ajustando a la región R conforme $||M_R|| \to 0$. El volumen de Q se obtiene como

$$\lim_{||M|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta A_{ij} \quad \text{con} \quad nm = \text{Card}(M)$$



El límite se toma sobre todas las mallas M_R y con (x_k, y_k) cualquier punto de R_k. La generalización de estas ideas no requiere que f sea no negativa, solo requiere que el límite anterior exista.

Definición 7.1 (Función integrable).

Si las sumas de Riemann de f tienen un límite (que se toma sobre todas las posibles mallas rectángulares M_R contenidas en la región R) independiente de la escogencia de los (x_i, y_j), conforme $||M_R|| \to 0$, entonces decimos que f es *integrable* sobre R y que la integral es este límite. En este caso escribimos,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{||M|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{con} \quad nm = \text{Card}(M)$$

Las propiedades de las funciones integrables en dos variables son similares a las propiedades de las funiones integrables en una variable.

Teorema 7.2 (Propiedades de la funciones integrables).

a.) Si f es continua sobre R, entonces f es integrable sobre R.

b.) Sea $k \in \mathbb{R}$. Si f y g son integrables sobre R, entonces kf y $f \pm g$ son integrables sobre R y

$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA \qquad \text{y} \qquad \iint_R f(x,y) \pm g(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$$

c.) Si f y g son integrables sobre regiones R y S que no se traslapan, entonces f es integrables sobre $R \cup S$ y

$$\iint_{R \cup S} f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_S f(x,y)\,dA$$

d.) Si f y g son integrables sobre R y $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

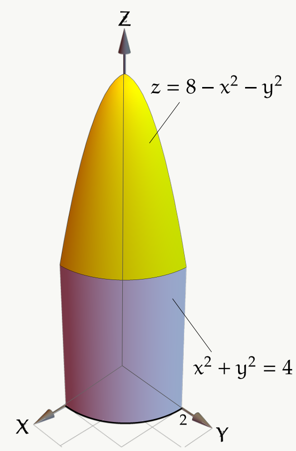
$$\iint_R f(x,y)\,dA \leqslant \iint_R g(x,y)\,dA$$

e.) Si f es integrable sobre R y $M \leqslant f(x,y) \leqslant m$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$m\,A(R) \leqslant \iint_R f(x,y)\,dA \leqslant M\,A(R)$$

Ejemplo 7.1

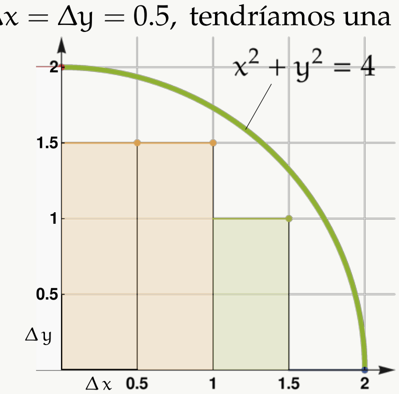
Consideremos el sólido Q limitado por la superficie $S_1 : z = 8 - x^2 - y^2$ y el cilindro $S_2 :\ x^2 + y^2 - 4$ en el primer octante, tal y como se muestra en la figua de la derecha. La región de integración R sería el cuarto de círculo de radio 2 en el primer cuadrante.

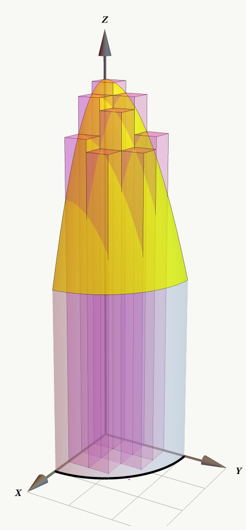


La función $f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$ es integrable en esta región R. Podemos aproximar el volumen del sólido Q usando la aproximación

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$$

Usando $\Delta x = \Delta y = 0.5$, tendríamos una malla de 8 rectángulos, cada uno de área 0.5^2.





Calculamos $f(x_i, y_j)$ para cada $x_i = i \cdot 0.5$, $y_i = i \cdot 0.5$ en la malla

x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$	x_i	y_i	$f(x_i,y_j)$
0.5	0.5	7.5	0.5	1.	6.75	0.5	1.5	5.5			
1.	0.5	6.75	1.	1.	6.	1.	1.5	4.75			
1.5	0.5	5.5	1.5	1.	4.75						

Entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx f(x_1,y_1)\Delta A_{11} + f(x_1,y_2)\Delta A_{12} + \dots + f(x_1,y_3)\Delta A_{13}$$

$$\begin{aligned} V_Q = \iint_R f(x,y)\,dA &\approx 7.5\cdot 0.25 + 6.75\cdot 0.25 + 5.5\cdot 0.25 + 6.75\cdot 0.25 \\ &\quad +6\cdot 0.25 + 4.75\cdot 0.25 + 5.5\cdot 0.25 + 4.75\cdot 0.25 \\ &\approx 11.875 \end{aligned}$$

Por supuesto, esta aproximación no es muy buena. Se requiere una malla más fina para llegar cerca de $V_Q = 8\pi - 4 \approx 21.1327$.

Por ejemplo con $\Delta x = \Delta y = 0.2$, se obtiene $V_Q \approx 16.2912$ y con $\Delta x = \Delta y = 0.05$, se obtiene $V_Q \approx 18.179$

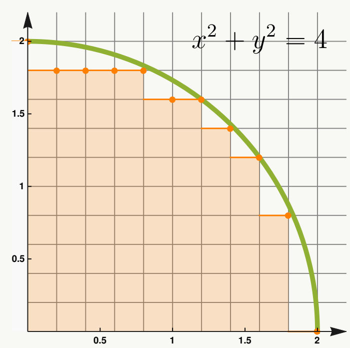


Figura 7.4: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.2$

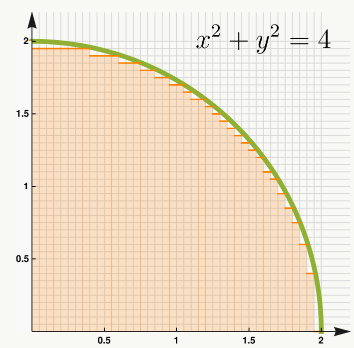


Figura 7.5: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.05$

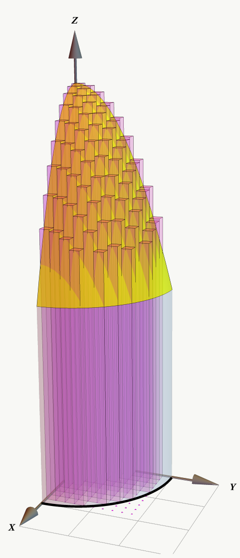


Figura 7.6: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.2$

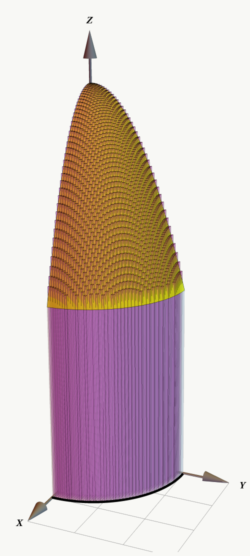


Figura 7.7: Malla con $\Delta x = \Delta y = 0.05$

Otros tipos de integración. El concepto de integral que hemos visto es el concepto de integral en el sentido de Riemann y es suficiente para los cálculos y las aplicaciones en este curso. Para otros propósitos esta integral no es adecuada y se requiere definir un tipo más general de integración, por ejemplo la integral en el sentido Lebesgue, integral de Riemann-Stieltjes, integral de Henstock-Kurzweil, etc.

7.3 Cálculo de integrales dobles. Integral iterada.

Idea del volumen como una suma de volúmenes de "rebanadas". Consideremos un sólido Q cuya proyección sobre el plano XY es un rectángulo. Tomamos una partición del intervalo $[a,b]$ en el eje X, $a = a_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, luego consideramos las rebanadas "planas" del sólido que se obtienen intersecando el sólido con cada plano $P_k: \ x = x_k$. Digamos que cada rebanada tiene área $A(x_k)$. Cada sección del sólido, entre los planos P_{k-1} y P_k, es aproximadamente un prisma y, su volumen aproximado es $A(x_k)\Delta x_k$. De esta manera:

Volumen de $\quad Q : V_Q \approx \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$

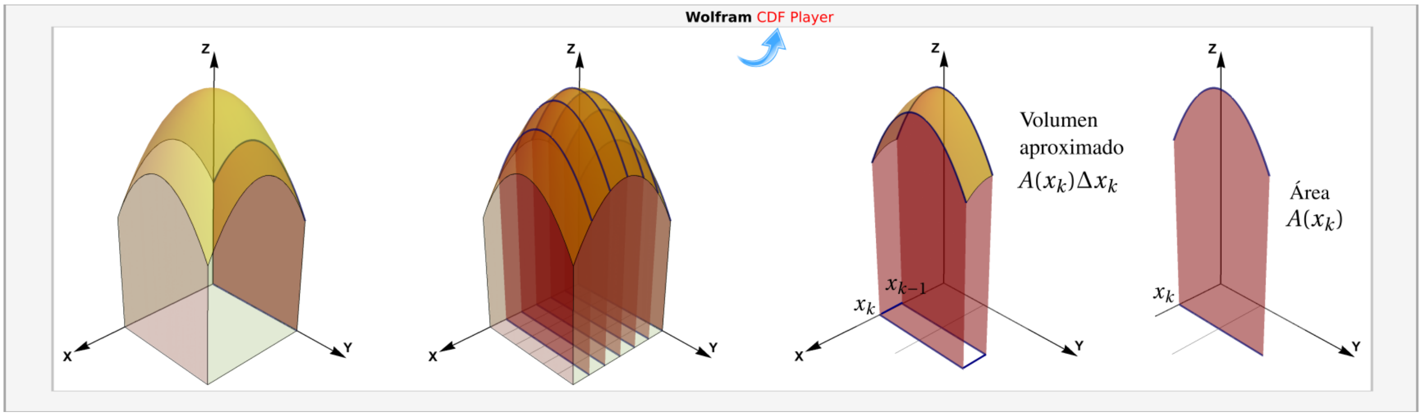


Figura 7.8: Volumen de Q aproximado como una suma del volúmenes de n rebanadas

Ahora, tomando una partición de $[a,b]$ en n subintervalos de igual tamaño tenemos

$$\text{Volumen de} \quad Q : V_Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k \ = \int_a^b A(x)\,dx$$

Pero cada área $A(x_k)$ se puede calcular en el plano $x = x_k$ como $A(x_k) = \displaystyle\int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_k, y)\,dy$, entonces tendríamos

$$\text{Volumen de} \quad Q : V_Q = \int_a^b A(x)\,dx \ = \int_a^b \left(\int_p^q f(x,y)\,dy \right) dx$$

Integrales iteradas. La idea anterior se puede generalizar a sólidos con una proyección más general. Consideramos un sólido Q entre las superficies (suaves) $S_1: \ z = f(x,y)$ y $S_2: \ z = g(x,y)$, como se muestra en la figura que sigue; conforme nos desplazamos por los planos $x = x_k$, el área $A(x_k)$ y el volumen V_Q se obtienen como

$$A(x_k) = \int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} [f(x_k,y) - g(x_k,y)]\,dy \quad \text{y entonces} \quad V_Q = \int_a^b A(x)\,dx \ = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} [f(x,y) - g(x,y)]\,dy \right) dx$$

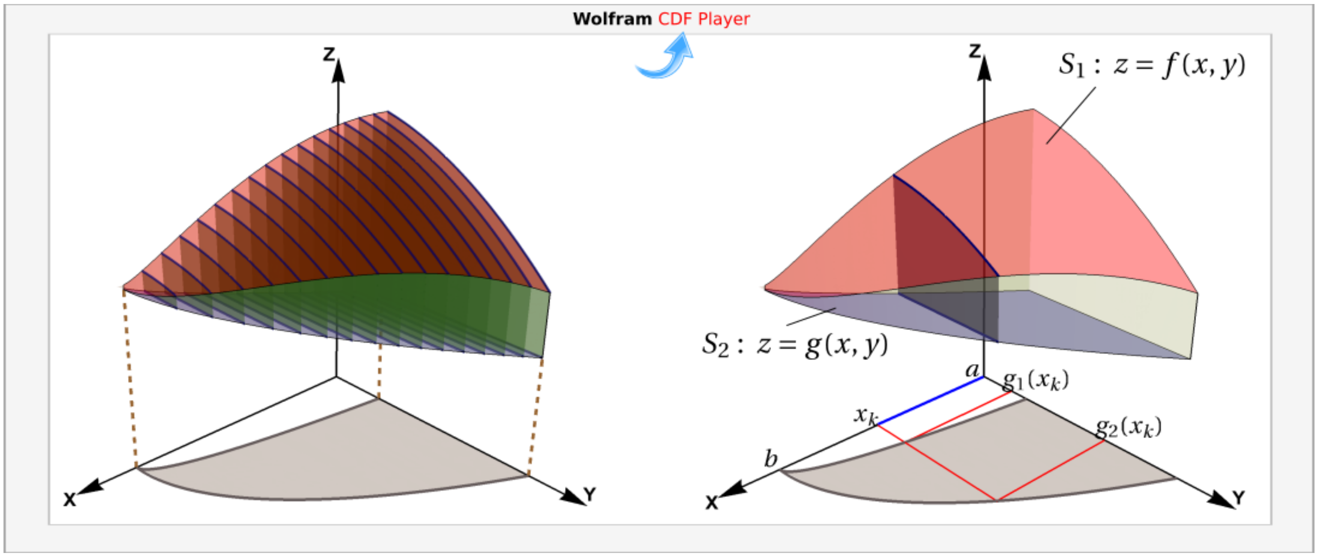


Figura 7.9: Cálculo de integral iterada, en el orden $dydx$

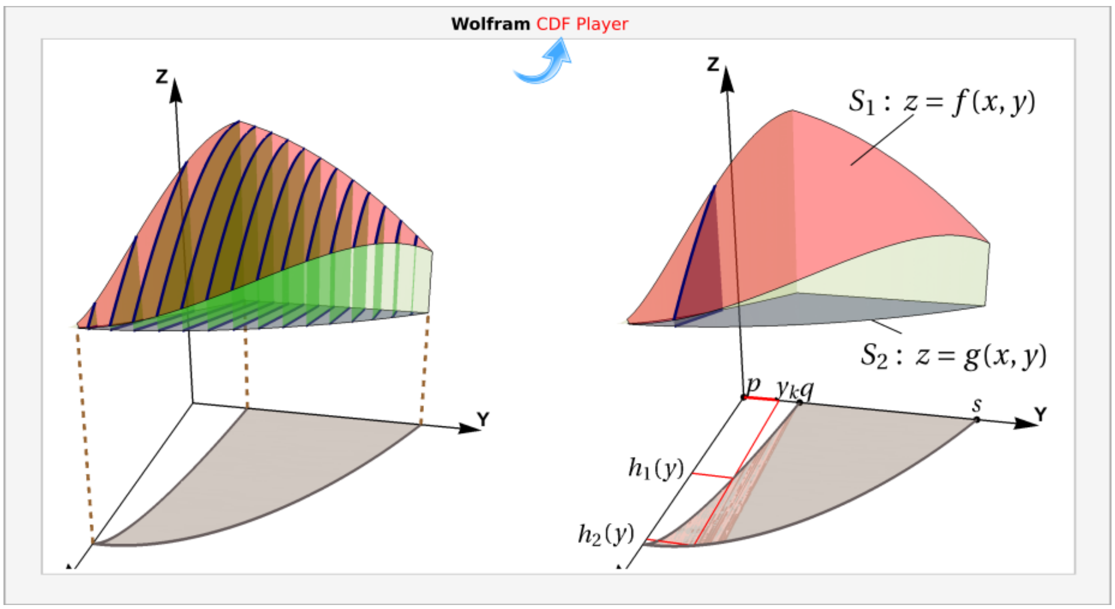


Figura 7.10: Cálculo de integral iterada, en el orden $dxdy$

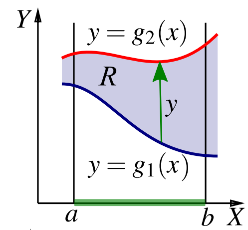
De manera análoga, si nos desplazamos sobre los planos $y = y_k$, el área $A(x_k)$ y el volumen V_Q se obtienen como

$$A(x_k) = \int_{h_1(y_k)}^{h_2(y_k)} [f(x,y_k) - g(x,y_k)]\,dx \quad \text{y entonces} \quad V_Q = \int_p^q A(x)\,dy \; = \; \int_p^q \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} [f(x,y) - g(x,y)]\,dx \right) dy$$

El teorema de Fubini establece que si f es continua sobre R (por tanto Riemann integrable) la integral doble se puede evaluar por "integración parcial" respecto a cada variable, una a la vez. Este es el método de "integrales iteradas". Primero debemos especificar dos maneras de describir una misma región.

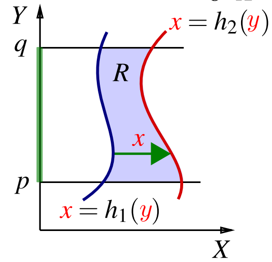
- Región entre las curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$.

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$ y $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$ con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$.



- Región entre las curvas $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$.

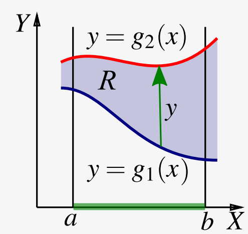
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \leqslant y \leqslant q$ y $h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$ con h_1 y h_2 funciones continuas en $[p,q]$.



Teorema 7.3 (Fubini).

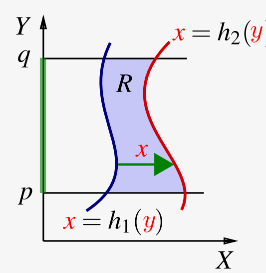
Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$ y $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$ con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$. Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$



Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \leqslant y \leqslant q$ y $h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$ con h_1 y h_2 funciones continuas en $[p,q]$. Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_p^q \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_p^q \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

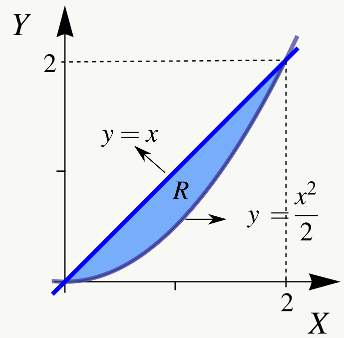


Ejemplo 7.2

Sea R la región de la figura. Vamos a calcular $\iint_R xy\,dA$ usando el orden de integración "$dy\,dx$" y el orden de integración "$dx\,dy$."

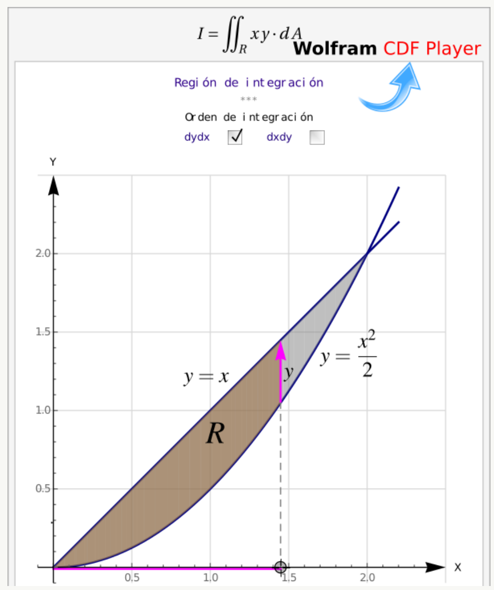
Si la variable independiente es x entonces la región R está entre las curvas $y = x$ (arriba) y $y = \dfrac{x^2}{2}$ (abajo), entre $x = 0$ y $x = 2$.

Tomando a y como variable independiente, entonces la región estrá entre $x = y$ (“abajo”) y $x = \sqrt{2y}$ (“arriba”) entre $y = 0$ y $y = 2$.



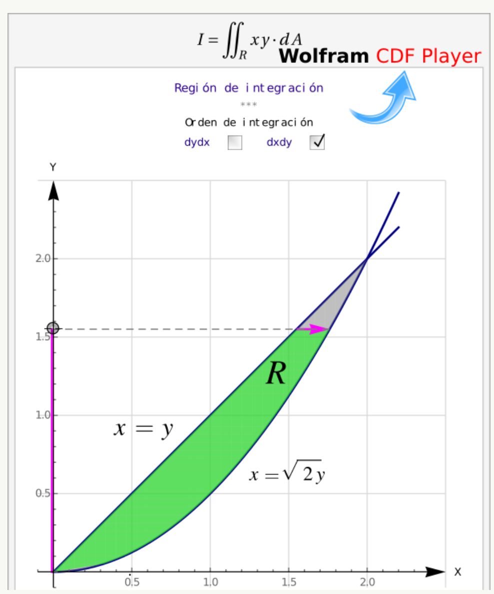
• Integrando en el orden “dy dx”: En este caso, la variable independiente es x.

$$\begin{aligned} \iint_R xy\,dA &= \int_0^2 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} xy\,dy\right] dx \\ &= \int_0^2 \left[x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right] dx \\ &= \int_0^2 \left[x\,\frac{x^2}{2} - x\,\frac{x^4}{8}\right] dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



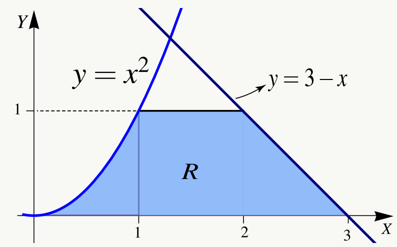
• Integrando en le orden “dx dy”: En este caso, la variable independiente es y.

$$\begin{aligned} \iint_R xy\,dA &= \int_0^2 \left[\int_{y}^{\sqrt{2y}} xy\,dx\right] dy \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,y\Big|_{y}^{\sqrt{2y}}\, dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{2y}{2}\,y - \frac{y^2}{2}\,y\right] dy = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



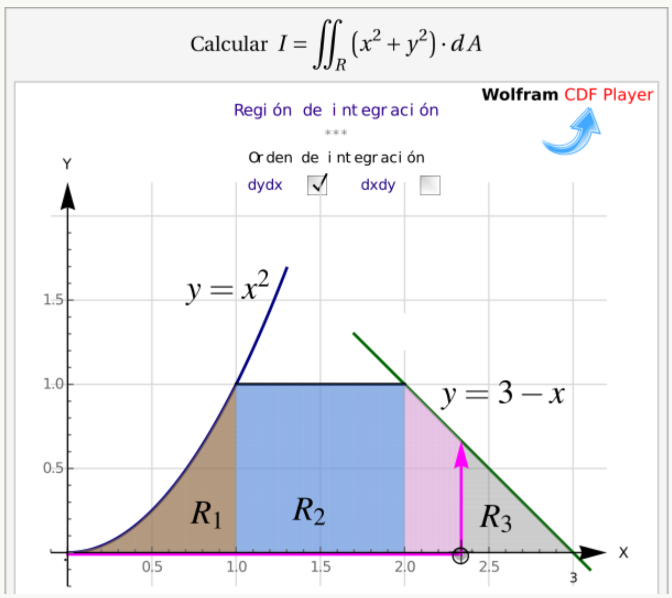
Ejemplo 7.3

En este ejemplo se muestra como el número de regiones de integración puede variar, de acuerdo a la elección del orden de integración.



Considere la integral $I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región de la figura. Vamos a calcular esta integral doble, usando el orden de integración "$dy\, dx$" y el orden de integración "$dx\, dy$."

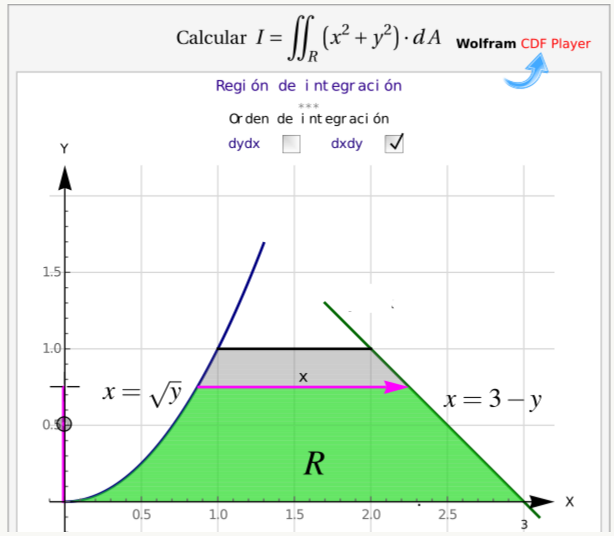
- Orden "$dy\, dx$": en este caso $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$. La manera de ver la región es como sigue,



$$
\begin{aligned}
\iint_R x^2 + y^2\, dA &= \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} x^2 + y^2\, dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^1 x^2 + y^2\, dy \right] dx + \int_2^3 \left[\int_0^{3-x} x^2 + y^2\, dy \right] dx \\
&= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 dx + \int_2^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{3-x} dx \\
&= \int_0^1 x^4 + \frac{x^6}{3}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{3} + x^2\, dx + \int_2^3 9 - 9x + 6x^2 - \frac{4x^3}{3}\, dx \; = \; \frac{1207}{210}
\end{aligned}
$$

• Orden "dx dy"

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{3-y} x^2+y^2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\Big|_{\sqrt{y}}^{3-y}\right] dy \\
&= \int_0^1 \frac{(3-y)^3}{3}+(3-y)y^2-(\frac{\sqrt{y}^3}{3}+y^2\sqrt{y})\,dy \\
&= \frac{1207}{210}
\end{aligned}
$$

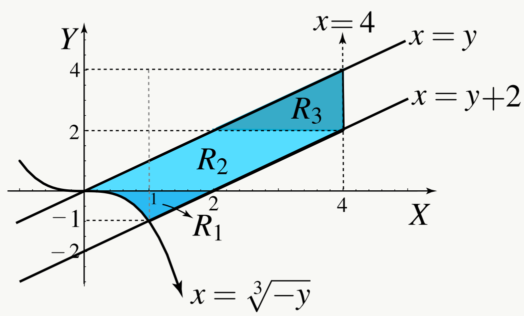


Ejemplo 7.4

Considere la integral $I = \int_0^1\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^4\int_{x-2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$. Dibuje la región de integración y reescriba la integral en el orden "dx dy."

Solución: La región de integración en la primera integral es $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $x \leqslant y \leqslant -x^3$. La región de integración en la segunda integral es $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $x \leqslant y \leqslant x-2$.

En la figura aparece la región de integración. Si y es la variable independiente, $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$.



• Orden "dx dy"

$$
\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \iint_{R_3} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA + \iint_{R_1} f(x,y)\,dA \\
&= \int_2^4\int_y^4 f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^2\int_y^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^0\int_{-\sqrt[3]{y}}^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

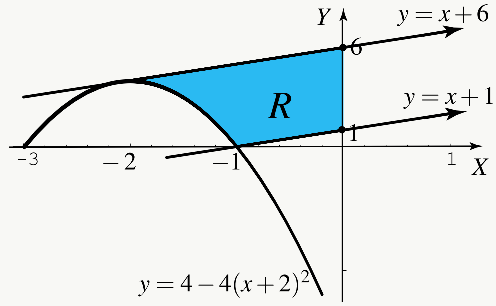
Ejemplo 7.5

Sea $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1}\int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dy\,dx + \int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{x+6} dy\,dx.$

a.) Dibuje la región de integración.

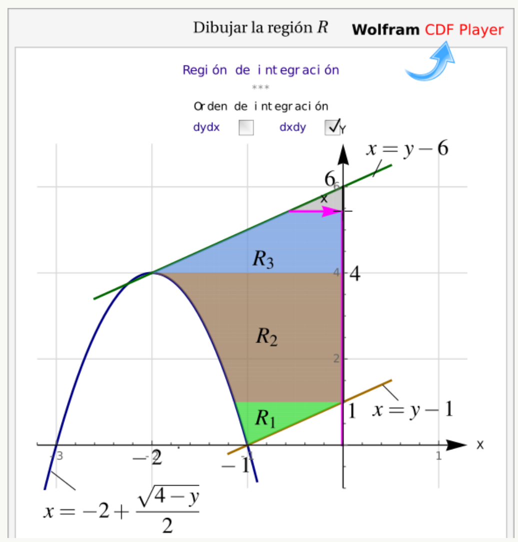
b.) Plantear la integral o las integrales que corresponden a I invirtiendo el orden de integración.

Solución: La región es



$$R\;:\;\begin{cases} 4-4(x+2)^2 \leqslant y \leqslant x+6 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ x+1 \leqslant y \leqslant x+6 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para integrar en el orden "dx dy" hay que partir la región en tres subregiones R_1, R_2, R_3.



$$\begin{cases} R_1: \; -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2} \leqslant x \leqslant y-1 & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ R_2: \; -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2} \leqslant x \leqslant 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant y \leqslant 4 \\ R_3: \; y-6 \leqslant x \leqslant 0 & \text{si} \quad 4 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$$

Luego,

$$I = \int_0^1\int_{-2+\frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{y-1} dx\,dy + \int_1^4\int_{-2+\frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{0} dx\,dy + \int_4^6\int_{y-6}^{0} dx\,dy$$

7.4 Área de una región

- De acuerdo con nuestra definición de integral doble, el área A_R de una región R se puede calcular con la integral doble ("área de la base × altura")

$$A_R = \iint_R 1\,dA$$

Ejemplo 7.6

Considere una región R de área $A_R = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$

1. Dibuje la región R
2. Plantee la o las integrales que permiten calcular A_R en el orden de integración $dx\,dy$.
3. Calcule A_R

Solución:

1. Dibuje la región R : La integral $A_R = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx$ nos dice que la región R está entre las curvas $y = 2x$ (abajo) y $y = 3 - x^2$ (arriba), entre $x = 0$ y $x = 1$.

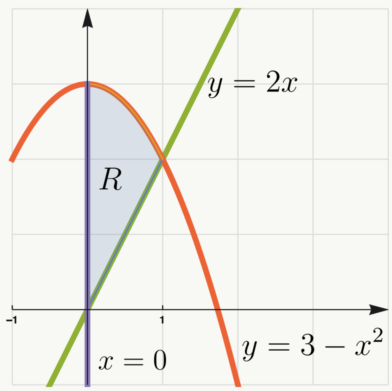


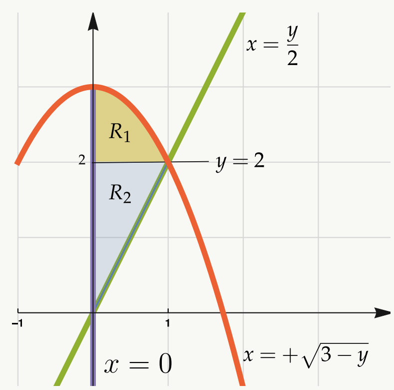
Figura 7.11: Región de integración R

2. Para calcular A_R en el orden de integración $dx\,dy$ debemos despejar x como función de y.

$$x = \frac{y}{2} \quad \text{y} \quad x = +\sqrt{3-y}$$

Además debemos calcular la intersección entre estas curvas para poder partir la región apropiadamente.

$y = 2x \ \cap \ y = 3 - x^2 \implies 2x = 3 - x^3 \implies x = 1 \ \wedge \ y = 2$



Región de integración $R = R_1 + R_2$

La región queda de la siguiente manera

$$A_R = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} dy\,dx + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{3-y}} dy\,dx$$

3. $A_R = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy\,dx \ = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} y\Big|_{2x}^{3-x^2} dx = \int_0^1 (3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{5}{3}\ ul^2$

7.5 Ejercicios

7.5.1 Considere la integral

$$I = \int_0^1 \int_{2y^2}^{3-\sqrt{y}} \mathbf{36}\, dx\, dy + \int_{-1}^0 \int_0^{3(y+1)} \mathbf{36}\, dx\, dy$$

a.) Dibuje la región R de integración.
b.) Plantee la integral I en el orden de integración $dy\,dx$.
c.) Calcule I

7.5.2 El área de la región R_{xy} viene dada por $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} dx\, dy$. Dibuje la región R_{xy} y calcule la integral en el orden $dy\, dx$.

7.5.3 Considere la integral $I = \displaystyle\int_0^4 \int_{4-z}^{8-z^2/2} xy\, dy\, dz + \int_{-4}^0 \int_{4+z}^{8-z^2/2} xy\, dy\, dz$. Dibuje la región de integración y plantear la integral I usando el orden de integración $dz\, dy$.

7.5.4 Calcular $\displaystyle\iint_D x^2 \cos(y)\, dA$ si D es la región que se muestra en la figura a la derecha

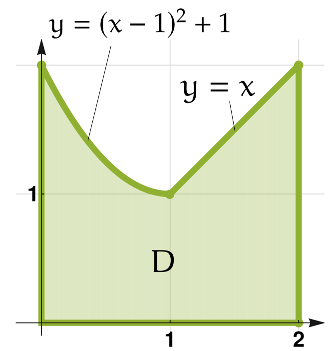
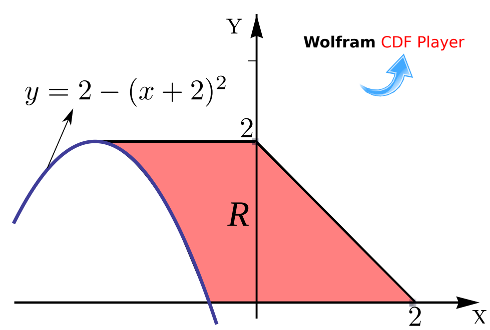
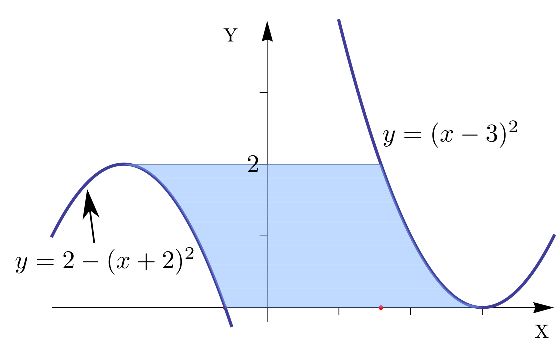


Figura 7.12: Región D

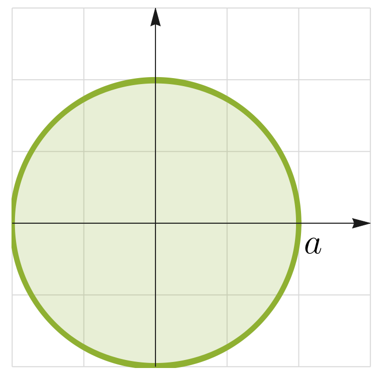
7.5.5 Considere la región R que se muestra a la derecha (región sombreada). Esta región está limitada por las curvas $y = 0$; $y = 2$; $y = 2-(x+2)^2$ y $x + y = 2$. Plantear la integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)\, dA$ en el orden "$dx dy$" y en el orden "$dy dx$"



7.5.6 Considere la región R a la derecha. Esta región está limitada por las curvas $y = 0$; $y = 2$; $y = 2-(x+2)^2$ y $y = (x-3)^2$. Plantear la integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)\, dA$ en el orden "$dx dy$" y en el orden "$dy dx$"



7.5.7 Use integrales dobles para calcular el área del círculo de ecuación $x^2+y^2=a^2$



7.6 Aplicación: Cálculo del centro de masa

Consideremos el "subeybaja" uniforme de la figura7.6 con masas m_1 y m_2 en cada extremo.

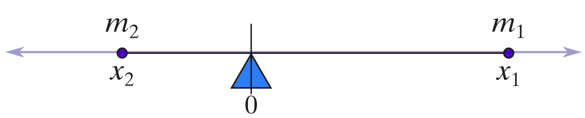


Figura 7.13: El "subeybaja" está en equilibrio si $x_1m_1+x_2m_2=0$

Si situamos el "subeybaja" en un sistema de coordenadas XY con el punto de apoyo ("fulcro") en el origen. En este caso, las coordenadas x_1, x_2 cumplen $x_2<0<x_1$.. El "subeybaja"*está en equilibrio* si

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

En este caso, si la suma da cero, el *centro de masa* ("punto de balance") sería el origen. El punto de balance o centro de masa los denotamos con $\overline{x}$.

Momento. Si tenemos k cuerpos de masa m_i entonces el producto m_ix_i se llama "momento" de este cuerpo respecto al origen del sistema de coordenadas y $m_1x_1+m_2x_2+...+m_kx_k$ se llama el "momento total" respecto al origen.

Para encontrar el centro de masa se usa el siguiente principio de la física

> El centro de masa es el punto $\overline{x}$ con la propiedad de que si toda la masa del sistema fuera concentrada allí, el momento total del nuevo sistema debe ser el mismo que el del sistema original

Es decir, si $M=m_1+m_2+...+m_k$ es la masa total, entonces el centro de masa $\overline{x}$ cumple

$$M\,\overline{x}=x_1\,m_1+m_2\,x_2+...+x_k\,m_k$$

Tenemos entonces $\overline{x}=\dfrac{x_1\,m_1+m_2\,x_2+...+x_k\,m_k}{M}$

En dos y tres dimensiones la idea es similar: Tenemos k cuerpos, el cuerpo i tiene masa m_i

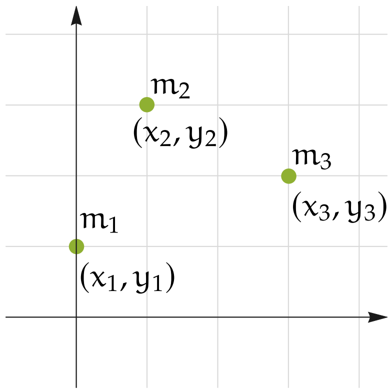


Figura 7.14: Sistema de k masas en $\mathbb{R}^2$

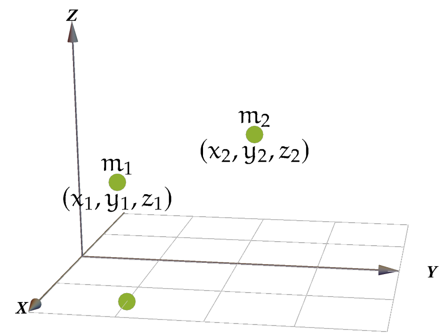


Figura 7.15: Sistema de k masas en $\mathbb{R}^3$

El "momento" mide como el sistema se balancea respecto al sistema de coordenadas. Las coordenadas x_i miden la posición relativa respecto al eje Y y las coordenadas y_i miden la posición relativa respecto al eje X

$$\text{Momento total respecto al eje} \quad Y = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i$$

$$\text{Momento total respecto al eje} \quad X = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i$$

Nuestro principio físico dice que el centro de masa es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que

$$M\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} m_i\, x_i \quad \Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i\, x_i}{M}$$

y

$$M\,\overline{y} = \sum_{i=1}^{k} m_i\, y_i \quad \Longrightarrow \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i\, y_i}{M}$$

Y en tres dimensiones el centro de masa $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ se define de manera similar.

En el caso "continuo" en $\mathbb{R}^2$, tenemos la masa distribuida de una manera continua a través del sistema. Imaginemos que tenemos una "lámina delgada" con densidad $\rho(x, y)$ en cada punto (x, y). La "lámina" es una región D del plano XY, entonces el centro de masa es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\text{Momento total respecto al eje } Y}{\text{Masa total}} = \dfrac{\displaystyle\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA}{M} \\[2em] \overline{y} = \dfrac{\text{Momento total respecto al eje } X}{\text{Masa total}} = \dfrac{\displaystyle\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA}{M} \end{cases} \quad \text{con} \quad M = \iint_D \rho(x,y)\,dA$$

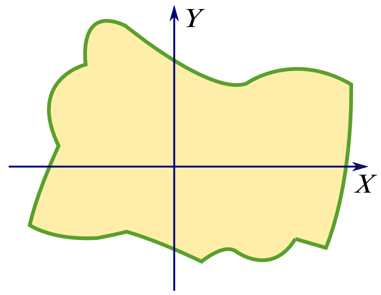


Figura 7.16: "Lámina" D con densidad $\rho(x,y)$ en cada punto (x,y)

Intuitivamente, el término "$\rho(x,y)\,dA$" representa la masa de una pieza de lámina "inifinitamente pequeña" y $M = \iint_D \rho(x,y)\,dA$ es el límite de las sumas de las masas "locales", es decir, la masa total. Las otras integrales son el límite de las sumas de los "momentos" correspondientes.

Valor promedio de una función. El valor promedio de una función es $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sobre D es

$$\bar{f}_D = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_D 1\cdot\,dA}$$

Ejemplo 7.7

Considera la región D, en la figura a al derecha, que representa una "lámina"de densidad $\rho(x,y) = x^2 + y$. Calcule su centro de masa.

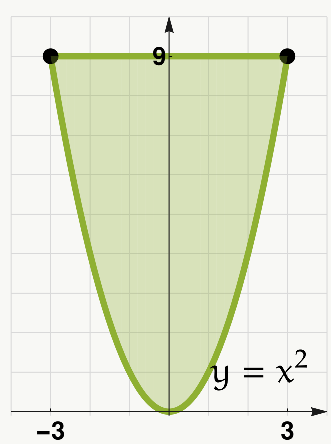


Figura 7.17: Región D: Lámina de densidad $\rho(x,y) = x^2 + y$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & \dfrac{\displaystyle\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_D \rho(x,y)\,dA} \\ \\ \bar{y} & = & \dfrac{\displaystyle\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_D \rho(x,y)\,dA} \end{array}\right.$$

Masa $M = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9}(x^2+y)\,dy\,dx = \dfrac{1296}{5}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x} & = & \dfrac{\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} x\,(x^2+y)\,dy\,dx}{M} = 0 \\ \\ \overline{y} & = & \dfrac{\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} y\,(x^2+y)\,dy\,dx}{M} = \dfrac{45}{7} \approx 6.43 \end{array}\right.$$

El centro de masa es $(\overline{x},\overline{y}) \approx (0, 6.43)$

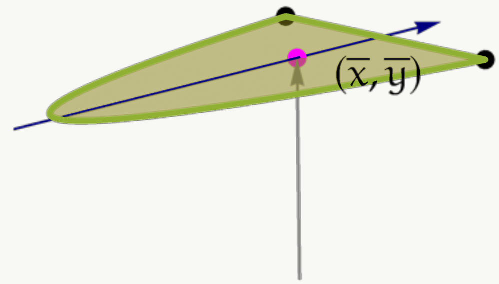
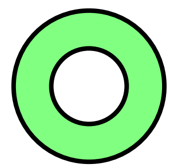


Figura 7.18: Centro de masa $(\overline{x},\overline{y})$

N Puede pasar que el entro de masa quede fuera de la región D, por ejemplo en el caso de que D sea un anillo o tenga forma de herradura, con densidad uniforme



Ejemplo 7.8

Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x,y) = x + e^{5y+5}$

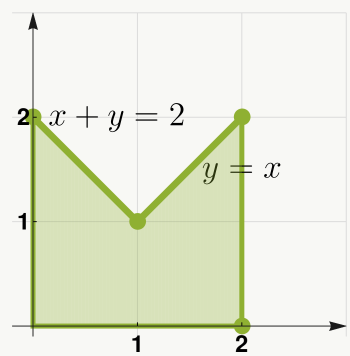


Figura 7.19: Lámina con $\rho(x,y) = x + e^{5y+5}$

Solución: Masa $M = \int_0^1\int_0^{2-x}\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x}\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx \approx 259703.$

$$\overline{x} = \frac{\int_0^1\int_0^{2-x} x\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x} x\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx}{M} \approx 1$$

$$\overline{y} = \frac{\int_0^1\int_0^{2-x} y\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^{x} y\left(x+e^{5y+5}\right)dy\,dx}{M} \approx 1.607187$$

Observe que en este caso el centro de massa está fuera de la la lámina: $(\overline{x},\overline{y}) \approx (1, 1.607)$

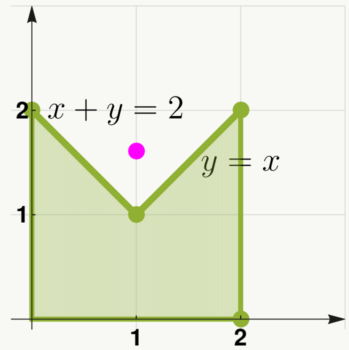


Figura 7.20: Centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$

7.7 Ejercicios

7.7.1 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x,y) = 3x^2 + 3y^2$

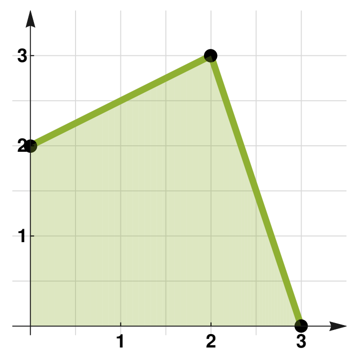


Figura 7.21: Lámina de densidad $\rho(x,y) = 3x^2 + 3y^2$

7.7.2 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región que se muestra a la derecha y tiene función de densidad $\rho(x,y) = x^2 + y^3$

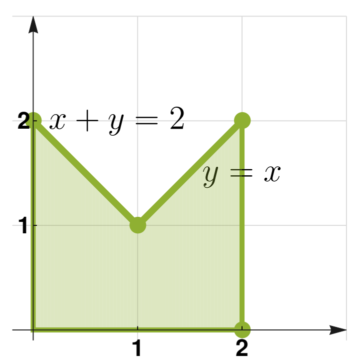


Figura 7.22: Lámina de densidad $\rho(x,y) = x^2 + y^3$

7.7.3 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

y tiene función de densidad $\rho(x,y) = x^2$

7.7.4 Hallar el promedio de $f(x,y) = y\,\text{sen}(xy)$ sobre $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$

7.7.5 Hallar el promedio de $f(x,y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$

7.8 Cambio de variable en una integral doble.

En una variable, si f tiene una derivada continua en $[a,\ b]$ y $x = x(u)$ está definida en $[u_1,\ u_2]$ con $a = x(u_1)$ y $b = x(u_2)$, y si $f(x(u))$ es continua en $[u_1,\ u_2]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{u_1}^{u_2} f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du \qquad (*)$$

La inversa $u = u(x)$ existe solo si $x(u)$ es strictamente creciente o decreciente en el intervalo de integración, pero no es una condición que se pida en la fórmula $(*)$.

En una variable hacemos cambio de variable para simplificar la integral. En integrales dobles hay una segunda razón para un cambio de variable: *Simplificar la región de integración.*

Si aplicamos un cambio de variable $\mathbf{T}(u,v) = (x,y)$, donde T es diferenciable e invertible en el interior de R_{uv}, entonces esta función T transforma la región D_{xy} en una regón $R_{uv} = T^{-1}(D_{xy})$ en el plano UV.

Por ejemplo: Consideremos la región S_1 a la izquierda en la figura. El cambio de variable $(u,v) = \mathbf{T}^{-1}(x,y) = (xy,\, y-x)$, es decir, $\begin{cases} u &= xy \\ v &= y-x \end{cases}$, convierte la región S_1 en una región de integración más simple, en el plano UV.

La frontera de S_1 es aplicada en la frontera de R_1: Como $\begin{cases} u &= xy \\ v &= y-x \end{cases}$, entonces

- La curva $xy = 1$ se transforma en la recta vertical $u = 1$
- La curva $xy = 2$ se transforma en la recta vertical $u = 2$
- La curva $y - x = 2$ se transforma en la recta horizontal $v = 2$
- La curva $y - x = 0$ se transforma en la recta horizontal $v = 0$

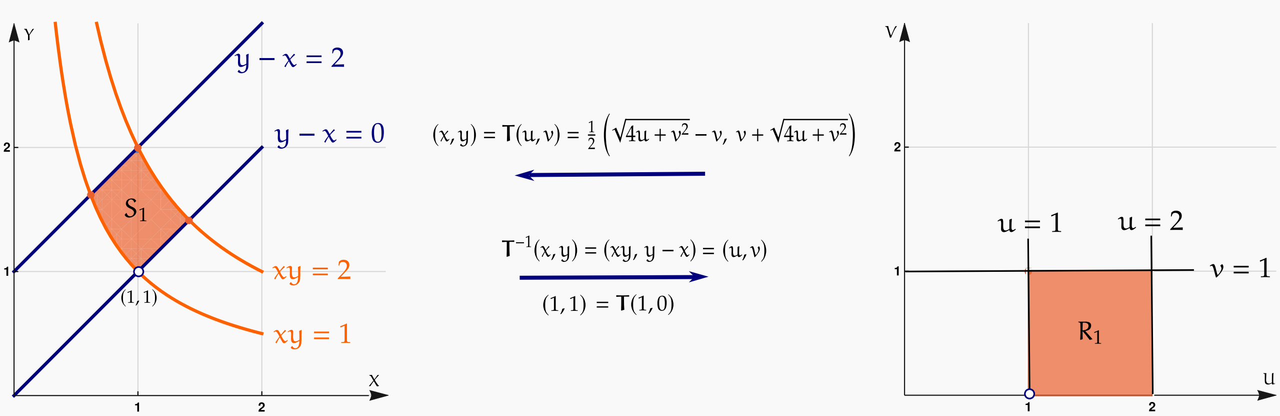


Figura 7.23: Cambio de variable $(u,v) = \mathbf{T}^{-1}(x,y)$

Otro ejemplo: Considere la región R limitada por la elipse de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (Figura 7.31).

Usando el cambio de variable $\begin{cases} u = \dfrac{x-h}{a} \\ v = \dfrac{y-k}{b} \end{cases}$ La la región encerrada por una elipse, se simplifica en una región encerrada por un círculo en plano UV.

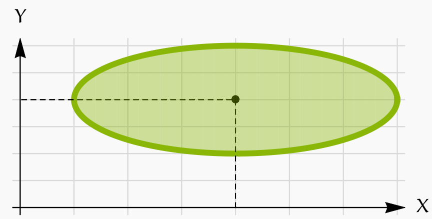


Figura 7.24: Superficie S

Si $\begin{cases} u = \dfrac{x-h}{a} \\ v = \dfrac{y-k}{b} \end{cases}$

entonces $\left(\dfrac{x-h}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y-k}{b}\right)^2=1 \iff \dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1$

La región R_{uv} es una círculo de radio 1.

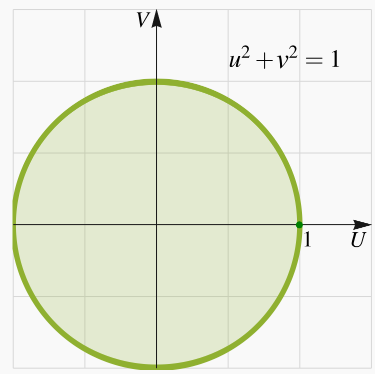


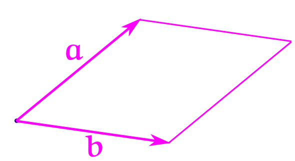
Figura 7.25: Superficie S

De forma similar al caso de una variable tenemos:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dA = \iint_{R_{uv}} f(\mathbf{T}(u,v))\,|\det[D\mathbf{T}(u,v)]|\,du\,dv$$

Pero, ¿por qué aparece el determinante de la derivada $\det[D\mathbf{T}(u,v)]$ en el integrando (y con valor absoluto)?

Preliminares. Recordemos que si $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ y $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces el área del paralelogramo generado por ellos es



$$||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = ||(a_1,a_2,0)\times(b_1,b_2,0)|| = \left|\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right|$$

Usando este hecho se puede verificar que si $\mathbf{M}_{2\times 2}$ es una matriz 2×2 entonces $\mathbf{M}$ es una aplicación que transforma un paralelogramo P generado por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en otro paralelogramo P' generado por $\mathbf{Ma}$ y $\mathbf{Mb}$, y además

$$\text{Área de } P' = \det\mathbf{M}\cdot \text{ Área de } P, \quad \text{es decir, área de } \quad P' \quad \text{es} \quad ||\mathbf{M\,a}\times\mathbf{M\,b}|| = \text{Det}\mathbf{M}\,||\mathbf{a}\times\mathbf{b}||$$

Por ejemplo, sea $\mathbf{M}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[r]1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ y consideremos, como se muestra en la figura que sigue, un paralelgramo P generado por $(1,0)$ y $(0,1)$.
Entonces al aplicar la matriz $\mathbf{M}$ obtenemos otro paralelogramo P' generado por $(0.5,0.5)$ y $(-0.5,0.5)$.

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix}[r]1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{M}\begin{bmatrix}[l]0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[r]-0.5\\0.5\end{bmatrix}$$

Ahora, área de P es $||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = 1$ y el área de $P' = ||\mathbf{M}\,\mathbf{a}\times\mathbf{M}\,\mathbf{b}|| = \mathrm{Det}\mathbf{M}\,||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = \dfrac{1}{2}\cdot 1$

Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, hay dos derivadas, la derivada direccional (tasa de cambio en la dirección de un vector **v**) y la otra derivada es $\nabla\mathbf{f}$, esta última es *la derivada* (de Fréchet) de f en el sentido que

$$h(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla\mathbf{f}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x,\Delta y)$$

es una buena aproximación lineal de f.

Cambios de variable. Un cambio de variable es una transformación diferenciable e invertible en la región $R_{uv}\subseteq\mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}:\mathbb{R}_{uv}\to\mathbb{R}^2$ con y $\mathbf{T}(u,v) = (x,y)$

Las derivada de $\mathbf{T}$ es la matriz $D\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$D\mathbf{T}(u,v)$ es la derivada de $\mathbf{T}$ en el sentido que ésta es una buena aproximación lineal de $\mathbf{T}$, es decir, como $\Delta u = u-u_0$ y $\Delta v = v-u_0$, entonces

$$[\mathbf{T}(u_0+\Delta u, y_0+\Delta v) - \mathbf{T}(u_0,v_0)]^T \approx D\mathbf{T}(u_0,v_0)\cdot\begin{bmatrix}\Delta u\\\Delta v\end{bmatrix}$$

Este tipo de transformaciones $DT(u_0,v_0)$ convierten "paralelogramos en paralelogramos". La matriz $D\mathbf{T}(u,v)$ se llama matriz "jacobiana" y su determinante se llama "el jacobiano" y se denota $J(u,v)$.

Por ejemplo, un cambio de variable en el primer cuadrante puede ser

$$(x,y) = \mathbf{T}(u,v) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4u+v^2}-v,\; v+\sqrt{4u+v^2}\right), \text{ es decir, } \begin{cases} x &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4u+v^2}-v\right)\\ y &= \tfrac{1}{2}\left(v+\sqrt{4u+v^2}\right)\end{cases}$$

$(u,v)=\mathbf{T}^{-1}(x,y)=(xy,\,y-x)$, es decir, $\begin{cases} u &= xy \\ v &= y-x \end{cases}$

En este caso $\;D\mathbf{T}(u,v)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4u+v^2}} & \dfrac{v}{2\sqrt{4u+v^2}}-\frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{4u+v^2}} & \dfrac{v}{2\sqrt{4u+v^2}}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

La idea de aplicar un cambio de variable es simplificar el integrando pero también *simplificar la región de integración.*

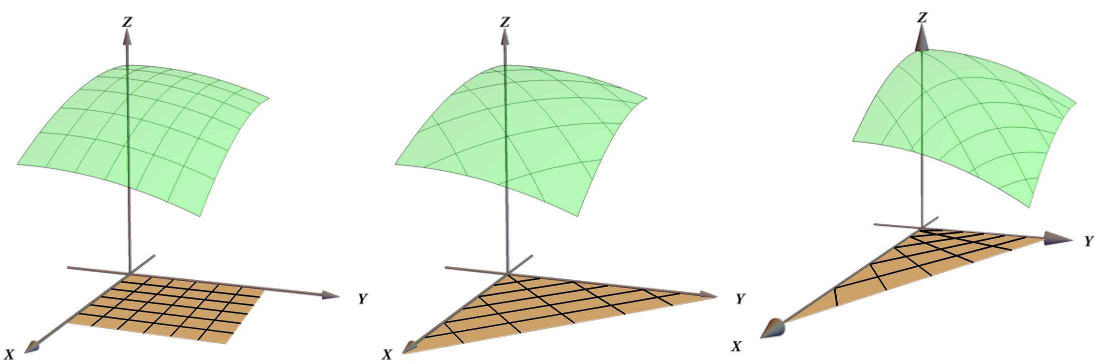


Figura 7.26: Una misma función con distintas regiones de integración que requieren distintos cambios de variable

Si pensamos en el cambio de variable $\mathbf{T}$ para la integral $\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dA$ debemos observar que, como $(x,y)=\mathbf{T}(u,v)$ entonces $f(x,y)=f(\mathbf{T}(u,v))$, pero en general

$$f(x_i,y_i)A_{S_{ij}}\neq f(\mathbf{T}(u_i,v_j))\Delta u\Delta v$$

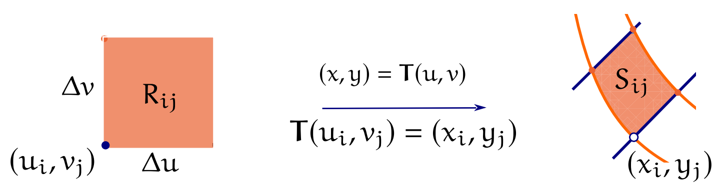


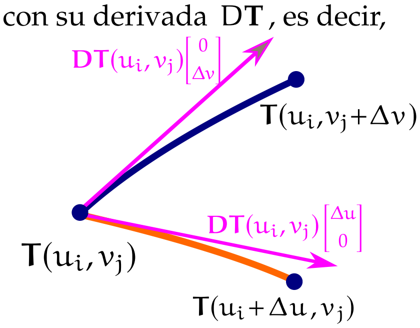
Figura 7.27: $f(x_i,y_i)A_{S_{ij}}\neq f(\mathbf{T}(u_i,v_j))\Delta u\Delta v$

Debemos hacer un ajuste. Para visualizar el ajuste, debemos aproximar el área $A_{S_{ij}}$ con un paralelogramo: Usamos la derivada $D\mathbf{T}$,

Si Δu_i y Δv_j son pequeños, podemos aproximar el cambio en $\mathbf{T}$ con su derivada $D\mathbf{T}$, es decir,

$$\mathbf{T}(u_i+\Delta u,\,v_j)-\mathbf{T}(u_i,\,v_j)\;\approx\;D\mathbf{T}(u_i,\,v_j)\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(u_i,\,v_j+\Delta v)-\mathbf{T}(u_i,\,v_j)\;\approx\;D\mathbf{T}(u_i,\,v_j)\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix}$$



De esta manera, podemos aproximar el área de S_{ij} con un paralelogramo generado por los vectores

$$D\mathbf{T}(u_i,\, v_j)\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D\mathbf{T}(u_i,\, v_j)\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix}$$

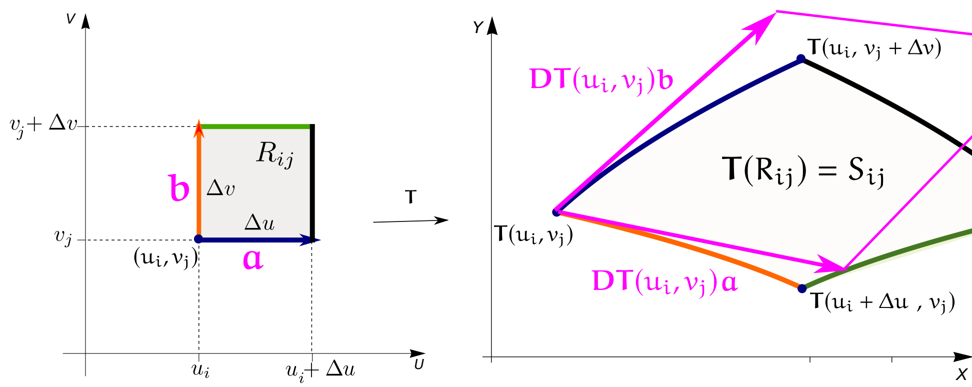


Figura 7.28

Si $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix}$, entonces como $D\mathbf{T}(u_i, v_j)$ es una matriz 2×2 se tiene,

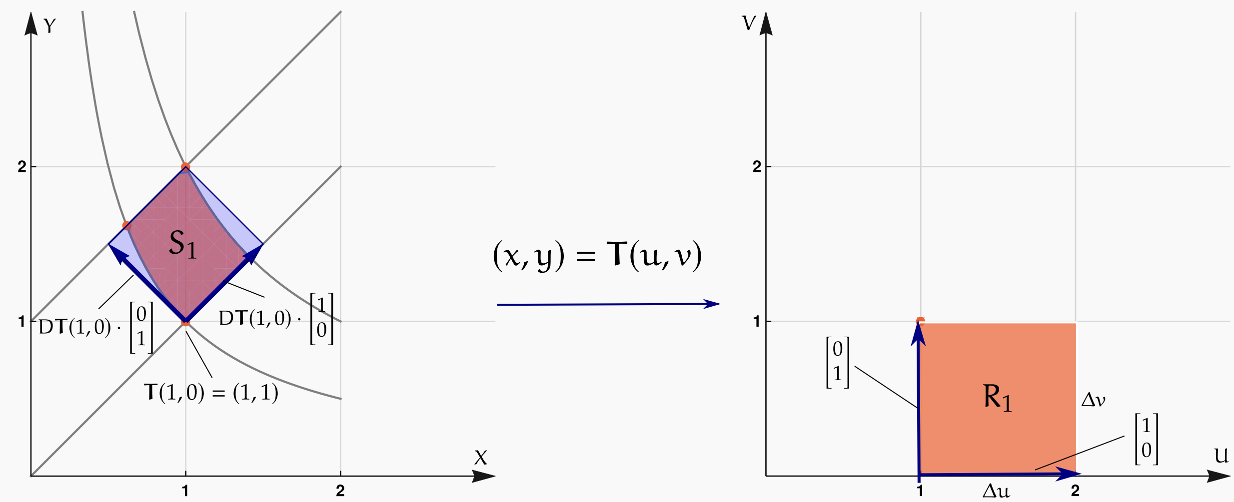
- Área de $S_{ij} \approx ||D\mathbf{T}(u_i,v_j)\mathbf{a} \times D\mathbf{T}(u_i,v_j)\mathbf{b}|| = |\det(D\mathbf{T}(u_i,v_j))|\,\Delta u\Delta v \approx \left|\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}(u_i,v_j)\right|\,\Delta u\Delta v$

Siguiendo con nuestro ejemplo, si $\Delta u = 1$ y si $\Delta v = 1$ entonces: Área de R_1 es $A_{R_1} = \Delta u\,\Delta v = 1$

Como $\mathbf{T}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4u+v^2} - v,\ v + \sqrt{4u+v^2}\right) \implies D\mathbf{T}(u,v) = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{4u+v^2}} & \dfrac{v}{2\sqrt{4u+v^2}} - \frac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{4u+v^2}} & \dfrac{v}{2\sqrt{4u+v^2}} + \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

entonces $D\mathbf{T}(0,1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}[r]1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Ahora aproximemos el área de S_1 usando la derivada $D\mathbf{T}$. En este caso $D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}[r]0\\ \Delta v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[r]0.5,\\ 0.5\end{bmatrix}$ y $D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}[r]\Delta u\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[r]0.5,\\ -0.5\end{bmatrix}$



El área de S_1 es $A_{S_1} \approx$ área del paralelogramo de lados (vectores) $D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix}$ y $D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix}$

$$A_{S_1} \approx \left\| D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix} \times D\mathbf{T}(1,0)\cdot\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix} \right\| = |\det\left(D\mathbf{T}(1,0)\right)|\,\Delta u\Delta v$$

$$|\det\,[D\mathbf{T}(u,v)]| = \frac{1.}{\sqrt{4u+v^2}} \implies |\det\left(D\mathbf{T}(1,0)\right)| = \frac{1}{2} \implies A_{S_1} \approx 0.5 \ \text{(aquí } \Delta u = \Delta v = 1.\ \ A_{S_1} = 0.4027...\text{)}$$

Entonces:

$$f(1,1)\cdot A_{S_1} \approx f(\mathbf{T}(1,0))\cdot|\det\left(D\mathbf{T}(1,0)\right)|\,\Delta u\Delta v$$

Por esta razón es que, en general (operando sobre particiones y tomando el límite (con Δu, $\Delta v \to 0$) en las sumas de Riemann),

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dA = \iint_{R_{uv}} f(\mathbf{T}(u,v))\,|\det\,[D\mathbf{T}(u,v)]|\,du dv$$

En general

- Área de $S_{ij} \approx \left| \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}(u_i,v_j) \right| \Delta u\Delta v$

Como $(x_i,y_j) = \mathbf{T}(u_i,v_j) \implies f(x_i,y_j) = f(\mathbf{T}(u_i,v_j))$, entonces

$$A_S = \iint_{S_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}\sum_{i=1} f(x_i,y_j)\text{Área } S_{ij} \approx \sum_{i=1}\sum_{i=1} f(\mathbf{T}(u_i,v_j))|J(u_i,v_j)|\Delta u\Delta v \approx \iint_{R_{uv}} f\left(\mathbf{T}(u,v)\right)|J(u,v)|\,du\,dv$$

y finalmente tomando el límite con $\Delta u,\ \Delta v \to 0$,

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dA = \iint_{R_{uv}} f(\mathbf{T}(u,v))\ |\det D\mathbf{T}(u,v))|\,du dv = \iint_{R_{uv}} f(\mathbf{T}(u,v)) \left| \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| du dv$$

Es usual usar la notación $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f(\,x(u,v),\,y(u,v)\,) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

La restricción de que el cambio de variable $(x,y) = \mathbf{T}(u,v)$ sea invertible *en el interior* de R_{xy} (y por tanto que $J(u,v)$ no se anule en el interior de R_{uv}) es necesaria para poder usar cambio de variable con coordenadas polares en regiones que contienen el origen.

Teorema 7.4 (Cambio de variable).

Sea R_{uv} una región compacta y conexa en el plano contenida en un cojunto abierto A de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\mathbf{T} : A \to \mathbb{R}^2$ con $\mathbf{T}(u,v) = (\,x(u,v),\,y(u,v)\,)$, es una función continua con derivadas parciales continuas tal que $\mathbf{T}$ es invertible en el interior de R_{uv}. Entonces el jacobiano

$$J(u,v) = \textbf{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

es no nulo en el interior de R_{uv}. Sea $D_{xy} = \mathbf{T}(R_{uv})$ y $f : R_{xy} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f(\,x(u,v),\,y(u,v)\,)|J(u,v)|\,du\,dv$$

N Observe que el Jacobiano $J(u,v)$ va en valor absoluto dentro de la integral (calcula un área "orientada", el cambio de filas, cambia el signo del determinante). Además solo se requiere que $\mathbf{T}(u,v)$ sea invertible en el interior de R_{uv} y por tanto $|J(u,v)|$ no se anule en el interior de R_{uv}.

Para verificar que un cambio de variable es invertible en una región, uno podría, si se puede, calcular la transformación inversa $\mathbf{T}^{-1}(x,y)$. En los ejemplos de este libro es sencillo calcular esta inversa. El "Teorema de la Función Inversa" solo dice, con las hipótesis respectivas, que si $J(u_0,v_0)$ no se anula, entonces $\mathbf{T}(u,v)$ es invertible en un entorno de (u_0,v_0), pero no nos da información de si hay una inversa "global". Sin embargo en la literatura se encuentran teoremas con condiciones especiales para "globalizar" el resultado.

Ejemplo 7.9

Usando el cambio de variable $u = x - y^2$ y $v = x + y^2$,

a.) Calcule $\displaystyle\iint_{R_A} (y^2 + x)\, dA$ b.) Calcule $\displaystyle\iint_{R_B} (y^2 + x)\, dA$

Las regiones de integración R_A y R_B aparecen en las figuras que siguen. Por supuesto, debe justificar con todo detalle.

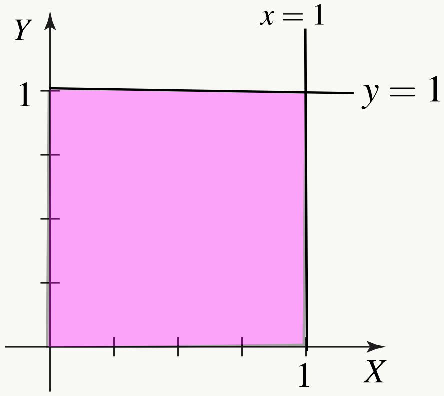


Figura 7.29: Región R_A

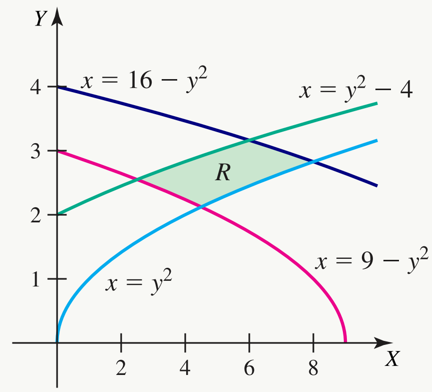
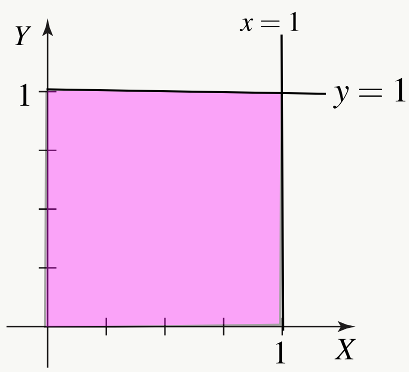


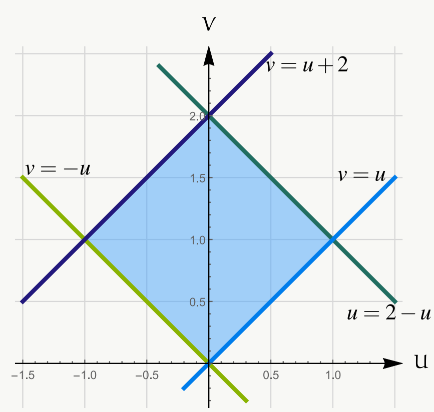
Figura 7.30: Región R_B

Solución:

a.) $\displaystyle\iint_{R_A} (y^2 + x)\, dA$

$$\text{Como } \begin{cases} u &= x - y^2 \\ v &= x + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{si} \quad x = 1 & \Longrightarrow \quad u = 1 - y^2 \wedge v = 1 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad v = 2 - u \\ \text{si} \quad x = 0 & \Longrightarrow \quad v = -u \\ \text{si} \quad y = 1 & \Longrightarrow \quad v = u + 2 \\ \text{si} \quad y = 0 & \Longrightarrow \quad v = u + 2 \end{cases}$$





- **Jacobiano.** $\begin{cases} x &= \dfrac{u+v}{2} \\ y &= \dfrac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}} \end{vmatrix} =$

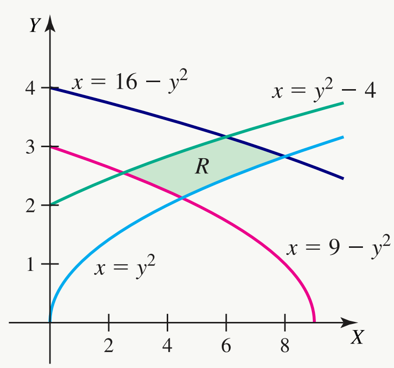
$$\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}$$

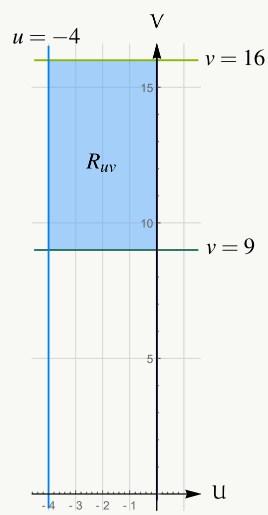
- $$\iint_{R_A} (y^2+x)\, dA \;=\; \int_{-1}^{0}\int_{-u}^{u+2} v\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}dvdu + \int_{0}^{1}\int_{u}^{2-u} v\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}dvdu \;=\; \frac{5}{6}$$

---

b.) $\displaystyle\iint_{R_B} (y^2+x)\, dA$

$$\text{Como}\left\{\begin{array}{rcl} u &=& x-y^2\\ v &=& x+y^2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \text{si} \quad x=y^2-4 & \Longrightarrow & u=-4\\ \text{si} \quad x=16-y^2 & \Longrightarrow & v=16\\ \text{si} \quad x=y^2 & \Longrightarrow & u=0\\ \text{si} \quad x=9-y^2 & \Longrightarrow & v=9\end{array}\right.$$





- **Jacobiano.**

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{u+v}{2}\\[2ex] y &=& \dfrac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}\end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}$$

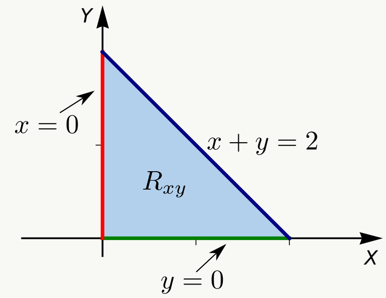
- $$\iint_{R_B} (y^2+x)\, dA \;=\; \int_{-4}^{0}\int_{9}^{16} v\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{v-u}}dvdu \;\approx\; 32.4456$$

Notar que $\displaystyle\int\frac{v}{\sqrt{v-u}}\,dv$ se hace con la sustitución $t=v-u$ y queda $\displaystyle\int t^{-1/2}(t+u)\,dt$ (potencias).

Ejemplo 7.10

Calcular $\displaystyle\iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$ usando el cambio de variable

$$\begin{cases} u &= y-x \\ v &= y+x \end{cases}$$



La región R_{xy} está limitada por las rectas $x+y=2$, $x=0$ y $y=0$, como se muestra a la derecha.

Solución: Primero debemos dibujar las región de integración R_{uv} para luego integrar.

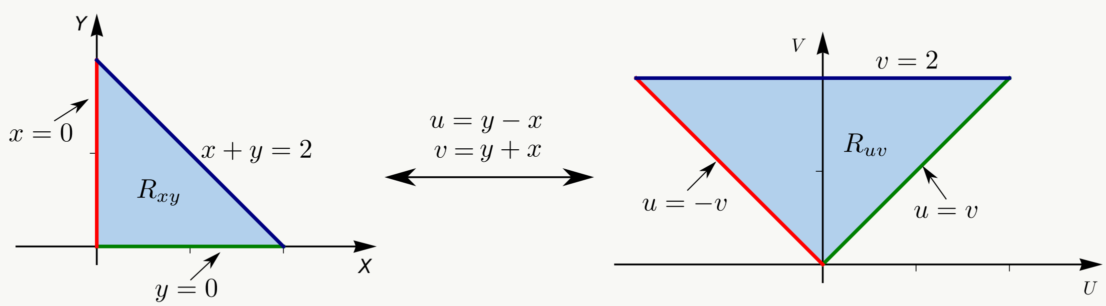
Nueva región de integración. El cambio de variable es invertible y la inversa es continua, entonces aplicamos el cambio de variable a la frontera de la región R_{xy} para calcular las curvas frontera de la región R_{uv}.

El cambio de variable es invertible: $\begin{cases} u &= y-x \\ v &= y+x \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(v-u) \\ y &= \frac{1}{2}(v+u) \end{cases}$

- Como $v = y+x$, el segmento de recta $x+y=2$ corresponde a $v=2$.

- Si $x=0$ entonces $u=v$

- Si $y=0$ entonces $u=-v$.



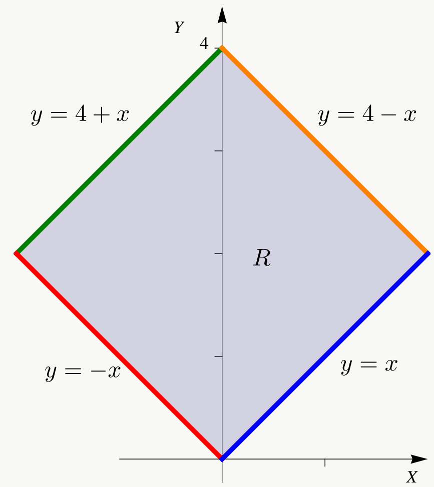
Calculamos el Jacobiano. $J(u,v) = \textbf{Det}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}.$

Cálculo de la integral.

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA &= \iint_{R_{uv}} e^{\frac{u}{v}}\, |J(u,v)|\, du\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv \;=\; e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.11

Calcule $\displaystyle\iint_{R_{xy}} (y^2-x^2)\, e^{(x+y)^2}\, dA$, donde R_{xy} es la región mostrada en la figura. Utilice el cambio de variable $\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases}$

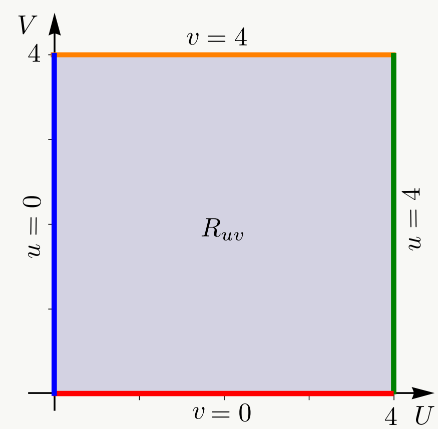


Solución: Si $\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases}$ entonces $\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(v-u) \\ y &= \frac{1}{2}(u+v) \end{cases}$

Como la inversa es continua, aplicando el cambio de variable a la frontera de R_{xy}, obtenemos la frontera de la región R_{uv}.

- A $y=-x+4$ le corresponde, sustituyendo x e y, $v=4$.
- A $y=-x$ le corresponde $v=0$
- A $y=x+4$ le corresponde $u=4$.

La nueva región es más simple.



$$\iint_{R_{xy}} (y^2-x^2)\, e^{(x+y)^2}\, dA = \int_0^4 \int_0^4 uve^{v^2}\, dv\, du = 4\cdot e^{16}-4.$$

Ejemplo 7.12

5 Considere la región R limitada por la elipse de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (Figura 7.31).

Calcule el área encerrada por esta elipse: $A_R = \displaystyle\iint_R 1\, dA$, usando el cambio de variable $\begin{cases} u = \dfrac{x-h}{a} \\ v = \dfrac{y-k}{b} \end{cases}$

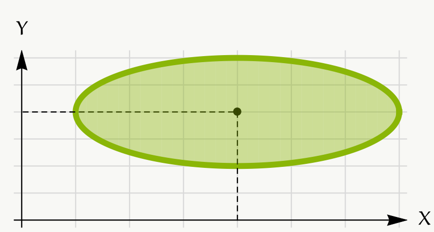


Figura 7.31: Superficie S

$$\text{Si} \begin{cases} u = \dfrac{x-h}{a} \\ v = \dfrac{y-k}{b} \end{cases} \text{entonces} \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1 \iff \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Entonces la región R_{uv} es una círculo de radio 1.

• **Jacobiano.** $\begin{cases} x &= au+h \\ y &= bv+k \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$

$$A_R = \iint_R 1\,dA = \iint_{R_{uv}} 1 \cdot ab\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}\,d\theta = \pi ab$$

Como se ve en los ejemplos anteriores, se usa el cambio de variable en la forma $x = x(u,v)$, $y = (u,v)$ tanto como $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Siempre hay que estar al tanto de que se cumplan las hipóstesis, en particular la invertibilidad.

7.9 Ejercicios

7.9.1 Considere las dos regiones R_C y R_D que se indican más bajo. Haciendo el cambio de variable $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x^2}$; con $x > 0$ y $y > 0$, calcule $\displaystyle\iint_{R_C} 1 \cdot dA$ y también $\displaystyle\iint_{R_D} \left(\frac{y}{x^2}e^{xy}\right) dA$

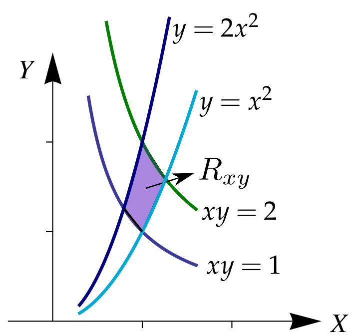


Figura 7.32: Región R_C

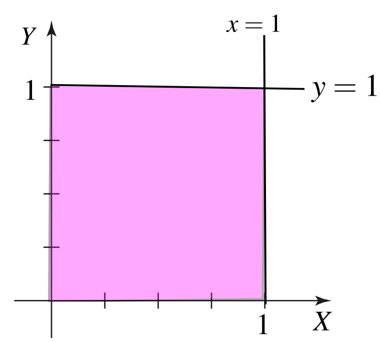


Figura 7.33: Región R_D

7.9.2 Calcular el área A_R de la región elíptica $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ usando el cambio de variable $x = ar\cos t$ y $y = br\,\text{sen}\,t$.

7.9.3 Calcular $\displaystyle\iint_R (x-1)^2\,dA$ donde $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \leqslant 1\right\}$.

7.9.4 Usando el cambio de variable $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, calcular $I = \displaystyle\iint_T xy\,dA$ donde T es el rectángulo de vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(1,3)$.

7.9.5 Calcule $\displaystyle\iint_T e^{(x+y)/(x-y)}dA$ usando el cambio de variable $u = x+y$, $v = x-y$; donde T es el trapecio de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ y $(0,-1)$.

7.9.6 Calcule $\iint_T \cos\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) dA$ donde T es el trapecio de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,1)$. **Ayuda:** Usar cambio de variable $u = y-x$, $v = y+x$.

7.9.7 Calcule $\iint_T xy\, dA$ donde T es la región limitada por $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ y $xy = 3$; en el primer cuadrante. Use el cambio de variable $x = u/v$ y $y = v$.

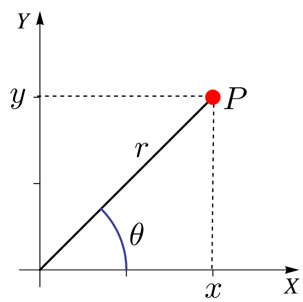
7.10 Coordenadas Polares.

Antes de continuar esta sección, se puede hacer un repaso de coordenadas polares en el ápendice "Introducción a las coordenadas polares"

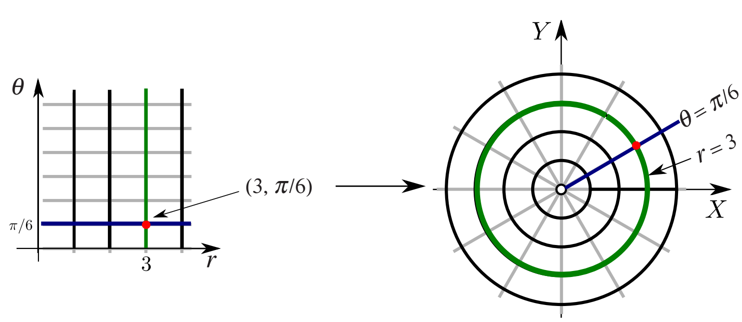
Hay regiones de integración con curvas frontera fáciles de describir en coordenadas polares entonces. En estos casos usamos este cambio de variable.

Recordemos que un punto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se puede especificar en coordenadas polares (r,θ) donde r es la distancia del origen a P y θ es el ángulo medido desde el eje X contrareloj. La conversión de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se hace con la transformación

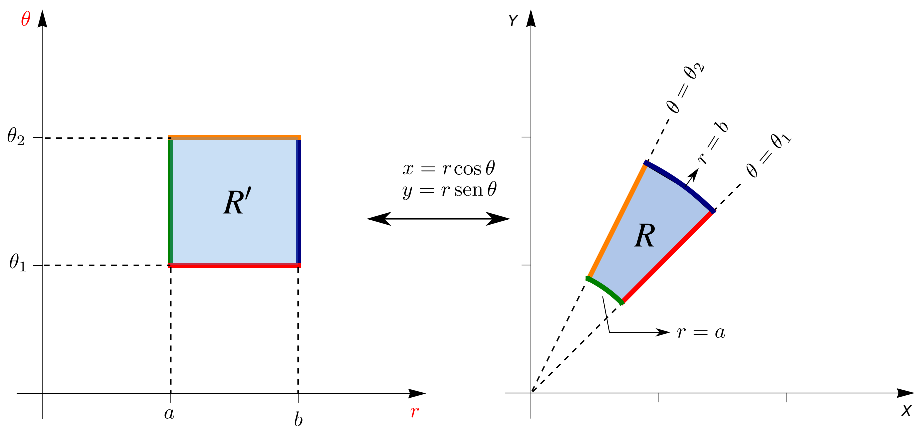
$$(**) \qquad \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$



Para efectos de cambio de variable, esta transformación es invertible si $r > 0$ y si $\theta \in [\theta_0,\ \theta_0 + 2\pi[$. Podemos definir la inversa desde $\mathbb{R}^+ \times [0,\ 2\pi[$ a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ el único ángulo $\theta \in [0,\ 2\pi[$ que satisface $(**)$, es decir $\theta = \arctan(y/x)$ si $x > 0$ y $\theta = \arctan(y/x) + \pi$ si $x < 0$ pues $\arctan(t)$ está definida en $]-\pi/2,\ \pi/2[$ (si $r = 0$, el cambio de variable aplica todo el eje θ en el origen $(0,0)$.)



Para el cambio de variable $\mathbf{T}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)\,)$ el jacobiano es $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$



Como ya indicamos, este cambio de variable es invertible si $r > 0$ y si $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ (a veces es cómodo tomar ángulos negativos).

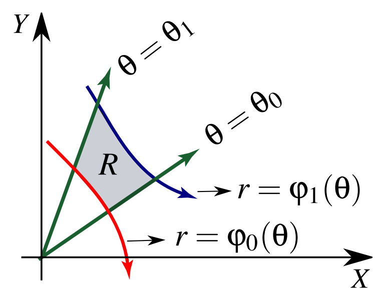
Si en R y R' se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable, entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R'} f(\,r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\,r\, dr\, d\theta$$

- En el caso de coordenadas polares, la nueva región $R_{r\theta}$ se puede describir en el mismo sistema XY.

- Si una región R se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 < \varphi_0(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_1(\theta) \quad \text{si} \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \quad \text{donde} \quad \theta_1 - \theta_0 \leqslant 2\pi$$

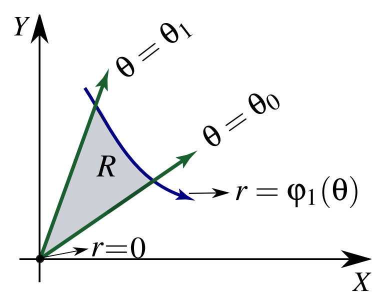


entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(\,r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\, r\, dr\, d\theta$$

- Si una región R se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 \leqslant r \leqslant \varphi_1(\theta) \quad \text{si} \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$$



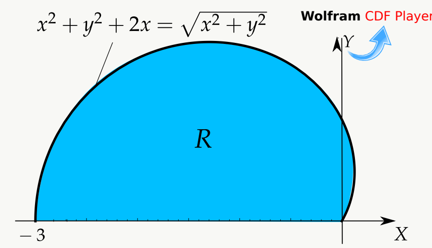
entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{0}^{\varphi_1(\theta)} f(\,r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\, r\, dr\, d\theta$$

Nota. En este caso, el cambio de variable es invertible en el interior de la región $(r > 0)$ y además aquí el Jacobiano no se anula, así que no afecta que $r = 0$. Las fórmulas anteriores requieren conocer de manera correcta el intervalo de integración. En algunas curvas en coordenadas polares se requiere ser especialmente cuidadoso con este detalle, sobre todo las curvas que tienen lazos. Si una región está entre dos curvas, hay que tener el cuidado de que las dos curvas "barran" la región en el mismo intervalo para el ángulo θ.

Ejemplo 7.13

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.



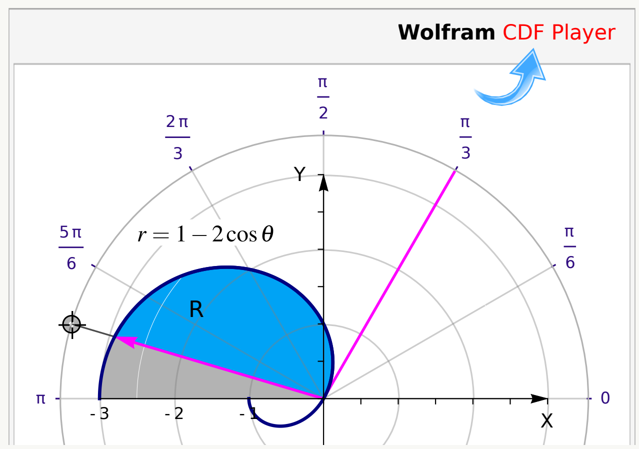
Solución: La ecuación de la curva es $x^2+y^2+2x = \sqrt{x^2+y^2}$. Como $r^2 = x^2+y^2$, haciendo la conversión a coordenadas polares obtenemos la ecuación

$$r^2 + 2r\cos\theta = r$$

es decir, $r = 1-2\cos\theta$

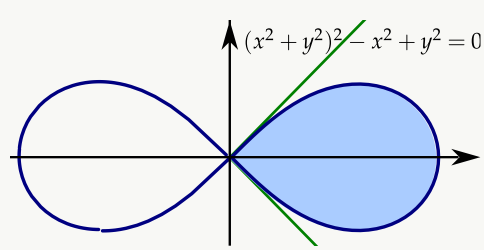
Tangentes al polo: Resolvemos $r = 0 \Longrightarrow 1-2\cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \pm\pi/3$ en $[0, 2\pi]$. Así, la región está entre los rayos $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_R &= \iint_R 1\cdot r\,dr d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{1-2\cos\theta} 1\cdot r\,dr d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$



Ejemplo 7.14

Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$, $x \geqslant 0$ (región celeste en la figura).

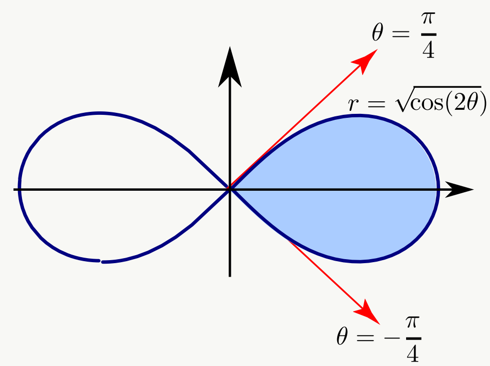


Solución: Cambio de variable $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y sustituyendo en $(x^2+y^2)^2 - x^2+y^2 = 0$, obtenemos

$$\left(r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2\right)^2 - r^2\cos(\theta)^2 + r^2\,\mathrm{sen}(\theta)^2 = 0$$

Simplificando queda $r^2 = \cos(2\theta)$, que es la ecuación de la lemniscata. Entonces podemos tomar $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

Tangentes al Polo: $r = 0 \implies \sqrt{\cos(2\theta)} = 0 \implies \theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$.



De la figura, podemos ver que estos rayos corresponden a los límites integración.

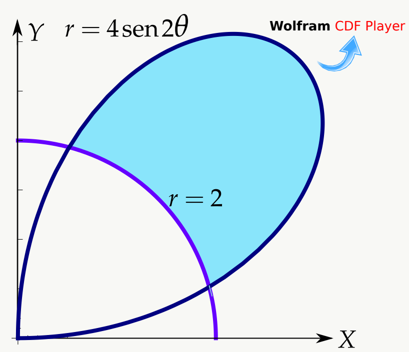
Luego, el área de la región es

$$A_R = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 1/2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(2\theta)\,d\theta = 1/2.$$

Ejemplo 7.15

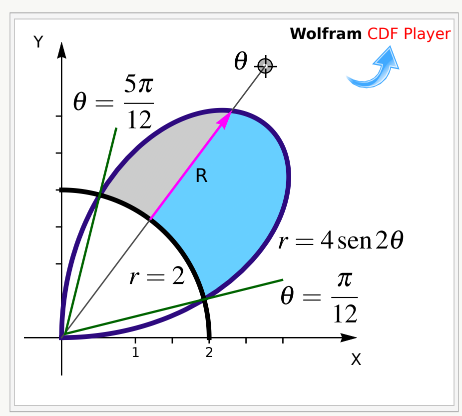
Considere la región R que se muestra en la figura. Plantear, usando corrdenadas polares,

$$I = \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA.$$



Solución: La región está entre las curvas $r = 2$ y $r = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
Como $r = 0 \implies r = \mathrm{sen}\,2\theta = 0 \implies \theta = 0$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
Podemos verificar con la figura que el dominio de la curva $r = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$ es $[0,\ \pi/2.]$

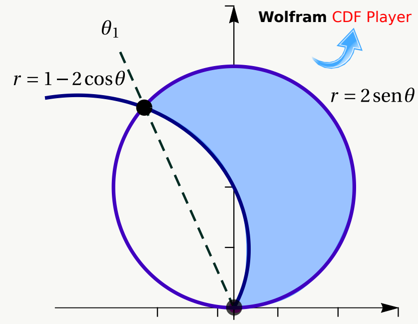
Para obtener los límites de integración, buscamos la intersección entre las curvas: $r = 2 \cap r = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$, es decir,



$$2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta \implies \theta = \frac{\pi}{12} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{12}.$$

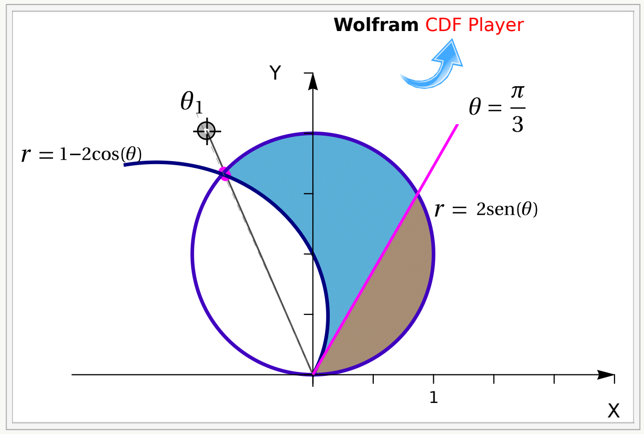
Entonces, $I = \displaystyle\iint_R r\cdot r\,dr d\theta = \int_{\pi/12}^{5\pi/12}\int_2^{4\,\mathrm{sen}\,2\theta} r^2\,dr d\theta$

Ejemplo 7.16



Calcule $I = \iint_R xy\,dA$ si R es la región limitada por las curvas $r = 1 - 2\cos\theta$ y $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, tal y como se muestra en la figura.

Solución: Ambas curvas "barren" la región R en el mismo intervalo!. La región de integración llega hasta la intersección de las curvas en $\theta = \theta_1$.



- **Tangentes al polo**:

$$\begin{cases} 1 - 2\cos\theta = 0 & \Longrightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 & \Longrightarrow \quad \theta = 0 \end{cases}$$

- Cálculo de θ_1:

$$1 - 2\cos\theta = 2\,\mathrm{sen}(\theta),$$

elevamos al cuadrado,

$$-3 - 4\cos\theta + 8\cos^2\theta = 0,$$

hacemos sustitución y resolvemos,

$$\cos\theta = \frac{4 \pm \sqrt{112}}{16}$$

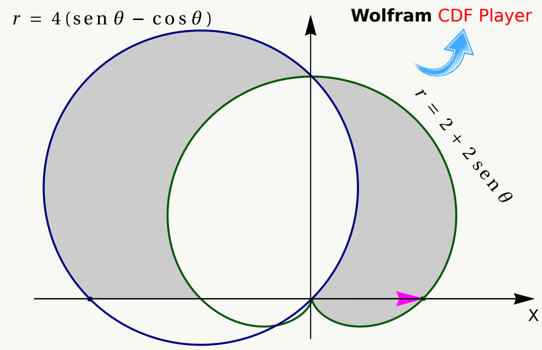
Nos sirve $\theta_1 = \arccos\left(\frac{4-\sqrt{112}}{16}\right) \approx 1.994$ (pues el ángulo está en el II cuadrante)

$$I = \iint_R xy\,dA$$

$$= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)} [r\cos(\theta)\, r\,\mathrm{sen}(\theta)] \cdot r\,dr d\theta \quad + \int_{\pi/3}^{\theta_1}\int_{1-2\cos(\theta)}^{2\,\mathrm{sen}(\theta)} r^3\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)\,dr d\theta$$

Ejemplo 7.17

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.

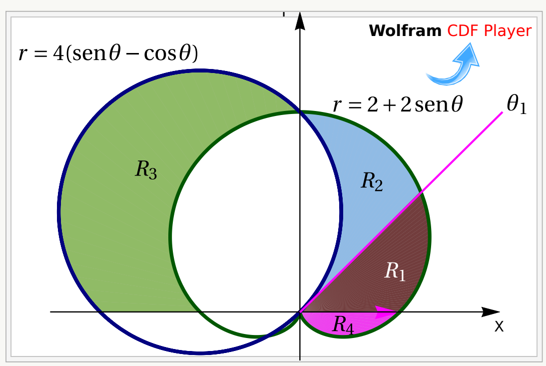


Solución: Hay varias regiones: $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

Tangentes al polo:

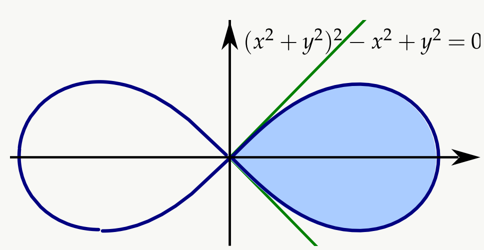
- $4(\text{sen}\,\theta - \cos\theta) = 0 \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$
- $2 + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
A_R &= A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3} + A_{R_4} \\
&= \iint_{R_1} 1\cdot dA + \iint_{R_2} 1\cdot dA + \iint_{R_3} 1\cdot dA + \iint_{R_4} 1\cdot dA \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1\cdot r\,dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{4(\text{sen}\,\theta-\cos\theta)}^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1\cdot r\,dr d\theta \\
&\quad + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{2+2\,\text{sen}\,\theta}^{4(\text{sen}\,\theta-\cos\theta)} 1\cdot r\,dr d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_0^{2+2\,\text{sen}\,\theta} 1\cdot r\,dr d\theta
\end{aligned}$$



Ejemplo 7.18

Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0,\ x \geqslant 0$ (región celeste en la figura).



Solución: Cambio de variable $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y sustituyendo en $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$, obtenemos

$$\left(r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2\right)^2 - r^2\cos(\theta)^2 + r^2\,\text{sen}(\theta)^2 = 0$$

Simplificando queda $r^2 = \cos(2\theta)$, que es la ecuación de la lemniscata. Entonces podemos tomar

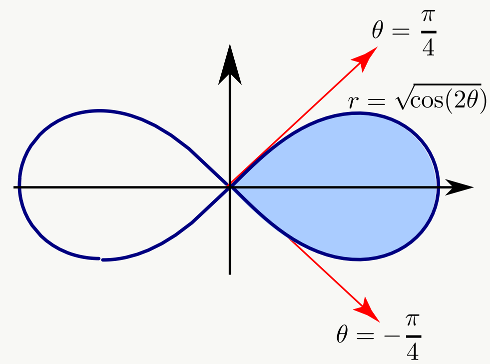
$r = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

Tangentes al Polo: $r = 0 \Longrightarrow \sqrt{\cos(2\theta)} = 0 \Longrightarrow \theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$.

De la figura, podemos ver que estos rayos corresponden a los límites integración.

Luego, el área de la región es

$$A_R = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 1/2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta = 1/2.$$



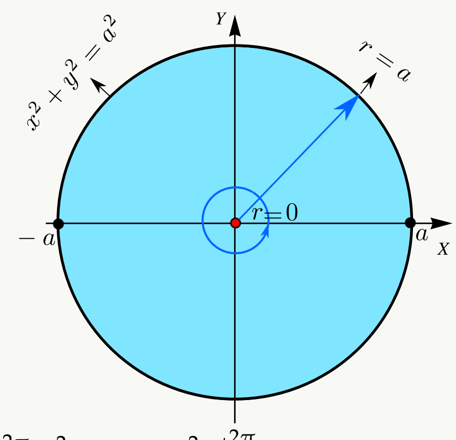
Ejemplo 7.19

Calcular el área A_c del círculo de radio a.

Solución: Para este cálculo podemos usar un círculo de radio a, centrado en el origen. La circunferencia del círculo tiene ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$. Para obtener la ecuación en polares, sustituimos $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y despejamos r :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad (r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad r^2 = a^2.$$

Así, en coordenadas polares, la región de integración va desde $r = 0$ hasta $r = a$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

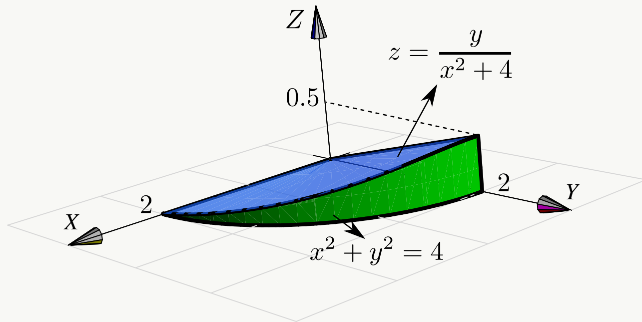


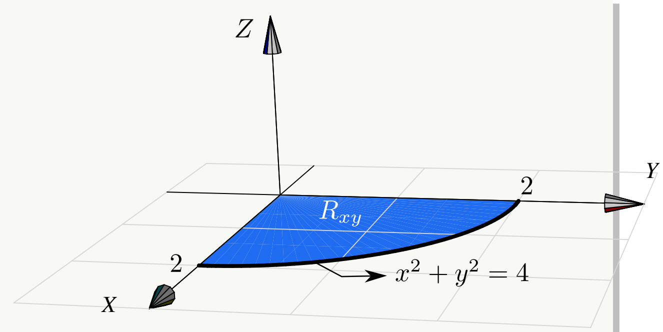
$$A_c = \iint_R 1 \cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\,d\theta = \frac{a^2}{2}\theta\bigg|_0^{2\pi} = \pi\,a^2$$

Ejemplo 7.20 (Volumen)

Plantear una integral, en polares, para calcular el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \dfrac{y}{x^2+4}$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$ con $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$.

Solución: El sólido y su proyección sobre el plano XY se ven en la figura.





Pasando a coordenadas polares tenemos

$$V_Q = \iint_R \left(\frac{y}{x^2+4} - 0\right) dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\, r\, dr\, d\theta$$

Nota: Esta última integral se puede calcular observando que

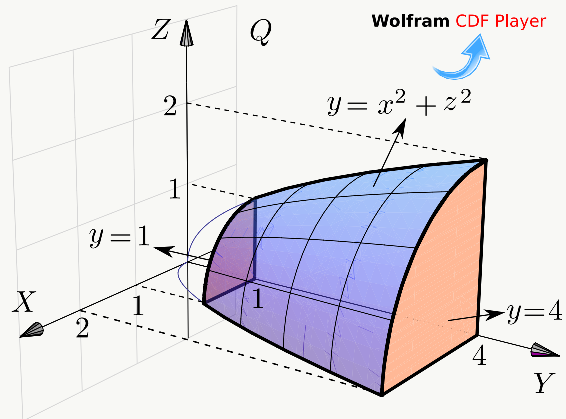
- $\displaystyle\int x\,\arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-x+\left(1+x^2\right)\arctan x\right)$, salvo constantes.
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 f(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^2\int_0^{\pi/2} f(r,\theta)\,d\theta\,dr,$ pues estamos integrando sobre un rectángulo.

Veamos,

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R \frac{y}{x^2+4}\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^2\int_0^{\pi/2} \frac{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,d\theta\,dr = \int_0^2\int_0^1 \frac{r^2}{4+r^2u^2}\,du\,dr, \quad \text{(haciendo } \; u=\cos\theta). \\ &= \int_0^2\int_0^1 \frac{r}{2}\,\frac{r/2}{1+(ru/2)^2}\,du\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(ru/2)\Big|_0^1\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(r/2)\,dr = \frac{1}{2}(\pi-2). \end{aligned}$$

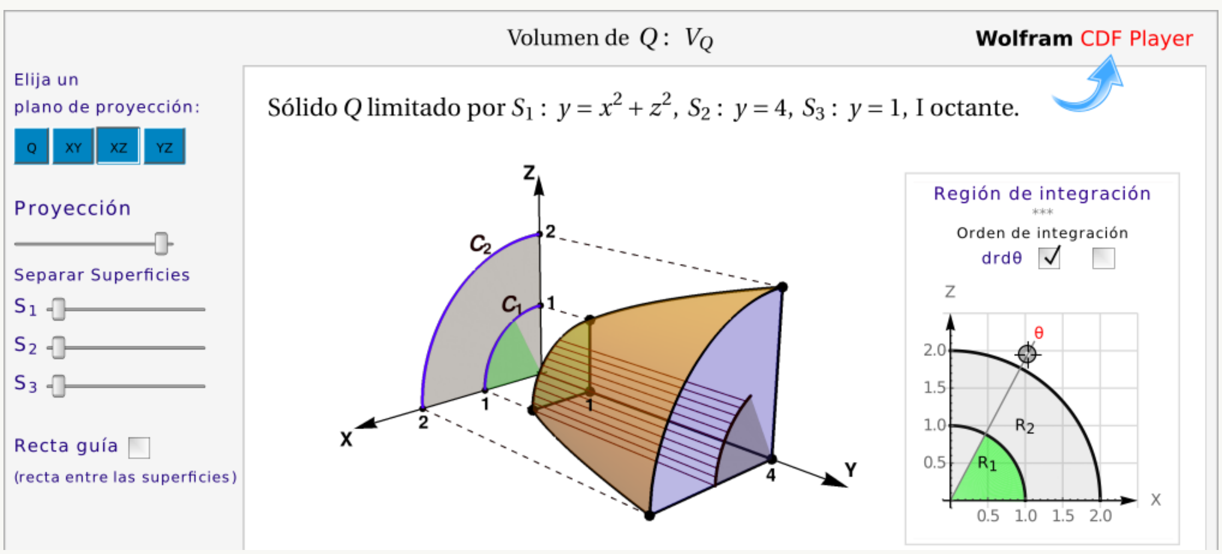
Ejemplo 7.21 (Volumen en coordenadas polares).

Plantee la integral (o las integrales) con las que se puede obtener el volumen del sólido Q limitado por las superficies $S_1: y = x^2+z^2$, $S_2: y=1$, $S_3: y=4$, en el primer octante.



Solución: La proyección del sólido Q es $R = R_1 + R_2$, como se muestra en la figura de la derecha. Usamos el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$. La proyección del sólido Q en el plano XZ está entre las curvas $r = 0$ y $r = 1$ y entre $r = 1$ y $r = 2$.

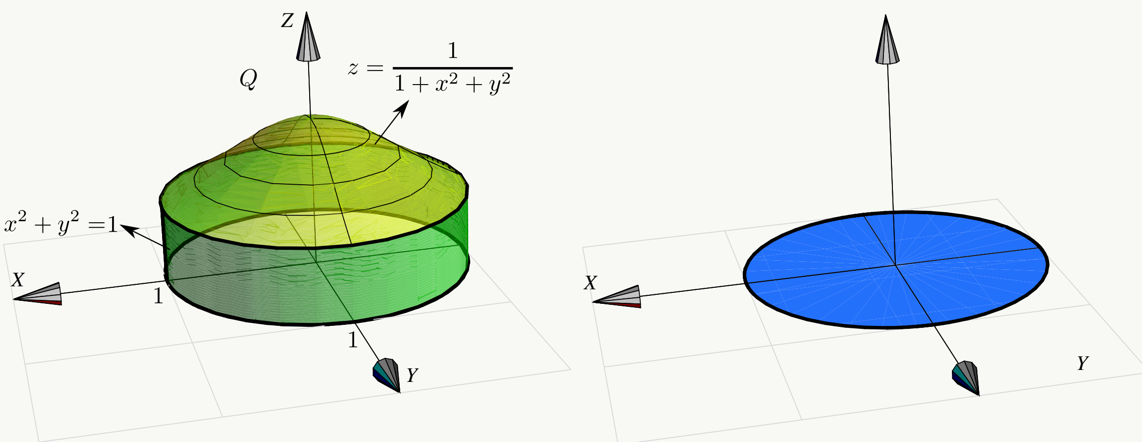
- $C_1:\ y = x^2 + z^2 \bigcap y = 1 \implies C_1:\ 1 = x^2 + z^2$
- $C_2:\ y = x^2 + z^2 \bigcap y = 4 \implies C_2:\ 4 = x^2 + z^2$



$$
\begin{aligned}
V_Q &= \iint_{R_1} (4-1)\,dA + \iint_{R_2} (4 - x^2 - z^2)\,dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (4-1)r\,dr\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_1^2 (4-r^2)r\,dr\,d\theta
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.22 (Volumen).

Calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $x^2+y^2 = 1$ y $z = 0$.



Solución:

El sólido y su proyección sobre el plano XY se ven en la figura. El sólido Q está limitado por $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ y $z = 0$. Aplicando coordenadas polares (y como no hay singularidades) tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln(2)\,d\theta = \pi\ln(2) \end{aligned}$$

Ejemplo 7.23

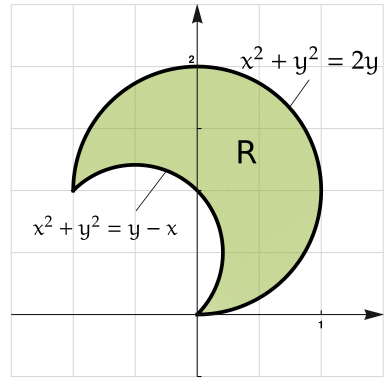
Calcule $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA$ si $R = \{(x,y)\in\mathbb{R} \,:\, x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

Solución: La región R es la parte del círculo de radio 1, centrado en el origen, que está en el primer octante. Aquí usamos el hecho de que $\displaystyle\int_a^b\int_p^q f(\theta)g(r)\,dr\,d\theta = \int_a^b f(\theta)\,d\theta\cdot\int_p^q g(r)\,dr.$

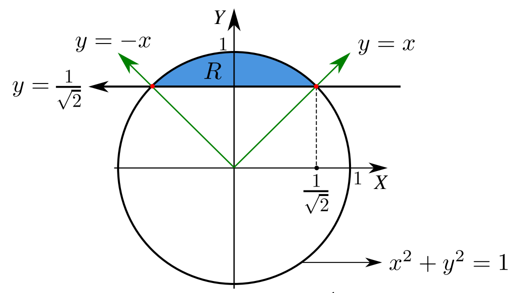
$$\begin{aligned} \iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r^3\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\cdot\int_0^1\frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr = \frac{1}{8}\ln 4 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ejercicios

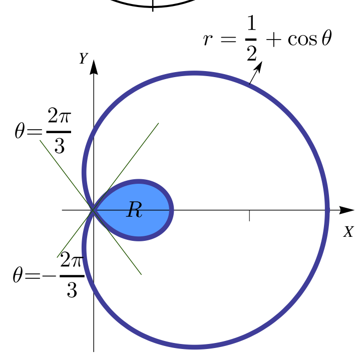
7.10.1 Utilice integrales dobles en **coordenadas polares** para calcular el área de la región R que se muestra en la figura



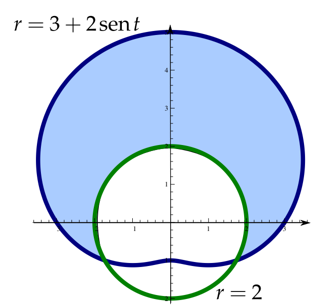
7.10.2 Considere la región R de la figura. Calcular el área A_R de la región R, usando coordenadas polares.



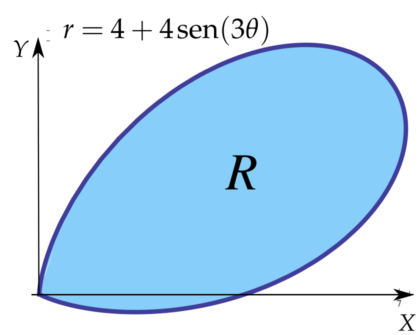
7.10.3 Calcular el área de la región limitada por el lazo de la curva $r = 1/2 + \cos\theta$. **Ayuda: Notar que el lazo interno va de** $\theta = 2\pi/3$ **a** $\theta = 4\pi/3$.



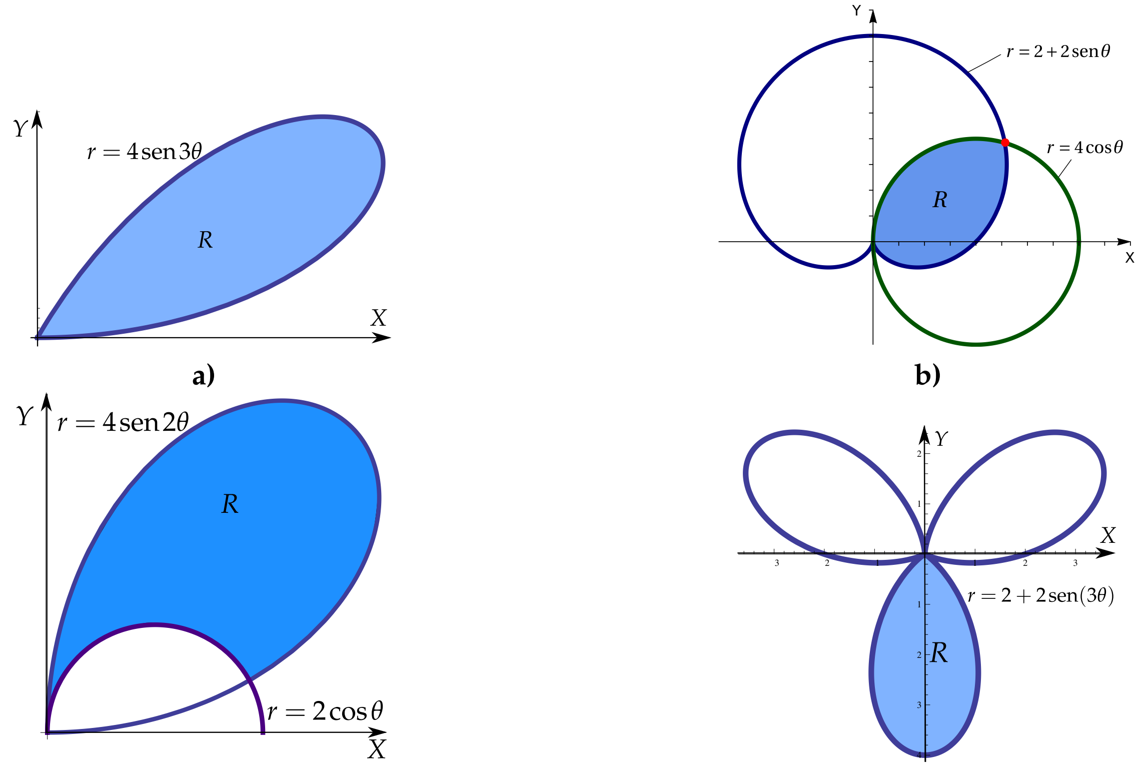
7.10.4 Verifique, usando coordenadas polares, que el área de la región R (región sombreada mostrada en la figura) es $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}+\dfrac{14\pi}{3} \approx 24.187$.



7.10.5 Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región R tal y como se muestra en la figura.

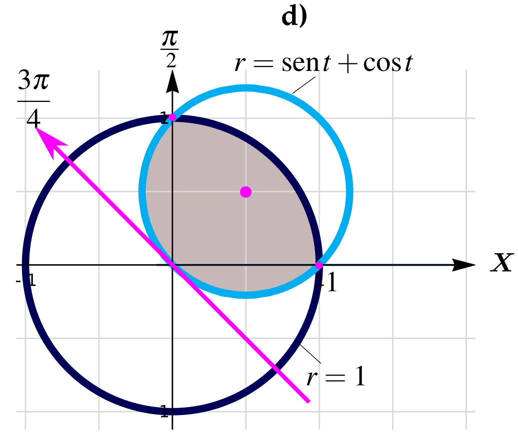


7.10.6 Calcular el área de las regiones sombreadas.

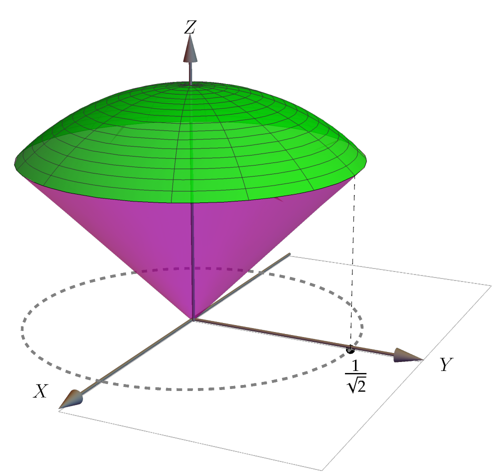


a) **b)** **c)** **d)**

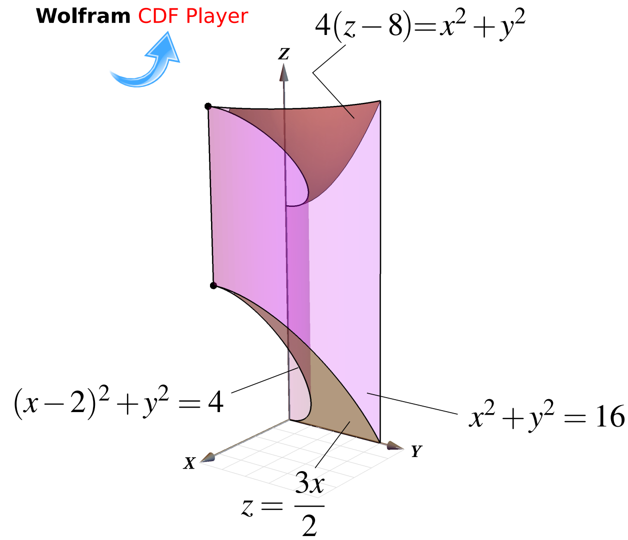
7.10.7 (*) Verifique, usando coordenadas polares, que el área de la región R (región sombreada mostrada en la figura) es $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}$



7.10.8 Calcule, usando coordenadas polares, el volumen del sólido Q limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



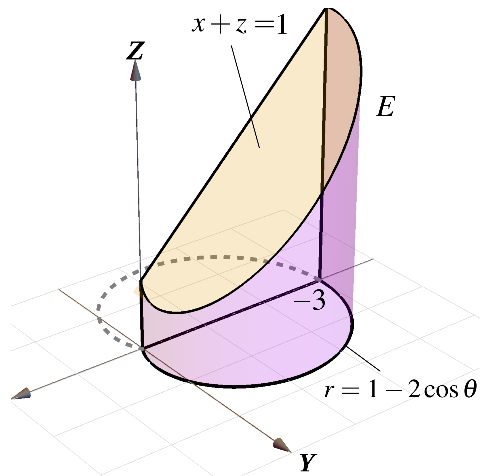
7.10.9 Considere el sólido E limitado por las superficies de ecuación $S_1: \ x^2+y^2=16$, $S_2: \ (x-2)^2+y^2=4$, $S_3: \ z=\dfrac{3x}{2}$, $S_4: \ 4(z-8)=x^2+y^2$ y $x=0$, tal y como se muestra en la figura a al derecha. Calcule el volumen del sólido E



7.10.10 Considere siguientes S_1, S_2, S_3 y S_4 (tal y como se muestran a la derecha),

- S_1 es el cilindro generado por la curva $r=1-2\cos\theta$,
- $S_2: \ x+z=1$,
- $S_3: \ z=0$,
- $S_4: \ y=0$.

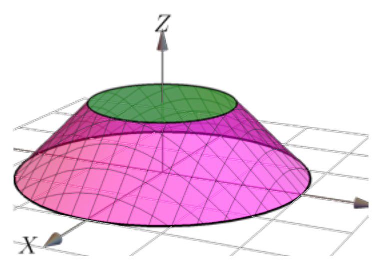
E es el sólido limitado por estas superficies, tal y como aparece a al derecha. Calcule el volumen del sólido **E**



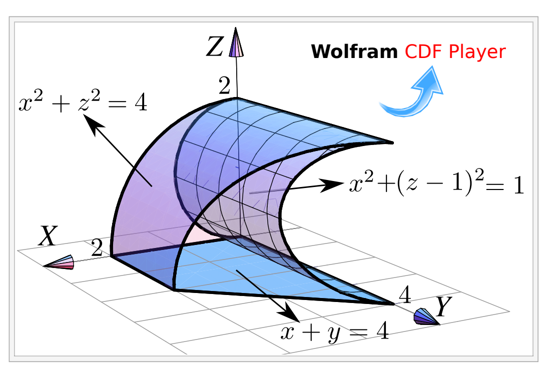
7.10.11 El sólido E limitado por el cono de ecuación

$$(z-2)^2=x^2+y^2$$

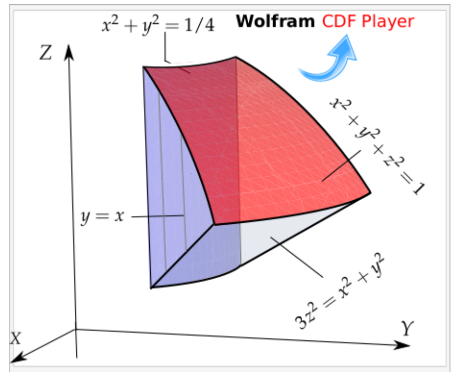
y el plano $z=1$, tal y como se muestra en la figura a la derecha. Calcule elvolumen de E



7.10.12 Calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies $x^2+z^2=4$, $x^2+(z-1)^2=1$ y $x=4-y$, en el primer octante; como se muestra en la figura. **Ayuda: Proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares.**



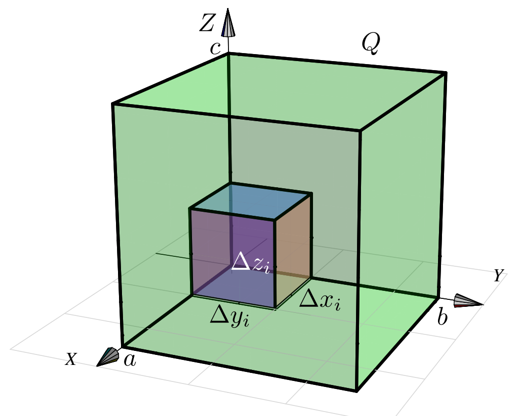
7.10.13 Considere el sólido Q limitado por el cilindro $x^2+y^2=1/4$, el cono $3z^2=x^2+y^2$, la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y los planos $x=0$ y $x=y$; tal y como se muestra en la figura. Calcular el volumen del sólido Q



7.11 Integral triple.

Consideremos un cubo Q como el de la figura a la derecha. Su volumen es $V_Q=abc$. Si la densidad ρ es constante en todo el cubo, la masa viene dada por

$$M_Q=\rho V_Q$$



Si *la densidad no es constante* y $\rho=\rho(x,y,z)$, entonces para obtener una aproximación de la masa, dividimos Q en N cubos Q_i de volumen

$$\Delta V_i=\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i.$$

Así, la densidad en el punto $P_i(x_i,y_i,z_i)$ es

$$\Delta M_i\approx\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i.$$

La masa total del cubo Q sería,

$$M\approx\sum_{i=1}^{N}\Delta M_i=\sum_{i=1}^{N}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$$

Ahora, tomando el límite cuando $N\to\infty$ (si existe), obtenemos

$$M=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$$

Esto es muy parecido a la integral de Riemann que definimos al principio de este capítulo. En realidad podemos reemplazar la malla M_R por $M_Q=\{Q_1,Q_2,...Q_N\}$ y definir la integral triple de Riemann de una función $f(x,y,z)$ sobre una región tridimensional Q como

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\lim_{||M_Q||\to\infty}\sum_{i=1}^{C(M_Q)}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

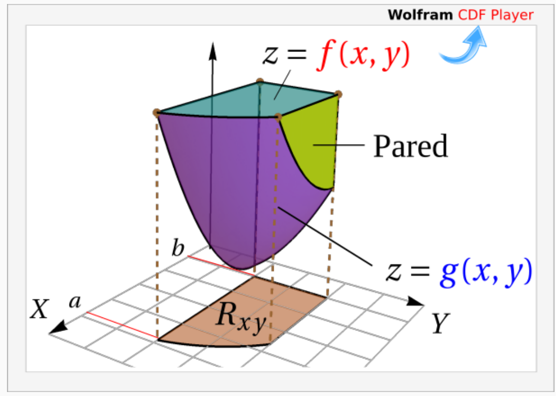
Los teoremas para integral doble se extienden de manera natural a la integral triple.

(Integral Triple).

Sea Q un sólido limitado por dos superficies suaves de ecuación $z = f(x,y)$ (arriba) y $z = g(x,y)$ (abajo), con f, g con derivadas parciales continuas. Sea R_{xy} su proyección, limitada por funciones con derivadas continuas. Si $h(x,y,z)$ es continua sobre Q, entonces

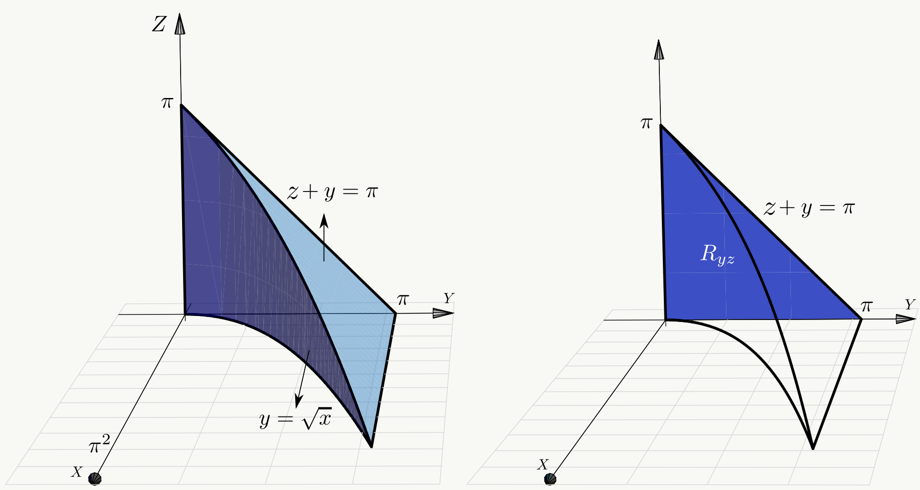
$$\iiint_Q h(x,y,z)\,dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} h(x,y,z)\,dz \right] dA$$

En particular, $V_Q = \displaystyle\iiint_Q 1 \cdot dV = \iint_{R_{xy}} \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} 1\,dz\,dA$



Ejemplo 7.24

Calcular, usando el orden "dx dz dy", $I = \displaystyle\iiint_Q 2\,x\,\cos(y+z)\,dV$ con Q el sólido limitado por las superficies (ver figura) $y + z = \pi$, $y = \sqrt{x}$, $x = z = 0$



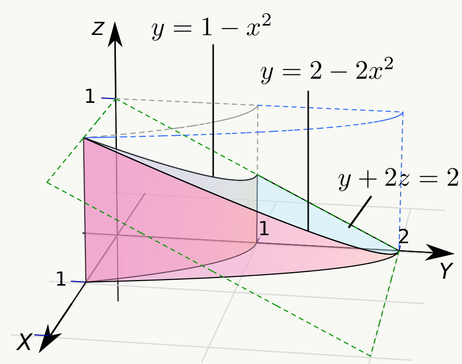
Solución: Por el orden de integración que se pide, debemos proyectar sobre el plano YZ.

Usaremos las integral $\displaystyle\int y^4 \operatorname{sen} y\,dy = -(24 - 12\,y^2 + y^4)\cos y + 4\,y\,(-6 + y^2)\sin y + K$, que se calcula "por partes". El sólido Q está entre $x = 0$ y $x = y^2$.

$$\begin{aligned}\iiint_Q 2x\cos(y+z)\,dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y}\left[\int_0^{y^2} 2x\cos(y+z)\,dx\right]dz\,dy\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y} x^2\cos(y+z)\Big|_0^{y^2}\,dz\,dy\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y} y^4\cos(y+z)\,dz\,dy\\ &= \int_0^{\pi} y^4\,\mathrm{sen}(y+z)\Big|_0^{\pi-y}\,dy = \int_0^{\pi} -y^4\,\mathrm{sen}(y)\,dy = -48+12\pi^2-\pi^4\end{aligned}$$

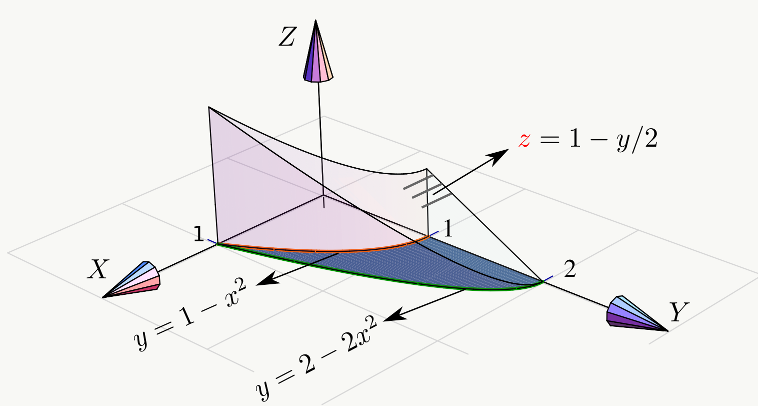
Ejemplo 7.25

Considere el sólido Q limitado por $z=0$, $y+2z=2$, $x=0$ y $y=1-x^2$ tal y como se muestra en la figura. Usando integral triple, *Plantear* la integrales necesarias para calcular el volumen de Q *proyectando en cada uno de los planos* XY, YZ y XZ



Solución:

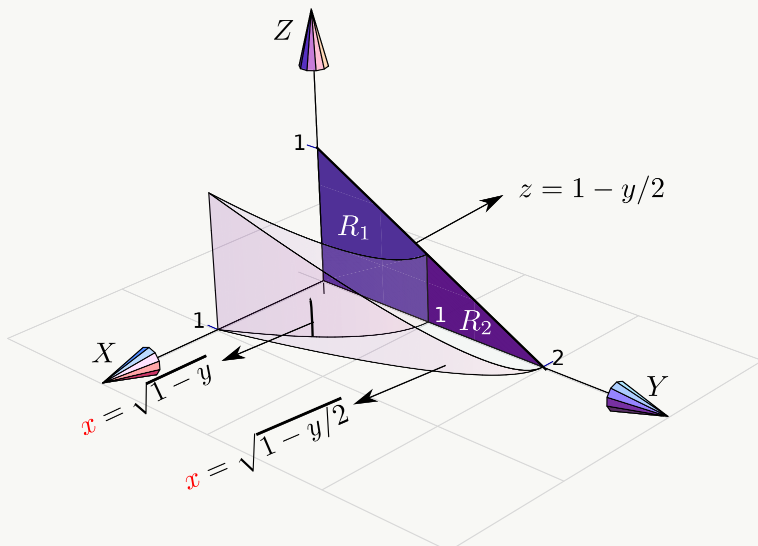
Proyectando sobre XY. La región de integración R_{xy} está entre las curvas $y=1-x^2$ y $y=2-2x^2$ y en esta región el sólido está entre $z=0$ y $z=1-y/2$.



$$V_Q = \int_0^1\int_{1-x^2}^{2-2x^2}\left[\int_0^{1-y/2} 1\,dz\right]dy\,dx$$

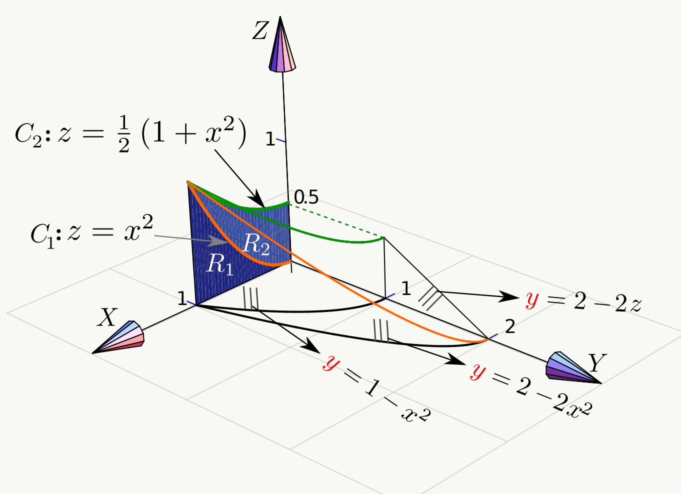
Proyectando sobre YZ. La región de integración es $R_{yz} = R_1 + R_2$. La región R_1 está entre las rectas $z = 0$ y $z = 1 - y/2$ y el sólido está entre $x = \sqrt{1-y}$ y $x = \sqrt{1-y/2}$.

La región R_2 está entre las rectas $z = 0$ y $z = 1 - y/2$ y en esta región el sólido está entre $x = 0$ y $x = \sqrt{1-y/2}$.



$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{1-y/2} \left[\int_{\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y/2}} 1\, dx \right] dz\, dy + \int_1^2 \int_0^{1-y/2} \left[\int_0^{\sqrt{1-y/2}} 1\, dx \right] dz\, dy$$

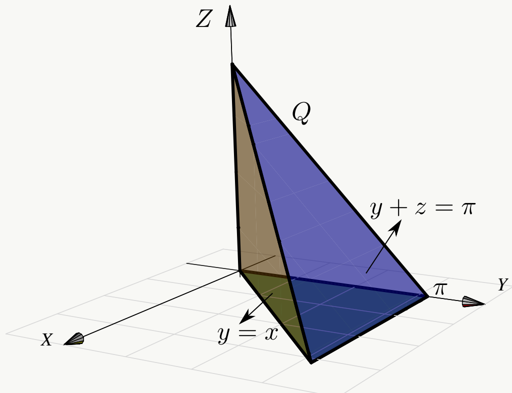
Proyectando sobre XZ. $R_{xz} = R_1 + R_2$. La curva C_1 que divide ambas regiones es la cruva de intersección entre $y = 2 - 2z$ y $y = 2 - 2x^2$. Igualdando obtenemos $C: \; z = x^2$. La curva C_2 se obtiene como la intersección de $y = 1 - x^2$ y $y = 2 - 2z$. Entonces $C_2: \; z = (1 + x^2)/2$.

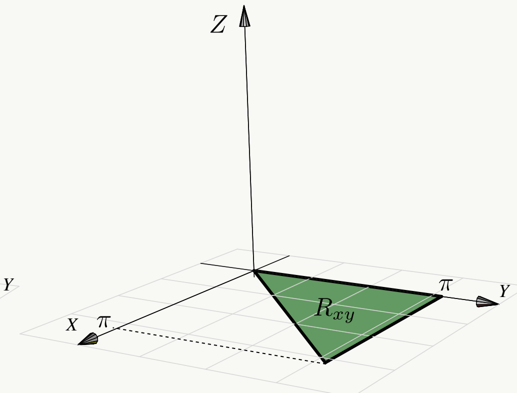


$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{x^2} \left[\int_{1-x^2}^{2-2x^2} 1\, dy \right] dz\, dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{\frac{1}{2}(1+x^2)} \left[\int_{1-x^2}^{2-2z} 1\, dy \right] dz\, dx$$

Ejemplo 7.26

Calcular $\iiint_Q x\cos(y+z)\,dV$ con Q el sólido limitado por $y+z=\pi,\ y=x,\ x=z=0$



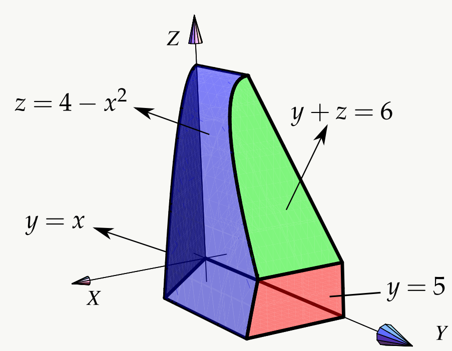


Solución: Para calcular esta integral triple vamos a necesitar la integral $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\operatorname{sen} x + K$ (se calcula "por partes".) El sólido Q está entre las superficies $z=0$ y $z=\pi-y$.

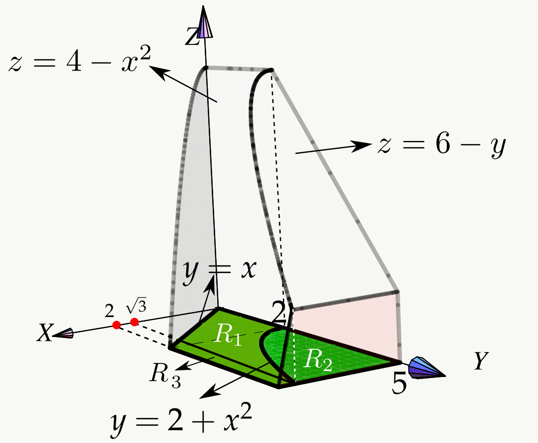
$$\begin{aligned}\iiint_Q x\cos(y+z)\,dV &= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\left[\int_0^{\pi-y} x\cos(y+z)\,dz\right]dy\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} x\operatorname{sen}(y+z)\Big|_0^{\pi-y}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} -x\operatorname{sen}(y)\,dy\,dx = 2-\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 7.27

Considere el sólido Q limitado por $z=4-x^2$, $y+z=6$, $y=x$, $y=5$, $z=0$ y $x=0$, como se muestra en la figura. Usando integral triple, *plantear* la integrales necesarias para calcular el volumen de Q *proyectando en cada uno de los planos* XY, YZ y XZ

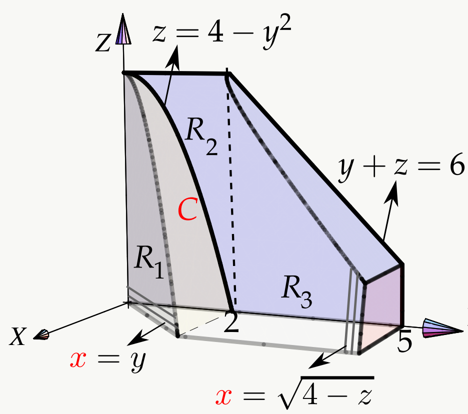


Proyectando sobre el plano XY. La región de integración es $R_{xy}=R_1+R_2+R_3$. La curva C divide las regiones R_1 y R_2 y la recta $x=\sqrt{3}$ divide la región R_1 y la región R_3. La curva C es la proyección de la curva de intersección entre las superficies $z+y=6$ y $z=4-x^2$, es decir, $C: y=2+x^2$. La región R_1 está entre $y=x$ y $y=2+x^2$, la región R_2 está entre $y=2+x^2$ y $y=5$ y la región R_3 está entre $y=x$ y $y=5$.



$$\begin{aligned}
V_Q &= \iint_{R_1} dV + \iint_{R_2} dV + \iint_{R_3} dV \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_x^{2+x^2} \left[\int_0^{4-x^2} 1\, dz \right] dy\, dx \\
&+ \int_0^{\sqrt{3}} \int_{2+x^2}^{5} \left[\int_0^{6-y} 1\, dz \right] dy\, dx \\
&+ \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_x^{5} \left[\int_0^{4-x^2} 1\, dz \right] dy\, dx
\end{aligned}$$

Proyectando sobre el plano YZ. La curva C es la proyección de la curva de intersección entre las superficies $y = x$ y $z = 4 - x^2$, es decir, $C : z = 4 - y^2$.

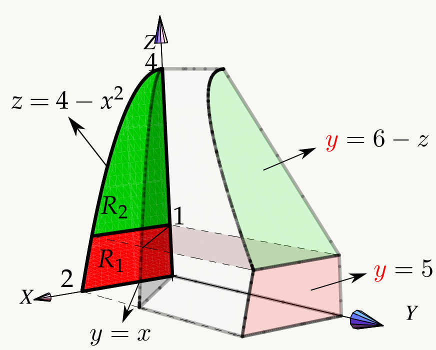


$$V_Q = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \left[\int_0^y 1\, dx \right] dz\, dy + \int_0^2 \int_{4-y^2}^{4} \left[\int_0^{\sqrt{4-z}} 1\, dx \right] dz\, dy + \int_2^5 \int_0^{6-y} \left[\int_0^{\sqrt{4-z}} 1\, dx \right] dz\, dy$$

Proyectando sobre el plano XZ.

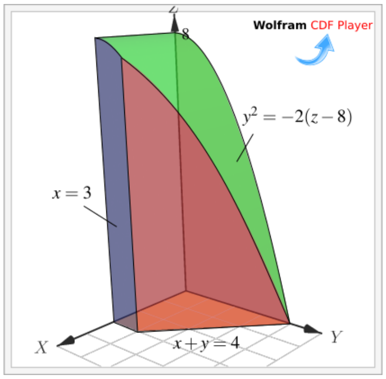
$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left[\int_x^5 1\, dy \right] dx\, dz + \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left[\int_x^{6-z} 1\, dy \right] dx\, dz$$

$$V_Q = \frac{68}{3} - \frac{12\sqrt{3}}{5}.$$

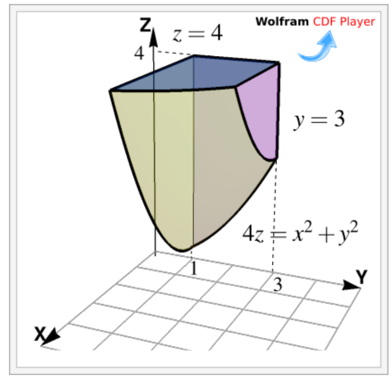


Ejercicios

7.11.1 Calcular el volumen $\iiint_Q 1 \cdot dV$ de los sólidos que siguen a continuación,

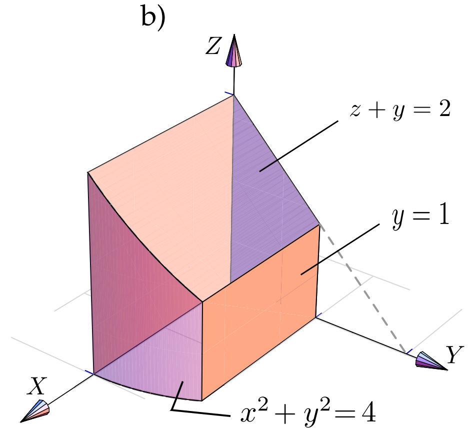


a)

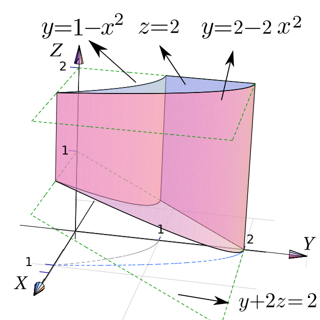


b)

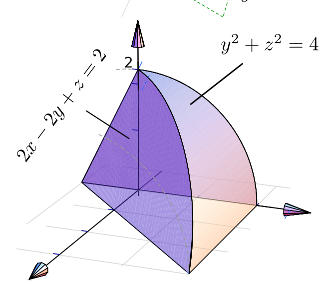
7.11.2 Plantear la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen del sólido Q si este sólido está limitado por $x^2+y^2=4$; $z+y=2$; $y=1$; $x=0$; $y=0$ y $z=0$, en el I octante



7.11.3 Plantear la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen del sólido Q si este sólido está limitado por las superficies $y=1-x^2$; $y=2-2x^2$; $y+2z=2$; $x=0$, en el I octante.



7.11.4 Plantear la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen sólido Q si este sólido está limitado por la superficie $y^2+z^2=4$ y los planos $2x-2y+z=2$; $x=0$ y $z=0$.



7.12 Cambio de variables en integral triple.

La versión del teorema de cambio de variable para integrales triples es la siguiente,

Teorema 7.5 (Cambio de variable).

Sea Q una región acotada en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera consiste de un número finito de superficies suaves. Supongamos que Q está contenido en un conjunto abierto U y sea $L(u,v,w) = (x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))$ un cambio de variable de U en $\mathbb{R}^3$ invertible en el interior de Q y con derivadas parciales continuas. Sea f una función continua y acotada sobre $L(Q)$ y sea

$$J(u,v,w) = \mathbf{Det}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$ no nulo en el interior de Q, entonces

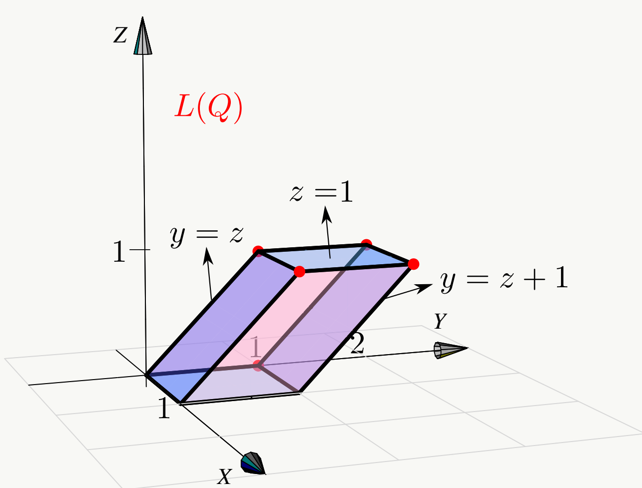
$$\iiint_Q f(L(u,v,w))|J(u,v,u)|du\,dv\,dw = \iiint_{L(Q)} f(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

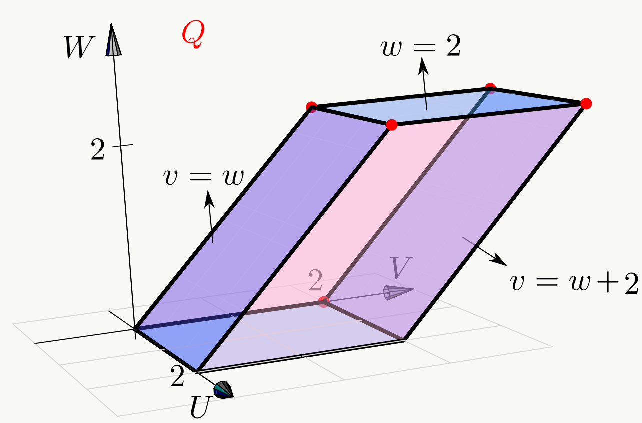
Ejemplo 7.28 (Volumen de un Paralelepípedo).

Consideremos un paralelepípedo Q generado por los vectores $A = (2,0,0)$, $B = (0,2,2)$ y $C = (0,2,0)$. Como se sabe del álgebra lineal, el volumen de Q es $V_Q = |\mathbf{Det}(A\ B\ C)| = 8$. Si $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces el paralelepípedo generado por $L(A), L(B)$ y $L(C)$, el cual denotamos con $L(Q)$, tiene volumen

$$V_{L(Q)} = |\mathbf{Det}(L)|\, V_Q \ = \ |\mathbf{Det}(L)| \cdot 8.$$

Verifiquemos en este caso el teorema de cambio de variable aplicando al sólido Q de la figura, la transformación lineal $L(u,v,w) = (u/2,\ v/2\, w/2)$.





$$V_{L(Q)} = \int_0^1 \int_z^{z+1} \int_0^1 1 \cdot\ dx\,dy\,dz \ = \ 1 \qquad \text{y} \qquad V_Q \ = \int_0^2 \int_w^{w+2} \int_0^2 1\,du\,dv\,dw \ = \ 8$$

Ahora, como una verificación, calculamos $V_{L(Q)}$ aplicando un cambio de variable. Sea $x = u/2,\ y = v/2,\ z = w/2$ sobre Q, obtenemos el nuevo sólido $L(Q)$. En este caso,

$$J(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8},$$

y entonces, por el teorema de cambio de variable,

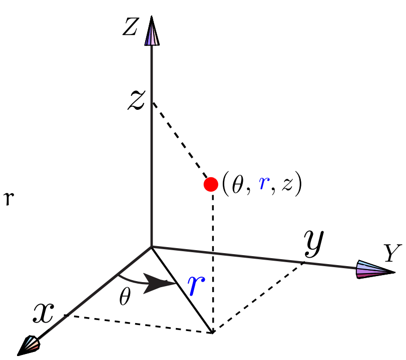
$$\begin{aligned} V_{L(Q)} &= \iint_{R_{vw}} \left[\int_0^2 1 \cdot |J(u,v,w)|\, dw \right] du\, dv \\ &= \int_0^2 \int_w^{w+2} \left[\int_0^2 1 \cdot \left| \frac{1}{8} \right| dw \right] du\, dv \;=\; \frac{1}{8} \cdot 8 \;=\; 1. \end{aligned}$$

7.13 Coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas se usan para describir regiones que son simétricas respecto a alguno de los ejes. La posición de un punto $P(x,y,z)$ en el espacio está determinada por los números r,θ,z donde (r,θ) son las coordenadas polares del punto (x,y).

Si integramos proyectando sobre el plano XY, el cambio de variable es

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta, \\ z = z \end{cases} \quad \text{además} \quad |J(r,\theta,z)| = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$



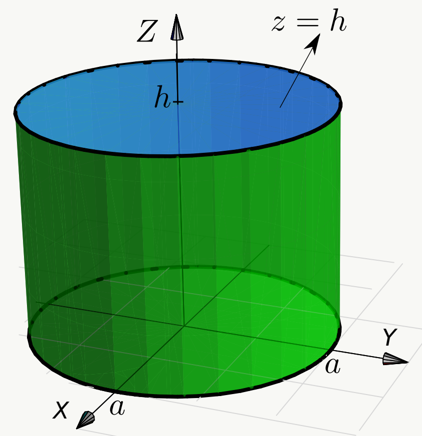
Como $J(r,\theta,z) = r$ entonces el cambio de variable es invertible si $r \neq 0$. Entonces, si se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable,

(Coordenadas Cilíndricas).

$$\iiint_Q h(x,y,z)\, dV = \iint_{R_{r\theta}} \left[\int_{g(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)}^{f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)} h(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, dz \right] r\, dr\, d\theta$$

Ejemplo 7.29

Verifique que el volumen de un cilindro recto Q de radio a y altura h, es $V = \pi a^2 h$.

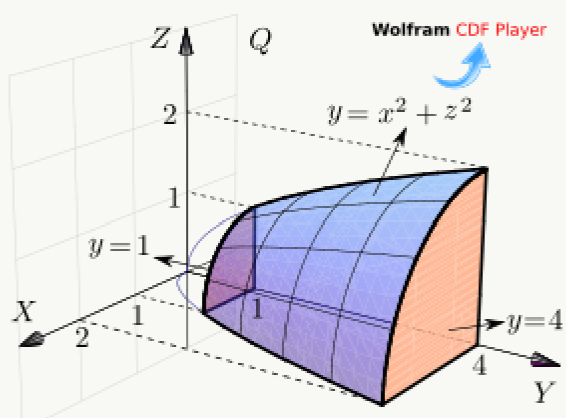


Solución: Q es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ limitado por $z = 0$ y $z = h$. La proyección sobre el plano XY es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

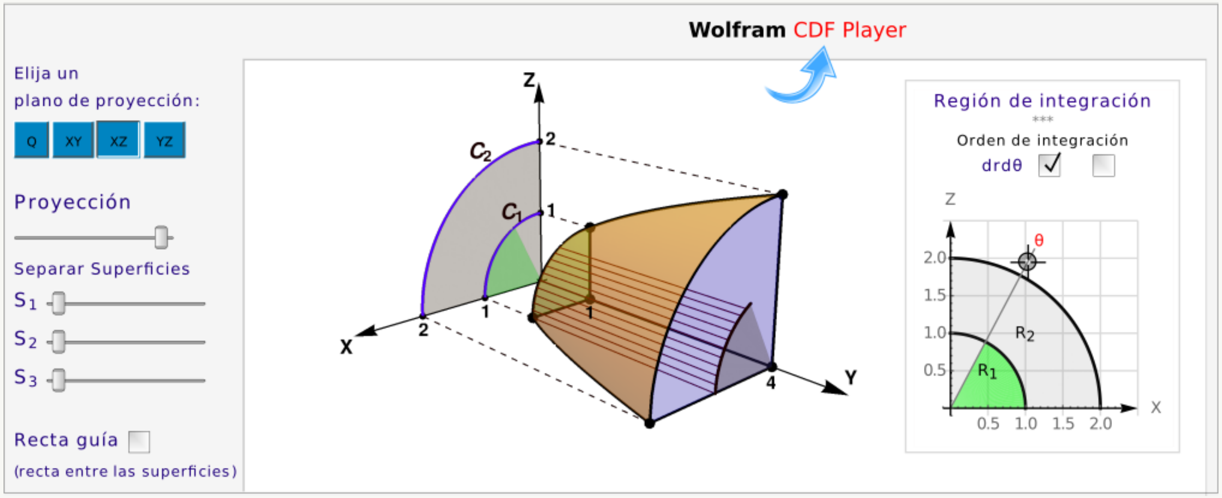
$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left[\int_0^h r\, dz \right] dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a rh\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} h\, d\theta = \frac{a^2}{2} h\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2 h \end{aligned}$$

Ejemplo 7.30

Sea Q el sólido limitado por $y = 1$, $y = x^2 + z^2$ y $y = 4$; como se muestra en la figura. Calcule $\displaystyle\iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2} + 1}\, dV$.



Solución: Proyectamos sobre el plano XZ.



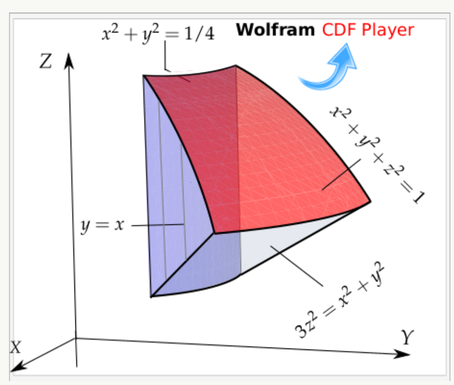
Usamos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta,\ z = r\,\text{sen}\,\theta$ y $y = y$. De esta manera, las curvas $1 = x^2+z^2$ y $4 = x^2+z^2$ tienen ecuaciones $r = 1$ y $r = 2$, respectivamente. La región R_1 está entre $r = 0$ y $r = 1$ y la región R_2 esta entre $r = 1$ y $r = 2$.

$$\iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}+1}\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_1^4 \frac{r}{r+1}\,dy\,dr\,d\theta \;+\; \int_0^{\pi/2}\int_1^2\int_{r^2}^4 \frac{r}{r+1}\,dy\,dr\,d\theta.$$

Para terminar el cálculo, observe que (dividiendo) $\dfrac{r}{r+1} = 1 - \dfrac{1}{r+1}$ y que $\dfrac{r^3}{r+1} = r^2 - r + 1 - \dfrac{1}{r+1}$.

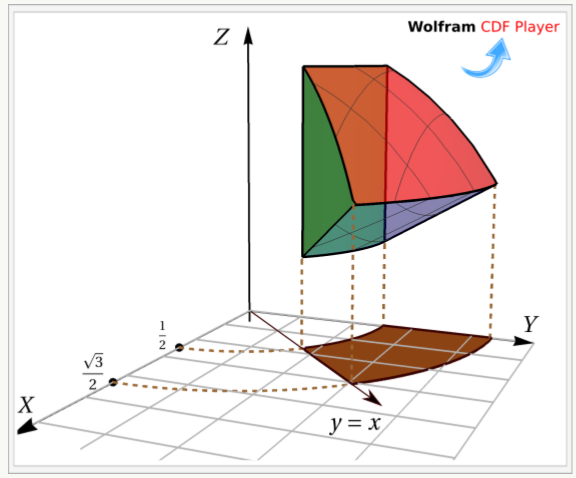
Ejemplo 7.31

Considere el sólido Q limitado por el cilindro $x^2+y^2 = 1/4$, el cono $3z^2 = x^2+y^2$, la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y los planos $x = 0$ y $x = y$; tal y como se muestra en la figura. Calcular $I = \iiint_Q 2z\cdot\,dV$



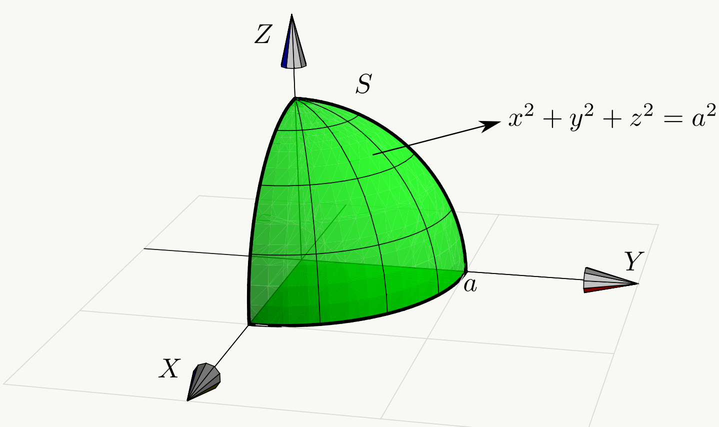
Solución: Proyectamos sobre XZ y usamos coordenadas cilíndricas. Calculando la intersección entre las superficies podemos establecer que la región de integración R_{xy} está entre las curvas $x^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$, $x^2+y^2 = \dfrac{3}{4}$ y las rectas $y = x$ y $x = 0$. Es decir, la región de integración está entre las curvas $r = 1/2$ y $r = \sqrt{3}/2$ con θ entre $\pi/4$ y $\pi/2$.

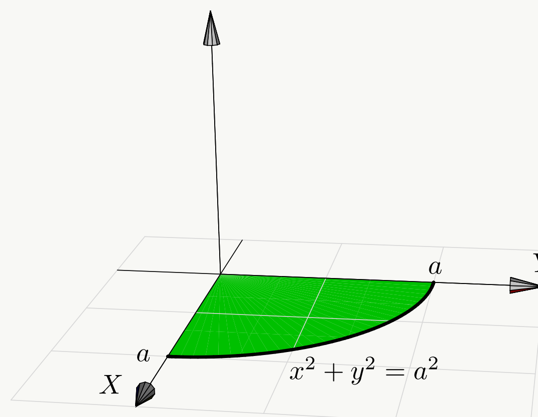
$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q 2z \cdot \, dV \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left[\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z \, dz \right] r \, dr d\theta \end{aligned}$$



Ejemplo 7.32

Verifique que el volumen una esfera S de radio a tiene volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.





Solución: Podemos calcular el volumen de un octavo de esfera y multiplicar por 8 (ver figura). La esfera tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Como la proyección es un círculo, usamos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$. La esfera está entre las superficies $z = 0$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$.

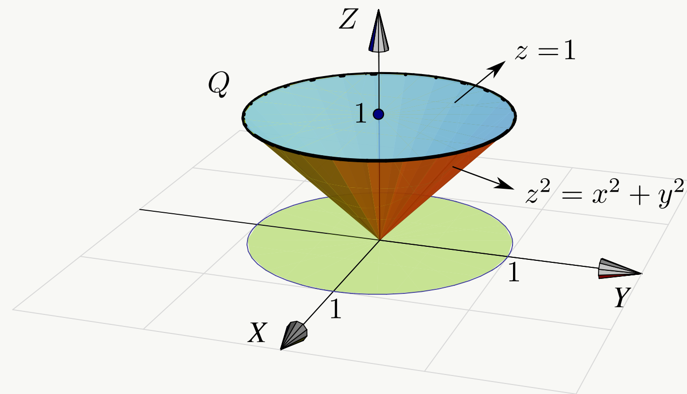
$$\begin{aligned} V &= 8 \cdot \iiint_Q dV = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dz \right] dr \, d\theta = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \left. \frac{-\sqrt{(a^2 - r^2)^3}}{3} \right|_0^a d\theta = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3} \, d\theta = \left. \frac{8a^3}{3} \, \theta \right|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} a^3 \pi \end{aligned}$$

Ejemplo 7.33

Considere el sólido Q limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ (cono), y el plano $z = 1$.

a.) Calcular $\iiint_Q 2z\, dV$.

b.) Calcular el volumen de Q.



Solución:

a.) En coordenadas rectangulares tendríamos

$$\iiint_Q 2z\, dV = \iint_R \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z\, dz\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z\, dz\, dy\, dx$$

La región de integración se describe fácil si usamos coordenadas cilíndricas. La proyección R sobre el plano XY es un círculo de radio 1. En coordenadas polares esta región se describe como $R:\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1$.

Usando el cambio de variable $x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces el sólido está entre las superficies $z = r$ y $z = 1$.

$$\iiint_Q 2z\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\int_r^1 2z\, dz\right] r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2\Big|_r^1 \, r\, dr\, d\theta$$

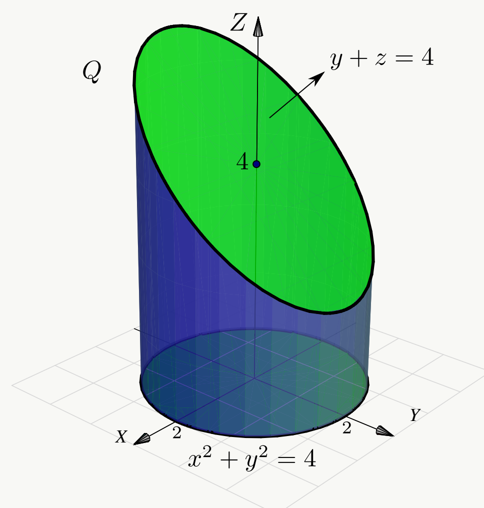
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r - r^3\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

b.) Volumen de Q.

$$\iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\left[\int_r^1 dz\right] r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\Big|_r^1 \; r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r - r^2\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo 7.34

El sólido Q de la figura esta limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $y+z=4$. Calcular el volumen de Q.

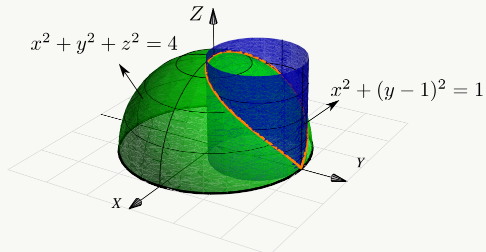


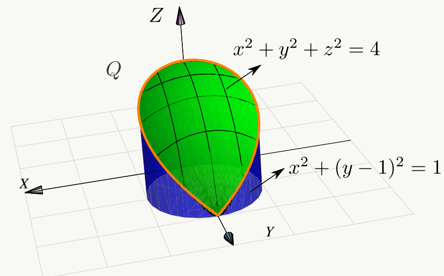
Solución: Usamos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = z$. Observemos que Q está entre las superficies $z=0$ y $z = 4-y = 4-r\,\text{sen}\,\theta$. La región de integración en el plano XY es el círculo $x^2+y^2=4$, es decir el círculo $r=2$ con $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

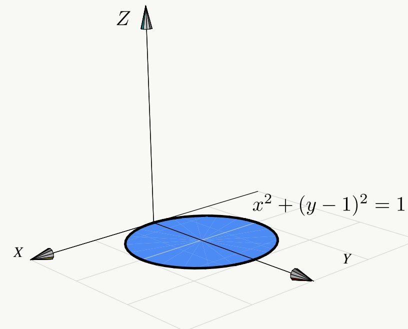
$$V_Q = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\int_0^{4-r\,\text{sen}\,\theta} r\,dz\right] dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,(4 - r\,\text{sen}\,\theta)\;dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 8 - \frac{8\,\text{sen}\,\theta}{3}\,d\theta = 16\pi.$$

Ejemplo 7.35

Calcule el volumen del sólido de la figura. Este sólido Q está limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el cilindro $x^2+(y-1)^2=1$, $z \geqslant 0$.







Solución: El Sólido Q está entre las superficies $z=0$ y $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ La proyección del sólido es el círculo $x^2+(y-1)^2\leqslant 1.$ Este círculo se describe en coordenadas polares como

$$0\leqslant r\leqslant 2\,\text{sen}\,\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{o también,}\quad 0\leqslant r\leqslant 2\,\text{sen}\,\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

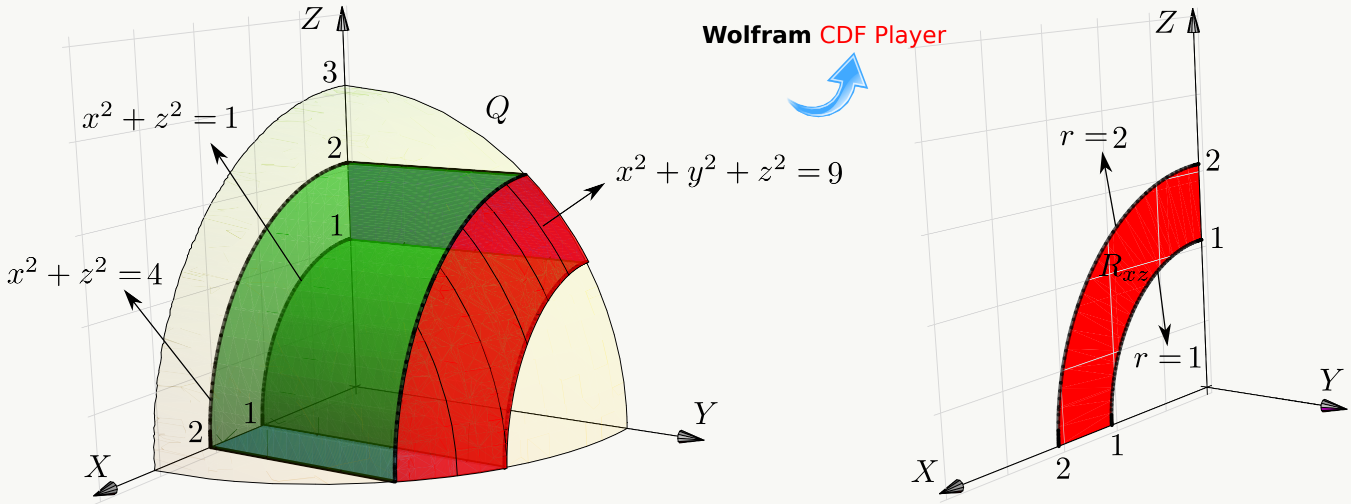
El volumen de Q es,

$$\begin{aligned}
\iiint_Q dV &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\left[\int_0^{\sqrt{4-r^2}} dz\right] r\,dr\,d\theta\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} zr\Big|_0^{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{1}{3}\,(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta\\
&= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-4\,\text{sen}^2\,\theta)^{3/2}-8\,d\theta\\
&= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\,\cos^3\theta-8\,d\theta=-\frac{8}{3}\,(4/3-\pi).
\end{aligned}$$

Aquí se usó la integral $\displaystyle\int\cos^3 t\,dt=\frac{3\,\sin(t)}{4}+\frac{\sin(3\,t)}{12}.$

Ejemplo 7.36

Calcule el volumen de sólido Q, mostrado en la figura, el cual está limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=3^2$ y los cilindros $x^2+z^2=2^2,\ x^2+z^2=1^2.$



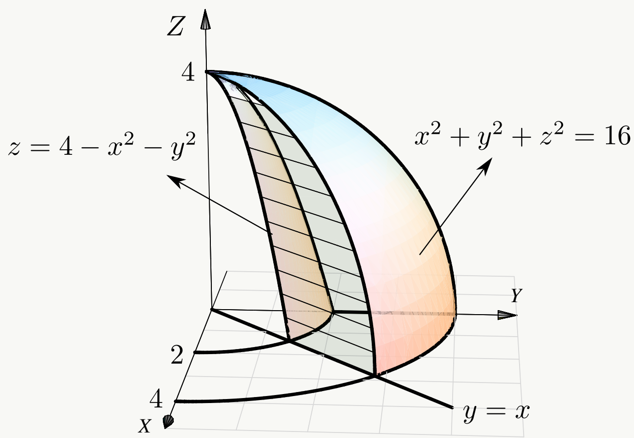
Solución: La proyección sobre XZ es una región entre un par de segmentos de círculo. Usamos coordenadas cilíndricas, el cambio de variable sería $\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ z &= r\operatorname{sen}\theta \\ y &= y \end{cases}$ y como antes, $J(r,\theta,y) = r$.

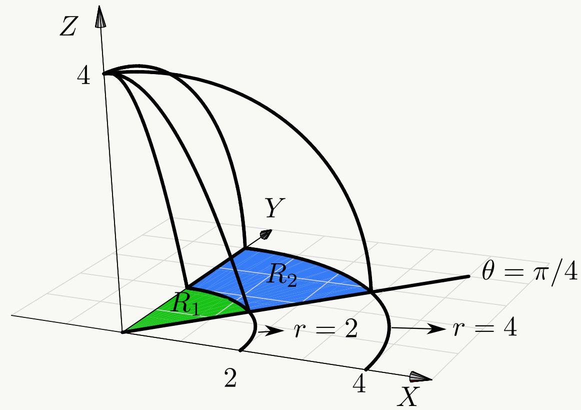
La proyección R_{xz} está entre las circunferencias $r=1$ y $r=2$ y el ángulo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. El sólido Q está entre $y=0$ y $y=\sqrt{3^2-x^2-z^2}=\sqrt{3^2-r^2}$.

$$
\begin{aligned}
V_Q &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{9-r^2}} 1\cdot dy\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \left[y\,\Big|_0^{\sqrt{9-r^2}}\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\sqrt{9-r^2}\,dr d\theta, \qquad \text{hacemos} \quad u = 9-r^2, \quad du=-2r\,dr, \\
&= \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}\left(9-r^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 d\theta \;=\; \frac{\pi}{6}\left(16\sqrt{2}-5\sqrt{5}\right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.37

Calcule, *usando coordenadas cilíndricas*, el volumen del sólido Q, limitado por la porción de paraboloide $z=4-x^2-y^2$, la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y el plano $x=y$; en el primer octante (figura).





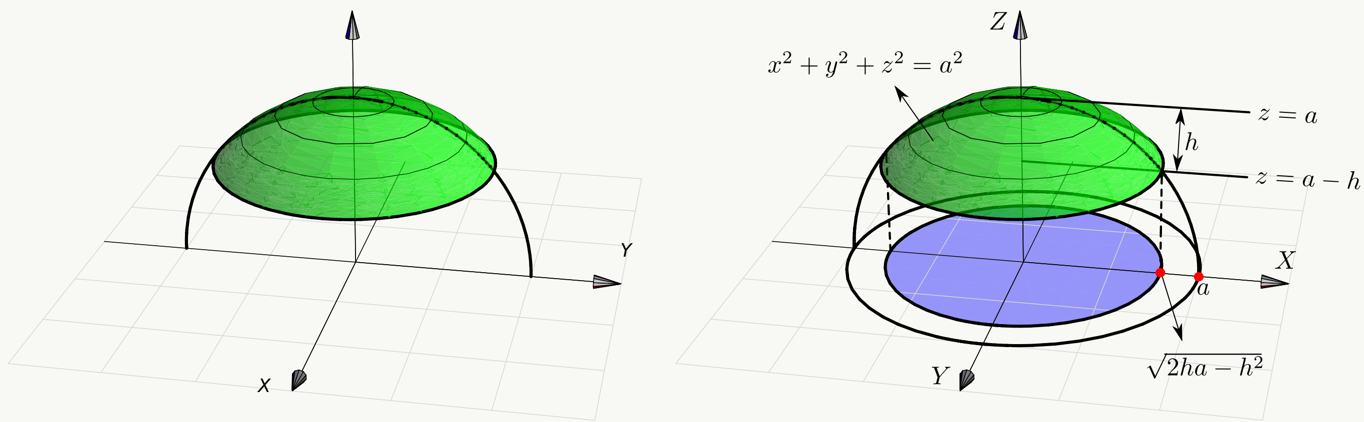
Solución: La región e integración, proyectando sobre XY, es $R = R_1 \cup R_2$.

- $R_1: \; 0 \leqslant r \leqslant 2, \;\; \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,$
- $R_2: \; 2 \leqslant r \leqslant 4, \;\; \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$
- En la región R_1, el sólido está entre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y la porción de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.
- En la región R_2, el sólido está entre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el plano $z = 0$.

$$\begin{aligned}
V_Q &= \iiint_Q dV = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 \left[\int_{4-r^2}^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\right] dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_2^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 r\sqrt{16-r^2} - r(4-r^2)\,dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_2^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\bigg|_2^4 d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\bigg|_2^4 d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{52}{3} - 8\sqrt{3}\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sqrt{3}\,d\theta = \left(\frac{13}{3} - 2\sqrt{3}\right)\pi + 2\pi\sqrt{3} = \frac{13\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.38

El sólido Q de la figura es un casquete, de altura h, de una esfera de radio a.



Vamos a usar coordenadas cilíndricas. Para calcular su volumen proyectamos sobre el plano XY. La proyección del casquete es un círculo de radio $\sqrt{2ha-h^2}$. Este radio se obtiene calculando la intersección de la curva $z^2+y^2=a^2$ y la recta $z=a-h$.

El sólido Q está limitado arriba por la superficie $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$ y por abajo por la superficie $z=a-h$. Entonces

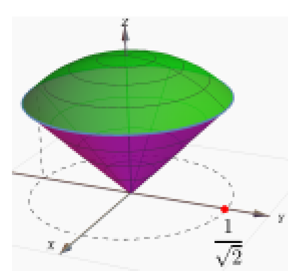
$$V_Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2ha-h^2}}\int_{r(a-h)}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

Como (usando "sustitución") $\displaystyle\int r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}$ salvo constantes, se sigue que

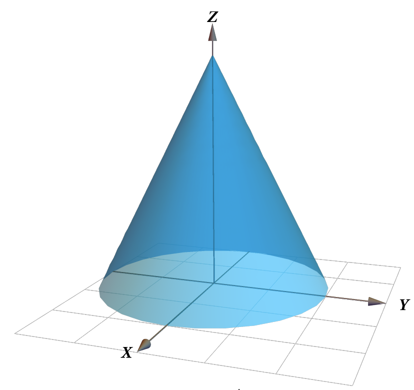
$$\begin{aligned}
V_Q &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2ha-h^2}} r\sqrt{a^2-r^2}-r(a-h)\,dr\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}-\frac{r^2(a-h)}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2ha-h^2}}\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\,(a-r)^3-\frac{(2ha-h^2)(a-h)}{2}+\frac{1}{3}\,a^3\,d\theta\\
&= \frac{\pi}{3}\,h^2(3a-h)
\end{aligned}$$

Ejercicios

7.13.1 Calcule, usando integrales triples, el volumen del sólido Q limitado por el cono $z^2=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

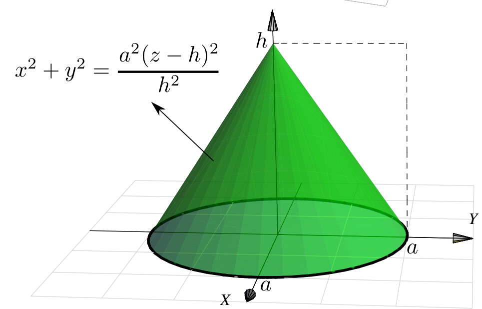


7.13.2 Verifique, usando integrales triples, que el volumen del sólido Q limitado por el cono $S_1 : x^2+y^2 = \dfrac{(z-4)^2}{4}$ y el plano $S_2 : z = 0$ es $V_C = \dfrac{16\pi}{3}$.



7.13.3 Verifique, que el volumen del cono de base circular de radio a y altura h es $V_C = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

Ayuda: El cono se puede modelar con la ecuación $x^2+y^2 = \dfrac{a^2(z-h)^2}{h^2}$, tal y como se muestra en la figura. El cono está entre $z=0$ y $z = h - \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ pues $z \leqslant h$.

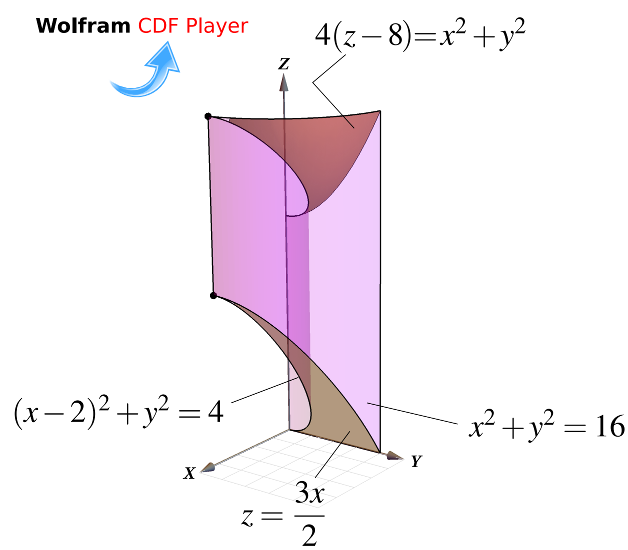


7.13.4 Sea $I = \iiint_Q \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\,dy\,dx$

a.) Dibuje el sólido Q. Observe que el sólido está entre las superficies $z^2+x^2+y^2 = 16$, $x^2+y^2 = 4$, $x \in [0,2]$.

b.) Calcule I usando coordenadas cilíndricas.

7.13.5 Considere el sólido E limitado por las superficies de ecuación $S_1 : x^2+y^2 = 16$, $S_2 : (x-2)^2+y^2 = 4$, $S_3 : z = \dfrac{3x}{2}$, $S_4 : 4(z-8) = x^2+y^2$ y $x = 0$, tal y como se muestra en la figura a al derecha. Calcule $\iiint_E 1 \cdot dV$.



,

8 — Integral de Superficie

8.1 Superficies parametrizadas.

Recordemos que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es *conexo* si no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. Intuitivamente, un conjunto conexo es un conjunto de una sola pieza.

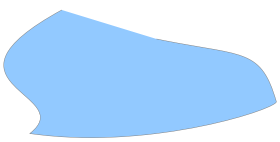


Figura 8.1: Conjunto conexo

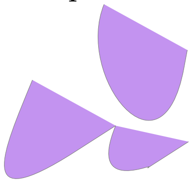


Figura 8.2: Conjunto no conexo

Superficie parametrizada. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y conexo. Una parametrización continua $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, inyectiva sobre D (excepto talvez en la frontera de D) se le llama "parametrización de la superfice" $S = \mathbf{r}(D)$. Escribimos

$$S: \quad \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\ \hat{\mathbf{\imath}} + y(u,v)\ \hat{\mathbf{\jmath}} + z(u,v)\ \hat{\mathbf{k}}, \quad (u,v) \in D.$$

Curvas en S. Los conjuntos $\mathbf{r}(u_0, v)$ y $\mathbf{r}(u, v_0)$ (con u_0 y v_0 fijos) son curvas de la superficie S.

Vectores tangentes y un vector normal Sea $S: \ \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\ \hat{\mathbf{\imath}} + y(u,v)\ \hat{\mathbf{\jmath}} + z(u,v)\ \hat{\mathbf{k}}$ con $(u,v) \in D$. $\mathbf{r}$ es de clase C^1 si $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ son de clase C^1 (funciones continuamente diferenciables). Si $P = (u_0, v_0, z(u_0, v_0)) \in S$, los vectores

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\right|_P \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right|_P$$

son vectores tangentes a las curvas $\mathbf{r}(u_0, v)$ y $\mathbf{r}(u, v_0)$ y decimos que estos vectores son tangentes a S en P. El vector $\mathbf{N} = \left.\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\right|_P$ es normal a S en P.

Definición 8.1 (Superficie suave o regular).

Sea D abierto y sea S una superficie parametrizada por $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1. Decimos que S es una superficie *suave o regular* en (u,v) si $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \hat{\mathbf{0}}$. Si S se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice regular a trozos.

Caso $S: \; z = f(x,y)$

Una superficie suave $S: \; z = f(x,y), \; (x,y) \in D$ se puede parametrizar como

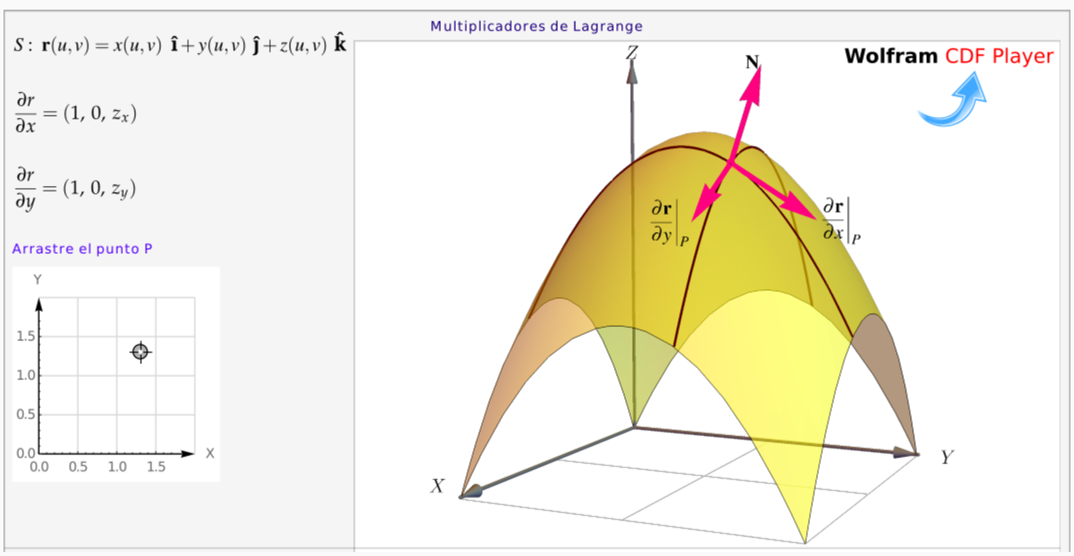
$$\mathbf{r}(x,y) = x \;\; \hat{\mathbf{\imath}} + y \;\; \hat{\mathbf{\jmath}} + f(x,y) \;\; \hat{\mathbf{k}}, \;\; (x,y) \in D$$

En este caso, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, z_x)$ y $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, z_y)$ son vectores tangentes en cada punto (x,y).

Un vector normal a la superficie S en P es

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-z_x, \, -z_y, \, 1) \neq \hat{\mathbf{0}}.$$

Llamamos al vector $\mathbf{N} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ el *vector normal estándar* asociado a $\mathbf{r}$.

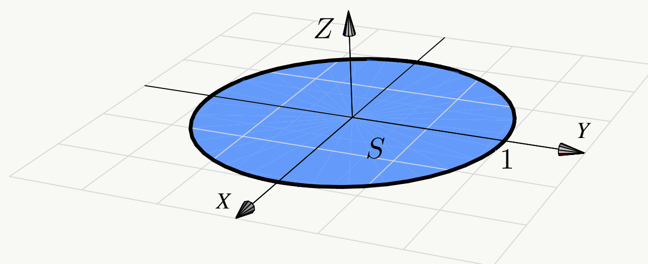


Ejemplo 8.1

Considere la superficie $S: \;\; x^2 + y^2 \leqslant 1, \;\; z = 0$. Claramente S es el círculo de radio 1 en el plano XY, centrado en el origen.

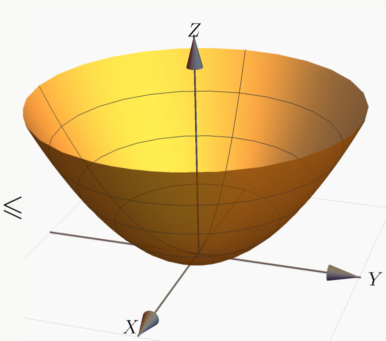
Para describir a S podemos escribir $S:\ z=0$ en el dominio $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$. Pero más conveniente es parametrizar S como

$$\mathbf{r}(x,y)=x\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+y\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+0\cdot\hat{\mathbf{k}},\ \ (x,y)\in D.$$



Ejemplo 8.2

Sea S la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ entre $z=0$ y $z=1$. Entonces S se puede parametrizar como,



$$S:\ \mathbf{r}(x,y)=x\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+y\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+(x^2+y^2)\ \hat{\mathbf{k}},\ \ (x,y)\in D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqslant$$

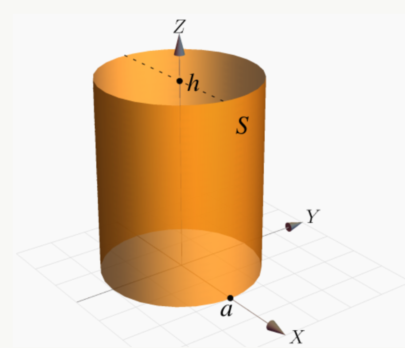
También, $z=x^2+y^2$ se podría ver como circunferencias de radio $\sqrt{z}$, entonces

$$S:\ \mathbf{r}(\theta,z)=\sqrt{z}\cos t\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+\sqrt{z}\sin t\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+z\ \hat{\mathbf{k}},\ \ \theta\in[0,2\pi[\ \ \text{y}\ \ z\in[0,1].$$

Ejemplo 8.3

Sea $S_1:x^2+y^2=a^2,\ 0\leqslant z\leqslant h.$ S es el cilindro de la figura. Esta superficie se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(\theta,z)=a\cos\theta\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+a\,\mathrm{sen}\,\theta\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+z\ \hat{\mathbf{k}},\quad \text{con}\quad (\theta,z)\in D=[0,2\pi[\times[0,h].$$



8.2 Superficies parametrizadas.

Recordemos que un conjunto $D\subset\mathbb{R}^2$ es *conexo* si no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. Intuitivamente, un conjunto conexo es un conjunto de una sola pieza.

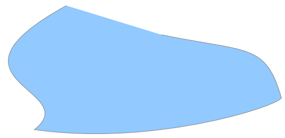


Figura 8.3: Conjunto conexo

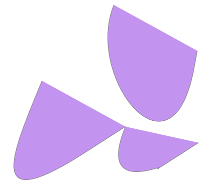


Figura 8.4: Conjunto no conexo

Superficie parametrizada. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo. Una parametrización continua $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, inyectiva sobre D (excepto talvez en la frontera de D) se le llama "parametrización de la superfice" $S = \mathbf{r}(D)$. Escribimos

$$S: \ \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\ \hat{\imath} + y(u,v)\ \hat{\jmath} + z(u,v)\ \hat{\mathbf{k}}, \quad (u,v) \in D.$$

Curvas en S. Los conjuntos $\mathbf{r}(u_0, v)$ y $\mathbf{r}(u, v_0)$ (con u_0 y v_0 fijos) son curvas de la superficie S.

Vectores tangentes y un vector normal Sea $S: \ \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\ \hat{\imath} + y(u,v)\ \hat{\jmath} + z(u,v)\ \hat{\mathbf{k}}$ con $(u,v) \in D$. $\mathbf{r}$ es de clase C^1 si $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ son de clase C^1 (funciones continuamente diferenciables). Si $P = (u_0, v_0, z(u_0, v_0)) \in S$, los vectores

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\right|_P \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right|_P$$

son vectores tangentes a las curvas $\mathbf{r}(u_0, v)$ y $\mathbf{r}(u, v_0)$ y decimos que estos vectores son tangentes a S en P. El vector $\mathbf{N} = \left.\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\right|_P$ es un vector normal a S en P.

Definición 8.2 (Superficie suave o regular).

Sea D abierto y sea S una superficie parametrizada por $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1. Decimos que S es una superficie *suave o regular* en (u,v) si $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$. Si S se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice *regular a trozos.*

Caso $S: \ z = f(x,y)$

Una superficie suave $S: \ z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ se puede parametrizar como

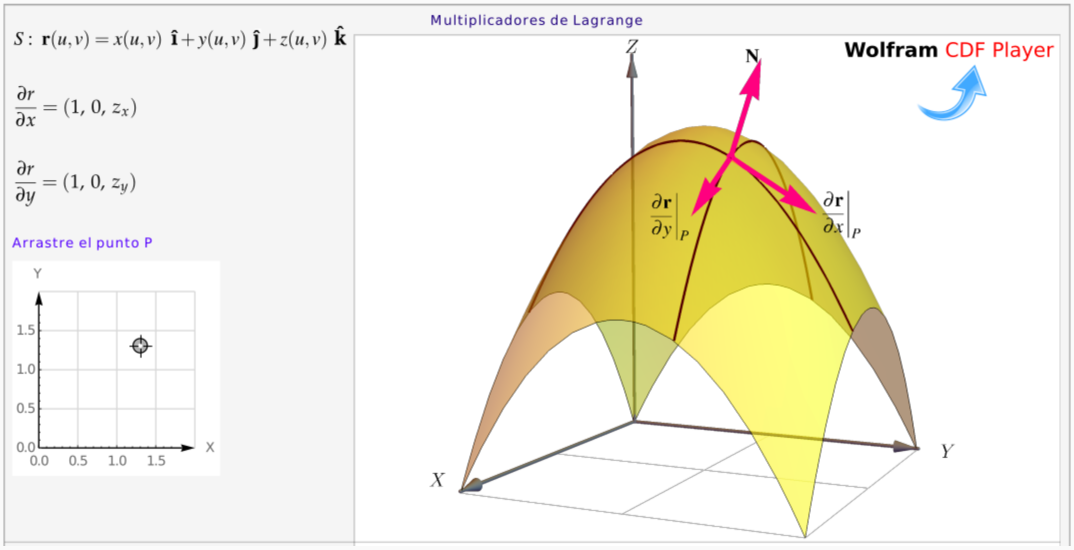
$$\mathbf{r}(x,y) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + f(x,y)\ \hat{\mathbf{k}}, \quad (x,y) \in D$$

En este caso, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, z_x)$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, z_y)$ son vectores tangentes en cada punto (x,y).

Un vector normal a la superficie S en P es

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-z_x, -z_y, 1) \neq \mathbf{0}.$$

Llamamos al vector $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ el *vector normal estándar* asociado a $\mathbf{r}$.

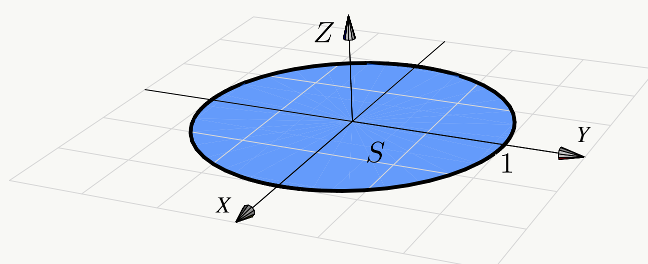


Ejemplo 8.4

Considere la superficie $S:\ \ x^2+y^2\leqslant 1,\ \ z=0$. Claramente S es el círculo de radio 1 en el plano XY, centrado en el origen.

Para describir a S podemos escribir $S:\ z=0$ en el dominio $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$. Pero más conveniente es parametrizar S como

$$\mathbf{r}(x,y)=x\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+y\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+0\cdot\hat{\mathbf{k}},\ \ (x,y)\in D.$$

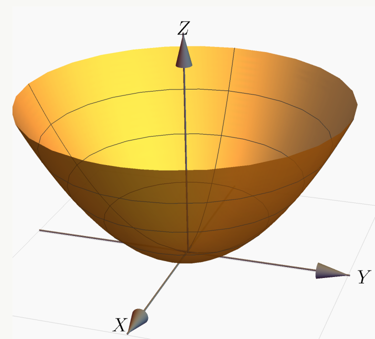


Ejemplo 8.5

Sea S la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ entre $z=0$ y $z=1$. Entonces S se puede parametrizar como,

$$S:\ \mathbf{r}(x,y)=x\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+y\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+(x^2+y^2)\ \ \hat{\mathbf{k}}$$

$$(x,y)\in D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqslant 1\}$$



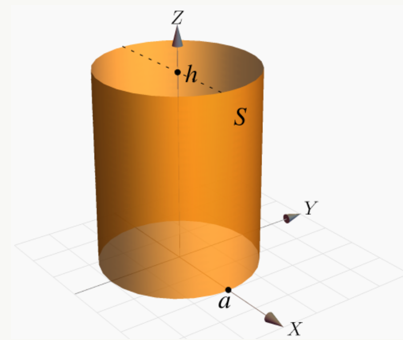
También, $z=x^2+y^2$ se podría ver como circunferencias de radio $\sqrt{z}$, entonces

$$S:\ \mathbf{r}(\theta,z)=\sqrt{z}\cos t\ \ \hat{\mathbf{\imath}}+\sqrt{z}\sin t\ \ \hat{\mathbf{\jmath}}+z\ \hat{\mathbf{k}},\ \ \theta\in\ [0,2\pi[\ \ \text{y}\ \ z\in\ [0,1].$$

Ejemplo 8.6

Sea $S_1 : x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h.$ S es el cilindro de la figura. Esta superficie se puede parametrizar como

$\mathbf{r}(\theta, z) = a\cos\theta\ \ \hat{\mathbf{\imath}} + a\,\mathrm{sen}\,\theta\ \ \hat{\mathbf{\jmath}} + z\ \ \hat{\mathbf{k}},\quad \text{con}\quad (\theta, z) \in D = [0, 2\pi[\times[0, h].$



8.3 Área de una superficie.

La idea de la definición de área de una superficie paramétrica consiste en aproximar el área de S, denotada A_S, sumando las áreas de una familia de trozos de planos tangentes, en una malla de puntos, es decir el área de los paralelogramos generados por los vectores *escalados* $\Delta u_i\,\mathbf{r}_u$ y $\Delta v_j\,\mathbf{r}_v$. Luego tomados el límite cuando $\Delta v_j \to 0$ y $\Delta u_j \to 0$.

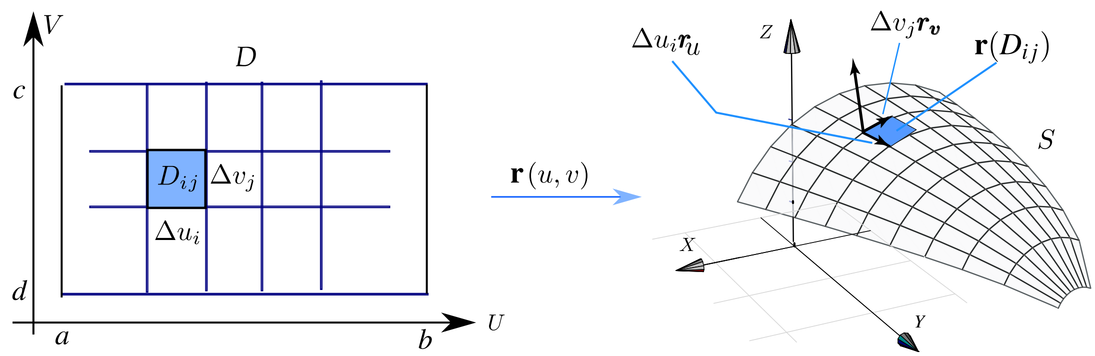
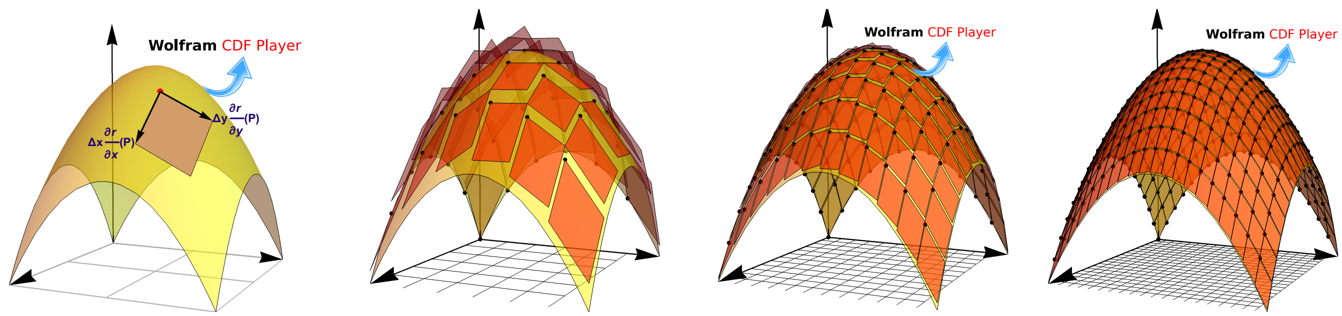


Figura 8.5: Aproximación del área de una superficie.

Consideremos el caso particular de una región rectangular. Sea $D = [a, b] \times [c, d]$ y sea S una superficie parametrizada por $\mathbf{r}(x, y)$ en D, con $\mathbf{r}$ una función definida y acotada sobre D. Supongamos que M_D es una partición de D con n^2 rectángulos D_{ij}. Si $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$ (igualmente espaciados, es decir, si $n \to \infty$ entonces $\Delta x_i,\ \Delta y_i, \to 0$), cada rectángulo D_{ij} tiene un vértice en (x_i, y_i). Sea ΔA_{ij} el área de la imagen $\mathbf{r}(D_{ij})$. Cada imagen $\mathbf{r}(D_{ij})$ es aproximadamente un paralelogramo si Δx_i y Δy_i son pequeños (Figura 8.5), es decir, cada imagen $\mathbf{r}(D_{ij})$ se puede aproximar muy bien con un trozo de plano tangente en ese punto.



En el punto $\mathbf{r}(x_i, y_j)$ de la superficie S, el plano tangente T_i tiene ecuación vectorial

$$T_i(s,t) : \mathbf{r}(x_i, y_j) + t\,\mathbf{r}_x(x_i, y_j) + s\,\mathbf{r}_y(x_i, y_j), \quad \text{con} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

La porción de superficie de S que es imagen de a Dij se puede aproximar con un paralelogramo: una porción de el plano tangente,cuyos lados son $\Delta x_i\, \mathbf{r}_x(x_i, y_j)$, $\Delta y_j\, \mathbf{r}_y(x_i, y_j)$. Como es sabido, este paralelogramo tiene área

$$||\Delta x_i\, \mathbf{r}_x(x_i, y_j) \times \Delta y_j\, \mathbf{r}_y(x_i, y_j)||$$

Sacando los escalares y sumando, tenemos, $A_S \approx \displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} ||\, \mathbf{r}_x(x_i, y_j) \times \mathbf{r}_y(x_i, y_j)||\Delta x_i\, \Delta y_j$ y entonces, dado que si $n \to \infty$ entonces $\Delta x_i, \Delta y_j \to 0$, tenemos

$$A_S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=0}^{n} ||\, \mathbf{r}_x(p_{ij}) \times \mathbf{r}_y(p_{ij})||\Delta x_i\, \Delta y_j \quad \text{con} \quad p_{ij} = (x_i, y_i)$$

Definición 8.3 (Área de una superficie).

Sea S una superficie regular definida sobre un conjuno abierto y acotado D. Digamos que

$$S: \ \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\ \ \hat{\imath} + y(u,v)\ \ \hat{\jmath} + z(u,v)\ \ \hat{\mathbf{k}} \quad \text{con} \quad (u,v) \in D.$$

Entonces, si llamamos $dS = \left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| dA$, el área A_S de la superficie S es

$$A_S = \iint_S 1 \cdot dS \ = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| dA$$

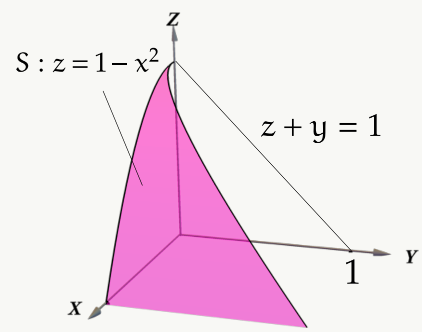
Si $S = S_1 \cup ... \cup S_m$ es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_1} + A_{S_2} + ... + A_{S_k}$$

La definición 8.3 dice que debemos integrar sobre el dominio D de la parametrización $\mathbf{r}$ de la superficie. El dominio de la parametrización puede ser la proyección ortogonal de la superficie en los planos donde se pueda proyectar. Un cilindro generado por una curva C, digamos en el plano XY, no tiene una parametrización con dominio en el plano XY, pero posiblemente si hay una parametrización con dominio en alguno de los otros dos planos cuyo dominio es su proyección.

Ejemplo 8.7

Considere la superficie $S: z = 1 - x^2$ limitada por el plano $S_1: y + z = 1$ tal y como se muestra en la figura de la derecha.



Vamos a calcular el área de la superficie S usando dos parametrización. El dominio de la parametrización coincide con la proyección de la superfice en el plano respectivo.

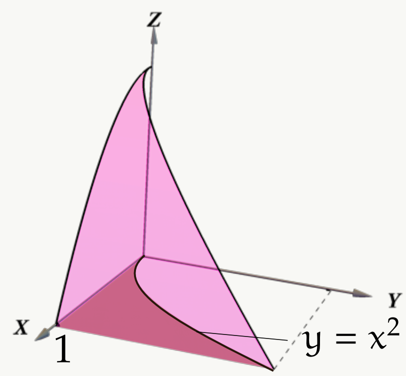
Primera manera. Parametrizamos S. Como $z = 1 - x^2$,

$$S: \mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + (1-x^2)\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{con} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$$

La superficie está limitada por el plano $y = 1 - z$, es decir $y \leqslant 1 - z \implies y \leqslant x^2$. Entonces *el dominio* D *de la parametrización es la proyección de la superficie en el plano* XY.

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right\| = \|(1,0,-2x) \times (0,1,0)\| = \|(2x,0,1)\| = \sqrt{4x^2+1}$$

$$\begin{aligned} A_S = \iint_S 1 \cdot dS &= \iint_D \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| dA \\ &= \iint_D \sqrt{4x^2+1}\, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{4x^2+1}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 x^2\sqrt{4x^2+1}\, dx \approx 0.6063 \end{aligned}$$



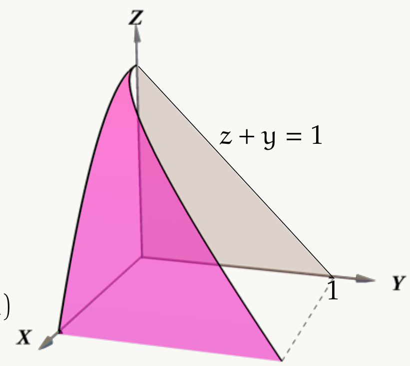
Segunda manera. Parametrizamos S. Como $x = \sqrt{1-z}$,

$$S: \mathbf{r}(y,z) = \sqrt{1-z}\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{con} \quad D = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant z \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1-z\right\}$$

La superficie está limitada por el plano $y = 1 - z$, es decir $y \leqslant 1 - z$. Entonces *el dominio* D *de la parametrización es la proyección de la superficie en el plano* YZ.

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right\| = \left\|(0,1,0)\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-z}},0,1\right)\right\| = \left\|\left(1,0,\frac{1}{2\sqrt{1-z}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4(1-z)}+1}$$

$$\begin{aligned}
A_S=\iint_S 1\cdot dS &= \iint_D \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| dA\\
&= \iint_D \sqrt{\frac{1}{4(1-z)}+1}\,dA\\
&= \int_0^1\int_0^{1-z}\sqrt{\frac{1}{4(1-z)}+1}\,dy\,dz\\
&= \int_0^1 (1-z)\sqrt{\frac{1}{4(1-z)}+1}\,dz \quad (\text{No es impropia})\\
&= \int_0^1 \sqrt{(1-z)^2+\frac{1-z}{4}}\,dz \approx 0.6063
\end{aligned}$$



N En el ejemplo anterior, el área de la superfice se calculó con parametrizaciones cuyo dominio era la proyección de la superficie sobre los planos XY y YZ respectivamente. La proyección de la siperficie sobre el plano XZ es la curva que genera el cilindro y no hay manera de parametrizar la superficie de tal manera que esta parametrización tenga como dominio una región en el plano XZ, por eso el área no se puede calcular proyectando sobre ese plano.

Caso $S: z=f(x,y)$

Si $S: z=f(x,y)$, una parametrización es $\mathbf{r}(x,y)=x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z(x,y)\,\hat{\mathbf{k}}$ con $(x,y)\in D$. D es la proyección de la superficie en el plano XY (un región con interior no vacío).

- $\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right\| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$.
- $A_S=\iint_S 1\cdot dS = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA$

Caso $S: \mathbf{F}(x,y,z)=0$

Si $S: \mathbf{F}(x,y,z)=0$ donde S se puede proyectar *uno a uno* sobre una región D del plano XY y si $\mathbf{F}$ define a z como función de x e y y si $\mathbf{F}_z\neq 0$ entonces $z_x=-F_x/F_z$ y $z_y=-F_y/F_z$ y la fórmula anterior quedaría

$$A_S = \iint_S 1 \cdot dS \; = \; \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\, dA$$

Área de una superficie—Proyectando sobre varios varios planos.

Asumimos que S es una superficie regular y que F es continuamente diferenciable e inyectiva sobre la proyección (con interior no vacío) D.

a) Proyectando sobre XY: Si $S:\, z = z(x,y)$ o $S:\, F(x,y,z) = 0$, con $(x,y) \in D_{xy}$

$$A_S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dA \qquad \text{o también} \qquad A_S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}}\, dA \quad \text{con} \quad F_z \neq 0 \quad \text{en} \quad D_{xy}$$

b) Proyectando sobre XZ: Si $S:\, y = y(x,z)$ o $S:\, F(x,y,z) = 0$, con $(x,z) \in D_{xz}$

$$A_S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dA$$

o también

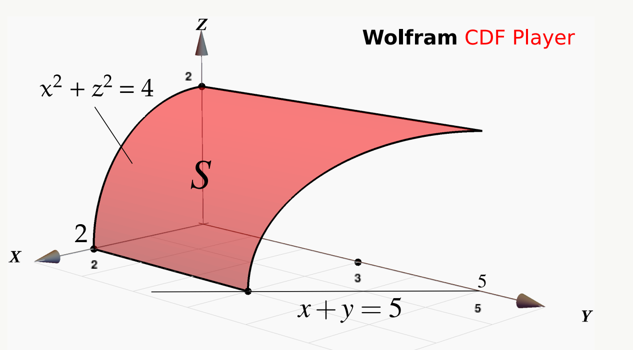
$$A_S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_y^2}}\, dA \quad \text{con} \quad F_y \neq 0 \quad \text{en} \quad D_{xz}$$

c) Proyectando sobre YZ: Si $S:\, x = x(y,z)$ o $S:\, F(x,y,z) = 0$, con $(y,z) \in D_{yz}$

$$A_S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dA \quad \text{o también} \quad A_S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_x^2}}\, dA$$

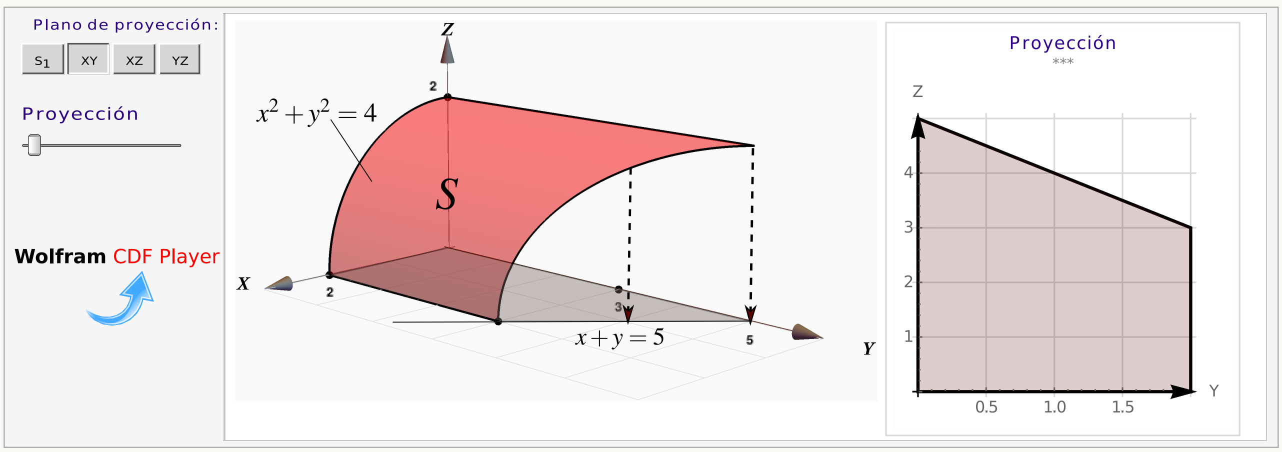
Ejemplo 8.8

La superficie $S:\; x^2 + z^2 = 4$ está e el primer octante está limitada por el plano $x + y = 5$, tal y como se muestra en la figura de la derecha. Plantee las integrales necesarias para calcular el área de la superficie S.



Solución: Primera manera. Podemos proyectar sobre el plano XY. Como $S:\; x^2 + z^2 = 4$, podemos usar la fórmula para el área con $F(x,y,z) = x^2 + z^2 - 4$.

$$
\begin{aligned}
A_S &= \iint_S 1 \cdot dS \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}}\, dA \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{4x^2 + 0^2 + 4z^2}{4z^2}}\, dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{5-x} \sqrt{\frac{16}{16-4x^2}}\, dy\, dx \quad \text{(Impropia)} \\
&= -4 + \lim_{a \to 2^-} 10 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{a}{2}\right) = -4 + 5\pi
\end{aligned}
$$

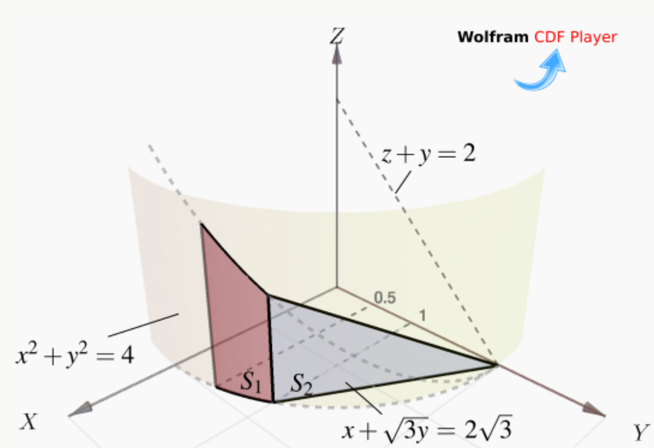


Ejemplo 8.9 (Usando coordenadas rectangulares).

Calcular las integrales que dan el área de la superficie

$$S = S_1 + S_2$$

tal y como se muestra en la figura de la derecha.

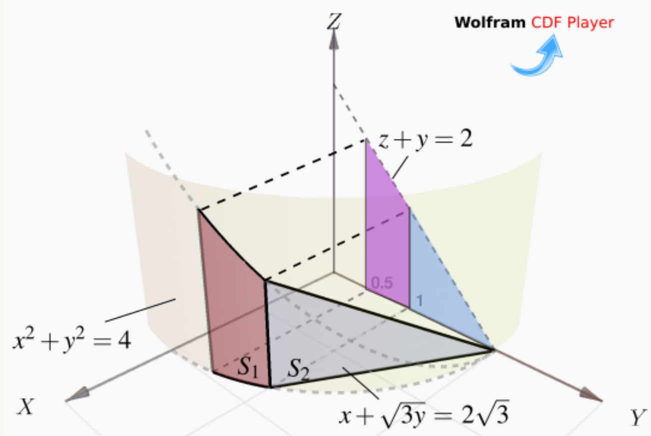


Solución: Podemos proyectar sobre el plano YZ. Tenemos

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_2}$$

y $S_1: \; F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0.$

La superficie S_2 tiene ecuación $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y.$ Entonces,



$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_{D_1} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_x^2}}\, dA \; + \; \iint_{D_2} \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1}\, dA \\
&= \int_{1/2}^{1}\int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 0^2}{4x^2}}\, dz dy \; + \; \int_1^2\int_0^{2-y} \sqrt{3+0+1}\, dz dy \\
&= \int_{1/2}^{1}\int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4(4-y^2) + 4y^2 + 0^2}{4(4-y^2)}}\, dz dy \; + \; \int_1^2\int_0^{2-y} 2\, dz dy \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{4-2y}{\sqrt{4-y^2}}\, dy \; + \; \int_1^2 (4-2y)\, dy \;\approx\; 1.674
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.10 (Usando coordenadas rectangulares).

Calcular el área de la superficie $S: \; y + x^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

Solución: La proyección sobre XZ esta limitada por el círculo $x^2 + z^2 = 4$ y la ecuación de la superficie es

$$S: \; y = 4 - x^2 - z^2.$$

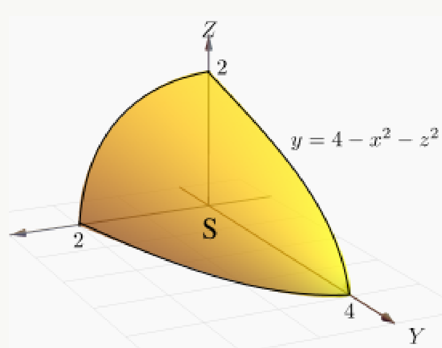


Figura 8.6: Superficie S

Primera manera: Proyectando sobre XZ (un cuarto de círculo) y usando coordenadas cilíndricas.

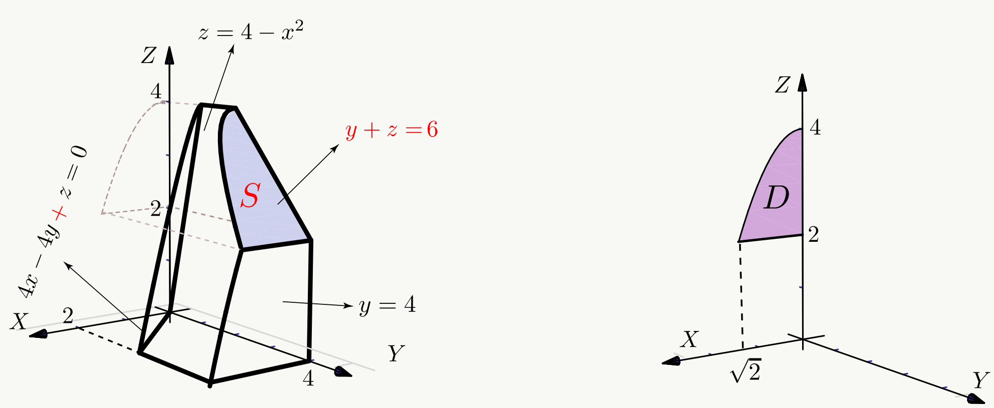
$$
\begin{aligned}
A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dA \\
&= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dA, \quad \text{cambio de variable: } \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= y \\ z &= r\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases} \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\; r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{(1+4\,r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_0^2 d\theta \;=\; \frac{\pi}{24}\,(17\sqrt{17}-1) \approx 9.04423.
\end{aligned}
$$

(*) Segunda manera: Podemos usar la parametrización $\mathbf{r}(y,\theta) = \sqrt{4-y}\,\cos\theta\;\hat{\imath} + y\;\hat{\jmath} + \sqrt{4-y}\,\mathrm{sen}\,\theta\;\hat{\mathbf{k}}$ con $y \in [0,4]$ y $\theta \in [0,\pi/2]$.

$$
\begin{aligned}
A_S &= \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|\right| dy\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^4 \sqrt{17/4-y}\;dy\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{24}\,(17\sqrt{17}-1)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.11

Calcular el área de la superficie $S:\; y+z=6$ tal y como se ve en la figura **(a)**.



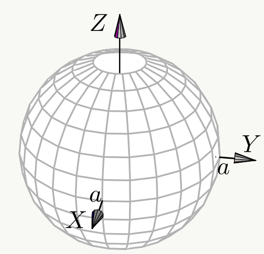
(a) (b)

Solución: Como $S:\; y(x,z) = 6-z$, usamos la parametrización $\mathbf{r}(x,z) = x\;\hat{\imath} + (6-z)\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ sobre la región D definida por $x \in [0, \sqrt{2}]$ y $2 \leqslant z \leqslant 4 - x^2$. Entonces $y_x = 0$ y $y_z = -1$. La proyección sobre D_{xz} se ve en la figura **(b)**.

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dA \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{4-x^2} \sqrt{2}\, dz dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}(2 - x^2)\, dx \;=\; \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.12

Calcular el área de la superficie de la esfera $S:\ x^2+y^2+z^2 = a^2$.



Solución: Vamos a calcular de dos maneras, parametrizando con coordenadas esféricas y parametrizando con coordenadas rectangulares (más complicado).

Usamos la parametrización $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\hat{\mathbf{k}}$. Solo vamos a calcular el área de la parte superior de la esfera. El área total la obtenemos multiplicando por dos.

$$\begin{aligned} \bullet\ z_x &= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ \bullet\ z_y &= -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad A_S = 2\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dA = 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a - x^2 - y^2}}\, dA$$

Conviene hacer cambio de variable y usar coordenadas polares. Observe que las derivadas se indefinen en la frontera del círculo (si $r = a$). La integral se calcula desde 0 hasta $r = \epsilon$ con $0 < \epsilon < a$. Al final hacemos $\epsilon \longrightarrow a$.

$$\begin{aligned} A_S &= 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a - x^2 - y^2}}\, dA \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr d\theta \quad \text{si} \quad ; \epsilon \longrightarrow a \quad \text{(integral impropia!)} \\ &= 2\int_0^{2\pi} a^2 d\theta \;=\; 4a^2\pi \end{aligned}$$

- Para calcular $\displaystyle\int_0^{\epsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr$ hacemos $u = a^2 - r^2$, $du = -2r\, d\mathbf{r}$. Queda

$$-\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2-\epsilon^2} \frac{a}{\sqrt{u}}\, du \;=\; -\frac{a}{2}\frac{\sqrt{u}}{1/2}\Bigg|_{a^2}^{a^2-\epsilon^2} \;=\; a^2 - a\sqrt{a^2 - \epsilon^2} \;\longrightarrow\; a^2 \quad \text{si} \quad \epsilon \longrightarrow a.$$

Nota: Observe que A_S también se pudo calcular con $A_S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,dA$. En este caso $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$. Puesto que esta fórmula solo se puede usar si la proyección es *uno a uno* con la superficie, solo podemos considerar la parte superior de la esfera. Pasando a cilíndricas, la integral queda igual al cálculo anterior.

(*) Segunda manera: Coordenadas esféricas. La esfera la podemos parametrizar con coordenadas esféricas,

$$S:\ \mathbf{r}(\theta,\varphi) = a\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta\ \hat{\imath} +\ a\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\jmath} +\ a\cos\varphi\ \hat{\mathbf{k}},\quad \text{con}\quad (\theta,\varphi)\in D = [0,2\pi[\times[0,\pi]$$

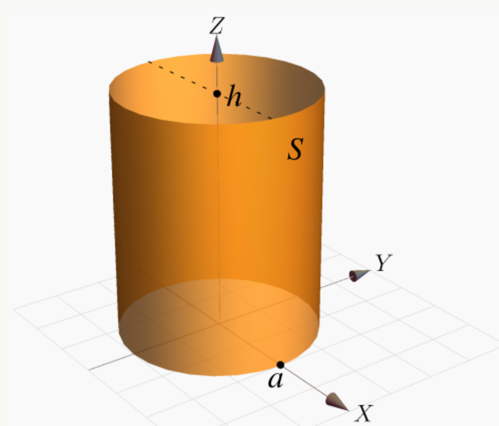
- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} = (-a\,\text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\varphi,\ a\cos\theta\ \text{sen}\,\varphi,\ 0)$
- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial\varphi} = (a\cos\theta\ \cos\varphi,\ a\cos\varphi\ \text{sen}\,\theta,\ -a\,\text{sen}\,\varphi)$

$$\Longrightarrow \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = a^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$A_S = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\right|\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta = 4a^2\pi.$$

Ejemplo 8.13 (Usando una parametrización de S).

Calcular el área del cilindro $x^2+y^2=a^2$ de altura h, es decir $0\leqslant z\leqslant h$.



Solución: Como ya vimos, la parametrización de esta superficie es

$$\mathbf{r}(\theta,z) = a\cos\theta\ \ \hat{\imath} + a\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}},\quad (\theta,z)\in D = [0,2\pi[\times[0,h].$$

Luego,

- $\mathbf{r}_\theta = (-a\,\text{sen}\,\theta,\ a\cos\theta,\ 0)$
- $\mathbf{r}_z = (0,\ 0,\ 1)$
- $\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = ||(a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0)|| = a.$

Entonces,

$$A_S = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|\right|\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} a\,dz\,d\theta = 2h\pi a.$$

8.4 Integral sobre una superfice.

Definición 8.4

Sea D un conjunto abierto y medible y S una superficie regular parametrizada por la función $\mathbf{r}(u,v)$, de clase C^1 en $\overline{D} = \text{interior}(D) \cup \partial D$, donde $(u,v) \in D$, de modo que $\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| > 0$ para todo $(u,v) \in D$, y $\mathbf{r}$ es una biyección entre D y S.

Sea $f(x,y,z)$ una función definida y acotada sobre $\overline{S}$. Se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| dA.$$

Si $S = S_1 \cup ... \cup S_m$ es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$\iint_S g(x,y,z) dS = \sum_i^m \iint_{S_i} g(x,y,z) dS$$

Integral de superficie con coordenadas rectangulares.

Caso $S:\ z = f(x,y)$

Si $S:\ z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$.

Se puede parametrizar S con con $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z(x,y)\,\hat{\mathbf{k}}$ con $(x,y) \in D$. Entonces

$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_D g(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dA.$$

Integral superficie—Proyectando sobre varios varios planos.

Asumimos que S es una superficie regular y que F es continuamente diferenciable e inyectiva sobre la proyección D (un conjunto con interior no vacío)

a) Proyectando sobre XY: Si $S:\ z = z(x,y)$ o $S:\ F(x,y,z) = 0$, con $(x,y) \in D_{xy}$

$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_{D_{xy}} g(x,y,z(x,y))\, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dA,$$

o, en “versión implícita”,

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} g(x,y,z(x,y))\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_z^2}}\,dA$$

b) Proyectando sobre XZ: Si $S:\ y = y(x,z)$ o $S:\ F(x,y,z)=0,$ con $(x,z)\in D_{xz}$

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xz}} g(x,y(x,z),z)\,\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dA$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xz}} g(x,y(x,z),z)\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_y^2}}\,dA$$

c) Proyectando sobre YZ: Si $S:\ x = x(y,z)$ o $S:\ F(x,y,z)=0,$ con $(y,z)\in D_{yz}$

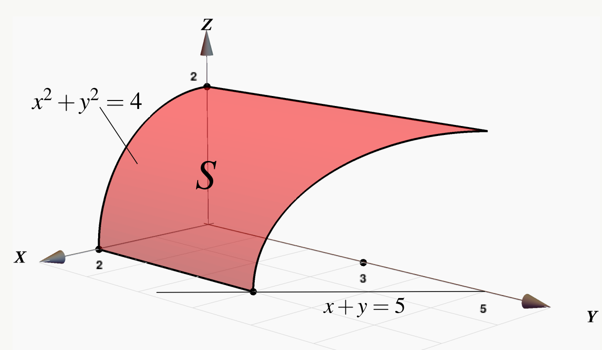
$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{yz}} g(x(y,z),y,z)\,\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dA$$

o, en "versión implícita",

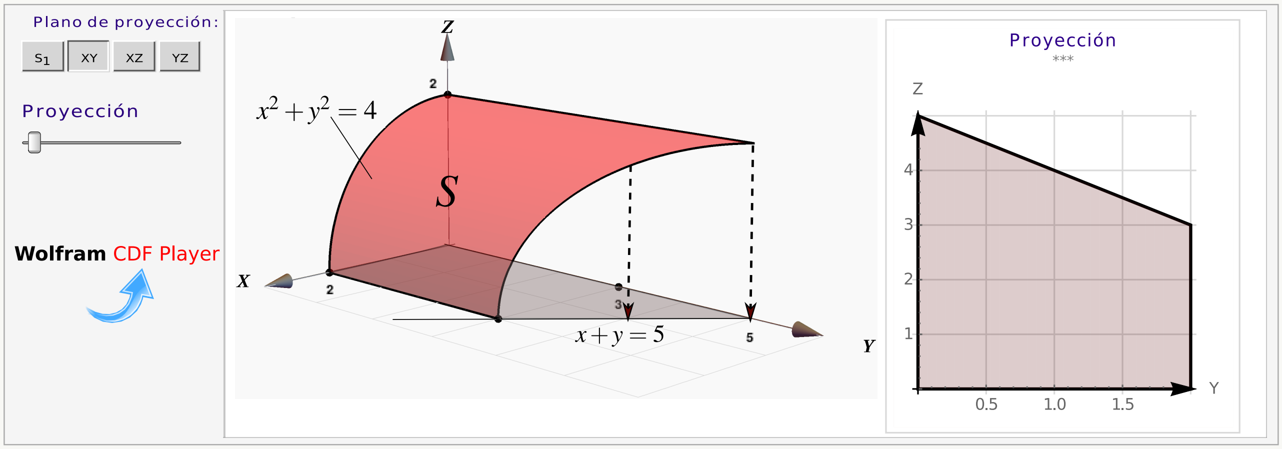
$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{yz}} g(x(y,z),y,z)\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_x^2}}\,dA$$

Ejemplo 8.14

La superficie $S:\ x^2+z^2=4$ está e el primer octante está limitada por el plano $x+y=5,$ tal y como se muestra en la figura de la derecha. Plantee las integrales necesarias para calcular el área de la superficie $S.$



Solución: Podemos proyectar sobre el plano XY. Como $S:\ x^2+z^2=4,$ podemos usar la fórmula para el área con $F(x,y,z)=x^2+z^2-4.$



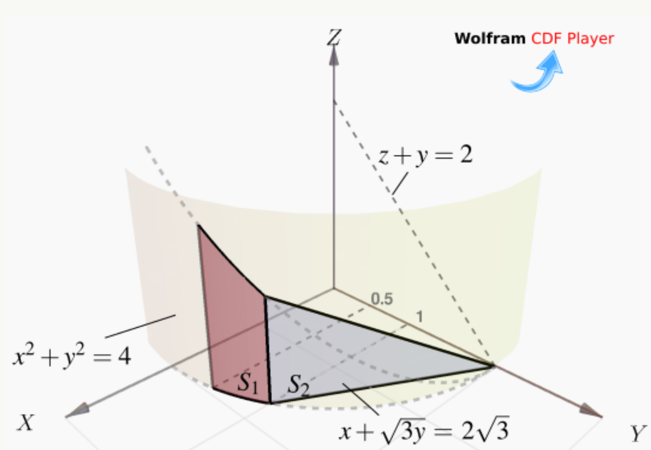
$$
\begin{aligned}
A_S &= \iint_S 1\cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{\mathbf{F}_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_z^2}}\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{4x^2+0^2+4z^2}{4z^2}}\,dA\\
&= \int_0^2\int_0^{5-x} \sqrt{\frac{16}{16-4x^2}}\,dy\,dx \quad \text{(Impropia)}\\
&= -4+\lim_{a\to 2^-} 10\,\text{arc sen}\left(\frac{a}{2}\right) = -4+5\pi
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.15 (Usando coordenadas rectangulares).

Calcular las integrales que dan el área de la superficie

$$S = S_1 + S_2$$

tal y como se muestra en la figura de la derecha.

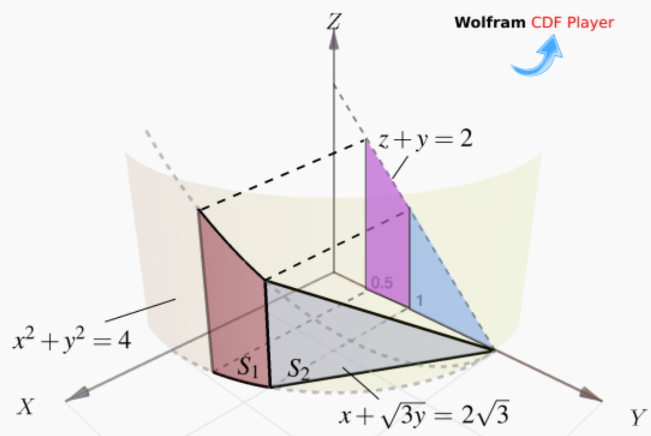


Solución: Podemos proyectar sobre el plano YZ. Tenemos

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_2}$$

y $S_1: F(x,y,z) = x^2+y^2-4=0.$

La superficie S_2 tiene ecuación $x = 2\sqrt{3}-\sqrt{3}y.$ Entonces,



$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_{D_1} \sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_x^2}}\,dA + \iint_{D_2} \sqrt{x_y^2+x_z^2+1}\,dA \\
&= \int_{1/2}^{1}\int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4x^2+4y^2+0^2}{4x^2}}\,dzdy + \int_1^2\int_0^{2-y}\sqrt{3+0+1}\,dzdy \\
&= \int_{1/2}^{1}\int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4(4-y^2)+4y^2+0^2}{4(4-y^2)}}\,dzdy + \int_1^2\int_0^{2-y} 2\,dzdy \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{4-2y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy + \int_1^2 (4-2y)dy \approx 1.674
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.16 (Usando coordenadas rectangulares).

Calcular el área de la superficie $S: y+x^2+z^2=4$ en el primer octante.

Solución: La proyección sobre XZ esta limitada por el círculo $x^2+z^2=4$ y la ecuación de la superficie es

$$S: y = 4-x^2-z^2.$$

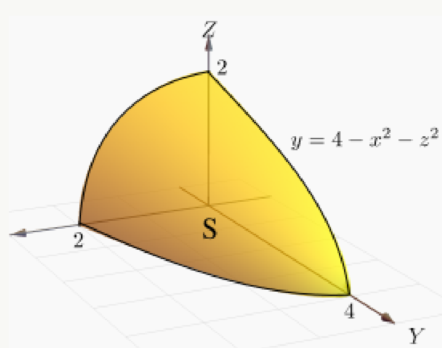


Figura 8.7: Superficie S

Primera manera: Proyectando sobre XZ (un cuarto de círculo) y usando coordenadas cilíndricas.

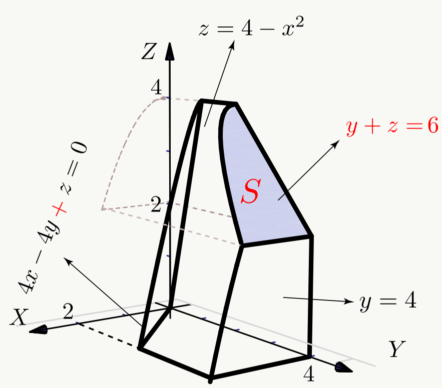
$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dA \\
&= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dA, \quad \text{cambio de variable: } \left\{\begin{array}{lcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& y \\ z &=& r\,\text{sen}\,\theta, \end{array}\right. \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\; r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{(1+4\,r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_0^2 d\theta \;=\; \frac{\pi}{24}\,(17\sqrt{17}-1) \approx 9.04423.
\end{aligned}$$

Segunda manera: Podemos usar la parametrización $\mathbf{r}(y,\theta) = \sqrt{4-y}\,\cos\theta\;\hat{\imath} + y\;\hat{\jmath} + \sqrt{4-y}\;\text{sen}\,\theta\;\hat{\mathbf{k}}$ con $y \in [0,4]$ y $\theta \in [0,\pi/2]$.

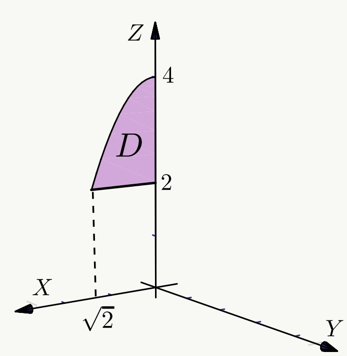
$$A_S = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|\right| dy\,d\theta \;=\; \int_0^{\pi/2}\int_0^4 \sqrt{17/4-y}\;dy\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{24}\,(17\sqrt{17}-1).$$

Ejemplo 8.17

Calcular el área de la superficie $S:\; y+z=6$ tal y como se ve en la figura **(a)**.



(a)



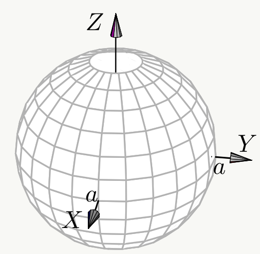
(b)

Solución: Como $S:\; y(x,z) = 6-z$, usamos la parametrización $\mathbf{r}(x,z) = x\;\hat{\imath} + (6-z)\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ sobre la región D definida por $x \in [0,\sqrt{2}]$ y $2 \leqslant z \leqslant 4-x^2$. Entonces $y_x = 0$ y $y_z = -1$. La proyección sobre D_{xz} se ve en la figura **(b)**.

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dA \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{4-x^2} \sqrt{2}\, dzdx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}(2-x^2)\, dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.18 (Parametrizando con coordenadas esféricas y con coordenadas rectangulares).

Calcular el área de la superficie de la esfera $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$.



Solución: Vamos a calcular de dos maneras, parametrizando con coordenadas esféricas y parametrizando con coordenadas rectangulares (más complicado).

Primera manera: Coordenadas esféricas. La esfera la podemos parametrizar con coordenadas esféricas,

$$S:\ \mathbf{r}(\theta,\varphi) = a\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta\ \hat{\imath} + \ a\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\jmath} + a\cos\varphi\ \hat{\mathbf{k}}, \quad \text{con} \quad (\theta,\varphi)\in D=[0,2\pi[\times[0,\pi]$$

- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-a\,\text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\varphi,\ a\cos\theta\ \text{sen}\,\varphi,\ 0)$
- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (a\cos\theta\ \cos\varphi,\ a\cos\varphi\ \text{sen}\,\theta,\ -a\,\text{sen}\,\varphi)$

$$\Longrightarrow \quad \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = a^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$A_S = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|\right| d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4a^2\pi.$$

Segunda manera: Coordenadas rectangulares. Usamos la parametrización $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\hat{\mathbf{k}}$. Solo vamos a calcular el área de la parte superior de la esfera. El área total la obtenemos multiplicando por dos.

- $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$
- $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$\Longrightarrow \quad A_S = 2\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA = 2\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a-x^2-y^2}}\, dA$$

Conviene hacer cambio de variable y usar coordenadas polares. Observe que las derivadas se indefinen en la frontera del círculo (si $r=a$). La integral se calcula desde 0 hasta $r=\epsilon$ con $0<\epsilon<a$. Al final

hacemos $\epsilon \longrightarrow a$.

$$\begin{aligned} A_S &= 2\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a-x^2-y^2}}\,dA \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta \quad \text{si} \quad ;\epsilon \longrightarrow a \quad \text{(integral impropia!)} \\ &= 2\int_0^{2\pi} a^2\,d\theta \;=\; 4a^2\pi \end{aligned}$$

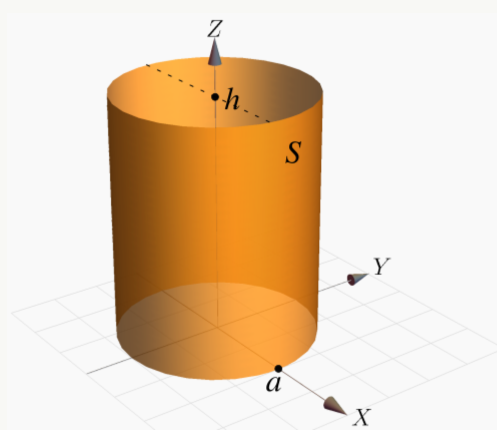
- Para calcular $\displaystyle\int_0^{\epsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr$ hacemos $u = a^2-r^2$, $du = -2r\,d\mathbf{r}$. Queda

$$-\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2-\epsilon^2} \frac{a}{\sqrt{u}}\,du \;=\; -\frac{a}{2}\frac{\sqrt{u}}{1/2}\Bigg|_{a^2}^{a^2-\epsilon^2} \;=\; a^2 - a\sqrt{a^2-\epsilon^2} \;\longrightarrow\; a^2 \quad \text{si} \quad \epsilon \longrightarrow a.$$

Nota: Observe que A_S también se pudo calcular con $A_S = \displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{\mathbf{F}_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,dA$. En este caso $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$. Puesto que esta fórmula solo se puede usar si la proyección es *uno a uno* con la superficie, solo podemos considerar la parte superior de la esfera. Pasando a cilíndricas, la integral queda igual al cálculo anterior.

Ejemplo 8.19 (Usando una parametrización de S).

Calcular el área del cilindro $x^2+y^2 = a^2$ de altura h, es decir $0 \leqslant z \leqslant h$.



Solución: Como ya vimos, la parametrización de esta superficie es

$\mathbf{r}(\theta,z) = a\cos\theta\;\hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,\theta\;\hat{\mathbf{j}} + z\;\hat{\mathbf{k}},\quad (\theta,z)\in D = [0,2\pi[\times[0,h]$.

Luego,

- $\mathbf{r}_\theta = (-a\,\text{sen}\,\theta,\ a\cos\theta,\ 0)$
- $\mathbf{r}_z = (0,\ 0,\ 1)$
- $\left|\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = ||(a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0)|| = a.$

Entonces,

$$A_S = \iint_D \left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| dz\,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{h} a\,dz\,d\theta \;=\; 2h\pi a.$$

8.5 Flujo través de una superficie S

Campos escalares y campos vectoriales.

Definición 8.5

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina *campo escalar* o función escalar. Una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina *campo vectorial*.

Ejemplo 8.20 (Representación gráfica).

Una manera de visualizar el campo gráficamente es anclar en cada punto (x, y) el respectivo vector $\mathbf{F}(x, y)$ (se traslada desde el origen). Pero también se puede anclar el vector de tal manera que el punto quede en el medio del vector (como si el vector fuera parte de una recta tangente). En general, la representación gráfica se hace anclando el vector de esta segunda manera y escalando el tamaño de los vectores de tal manera que unos no se sobrepongan sobre los otros, para tener una mejor vizualización de la dirección de "flujo" del campo vectorial. Así lo hace el software (como Wolfram Mathematica).

Por ejemplo, Consideremos el campo $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. En la figura **a.)** se dibujan dos vectores anclados en el punto, en la figura **b.)** se dibujan dos vectores anclados con el punto en el medio y en la figura **c.)** se hace la representación gráfica del campo escalando los vectores, tal y como se acostumbra.

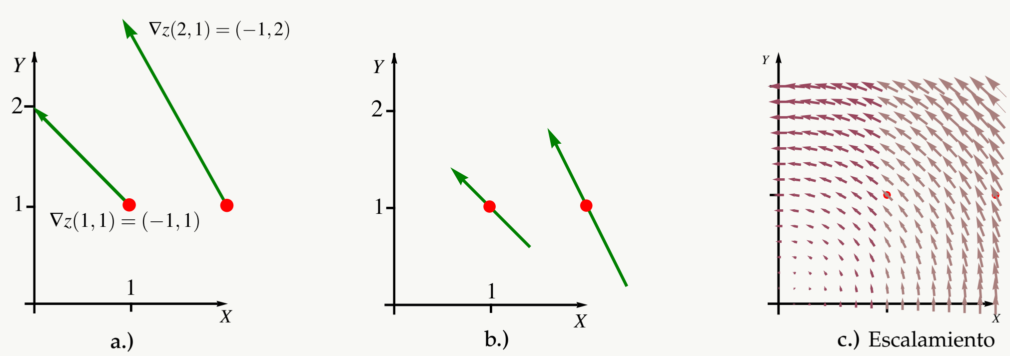


Figura 8.8: Campo $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$

Ejemplo 8.21

Representación gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}_1(x, y) = (2x,\ 2y)$ y del campo vectorial $\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, x)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Observe que si $z = x^2 + y^2$ entonces $\mathbf{F}_1(x, y) = \nabla z$, por eso los vectores son perpendiculares a esta circunferencia (la curva de nivel $z = 1$).

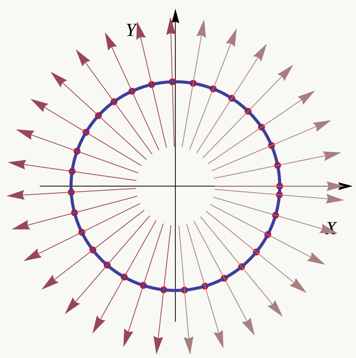


Figura 8.9: $\mathbf{F}_1$ sobre $x^2+y^2=1$.

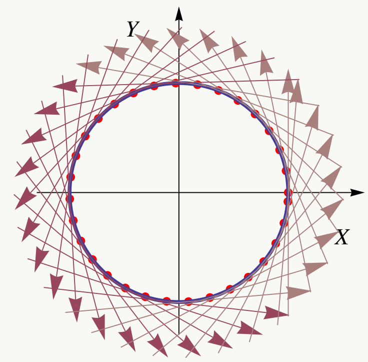
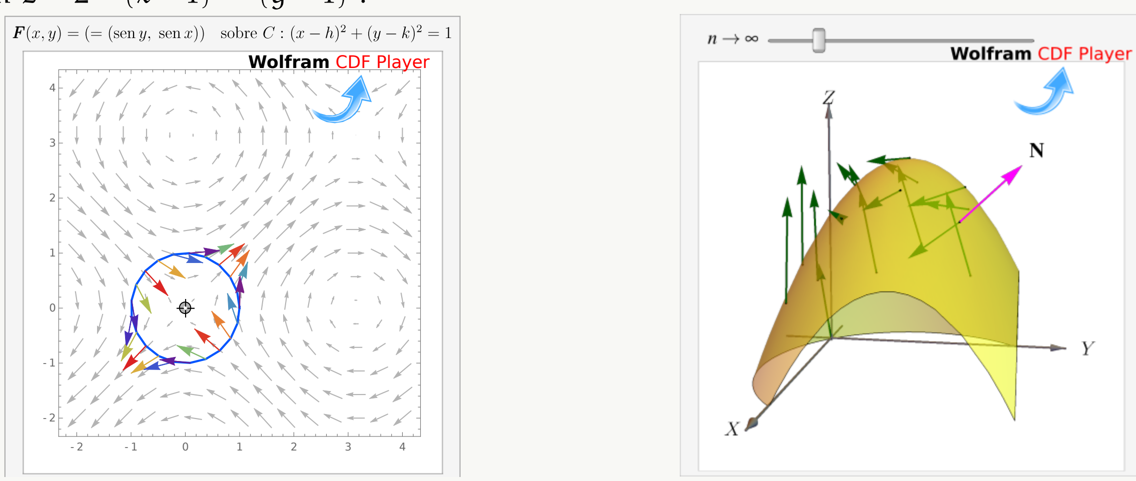


Figura 8.10: $\mathbf{F}_2$ sobre $x^2+y^2=1$.

Ejemplo 8.22

En la figura 8.11**a.)** se presenta la representación gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (\operatorname{sen} y,\ \operatorname{sen} x)$ y su paso sobre la curva C de ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = 1$. En al figura 8.11**b.)** se presenta la representación gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,y) = (-y, x, xy)$ y su paso sobre la superficie S de ecuación $z = 2-(x-1)^2-(y-1)^2$.



a.) **b.)**

Figura 8.11: Campos vectoriales y su paso por una curva y una superficie

Flujo a través de una superficie

Supongamos que tenemos una región plana S y queremos determinar la cantidad de "fluido" a través de S (se supone que el fluido puede atravesar la superficie sin ninguna resistencia). La cantidad de fluido es "densidad por el 'volumen' que ocupa". Si el flujo se mueve con velocidad constante $\mathbf{V}$, entonces durante un intervalo de tiempo Δt llenará un paralelepípedo de base S y "extensión" (arista) $\Delta t\,\mathbf{V}$. El volumen de este paralelepípedo es "área de la base" ΔS por "altura", la altura h se calcula con la norma de la proyección de $\mathbf{V}$ sobre el vector normal unitario a S, denotado $\mathbf{N}$. Como se sabe, $h = ||(\Delta t\mathbf{V}\cdot\mathbf{N})\,\mathbf{N}|| = \Delta t\mathbf{V}\cdot\mathbf{N}$, entonces

$$\text{Volumen del paralelepípedo sobre } \quad S \quad \text{es} \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}\,\Delta S\,\Delta t$$

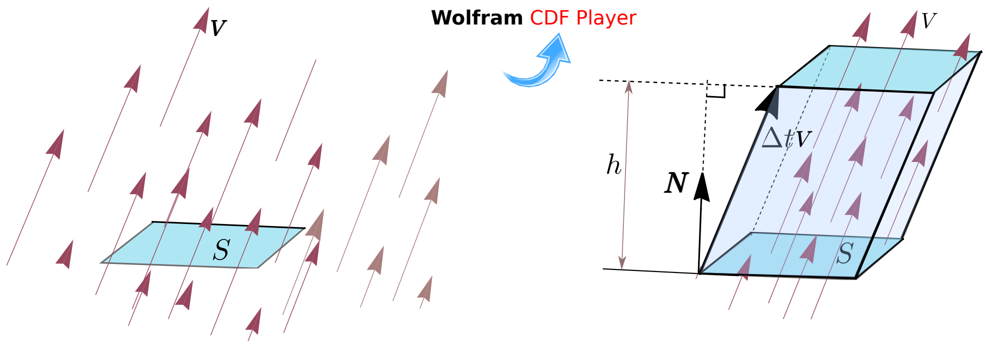


Figura 8.12: El fluido sobre S llena un paralelepípedo

Si el fluido tiene densidad ρ, la masa del fluido es $\Delta M = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\, \Delta S \Delta t$. La *densidad del fluido* es $\mathbf{F} = \rho\, \mathbf{V}$ y el *flujo total* es la masa de fluido que pasa a través de S en una unidad de tiempo: $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\Delta S$ kilogramos por segundo.

Ahora digamos que tenemos una corriente de fluido en el espacio con velocidad $\mathbf{V}(x,y,z)$ y densidad (masa por unidad de volumen) $\rho(x,y,z)$ en cada punto (x,y,z). El vector densidad de flujo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{V}(x,y,z)\rho(x,y,z)$$

tiene la misma dirección que la velocidad y nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x,y,z) en la dirección de $\mathbf{V}(x,y,z)$, por unidad de área y de tiempo.

Para sugerir una *definición razonable* de cómo medir la masa total de fluido que atraviesa una determinada superficie S en la unidad de tiempo, se considera la superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u,v)$ en una región rectangular D. Sea $\mathbf{N}$ el vector unitario normal que tiene la misma dirección que el producto vectorial fundamental,

$$\mathbf{N} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right|} \qquad (8.1)$$

Para medir la cantidad de fluido que pasa a través de S en la unidad de tiempo y en "la dirección" de $\mathbf{N}$, se descompone el rectángulo D en m subrectángulos $D_1, D_2, ..., D_m$. Sean $S_1, S_2, ..., S_m$ las correspondientes porciones de superficie en S. Llamamos ΔS_k a la $k-$ésima porción S_k. Si la densidad ρ y la velocidad $\mathbf{V}$ son constantes en S_k y S_k es suficientemente plana, el fluido que atraviesa S_k en la unidad de tiempo ocupa un paralelepípedo con base S_k y eje determinado por el vector velocidad $\mathbf{V}$.

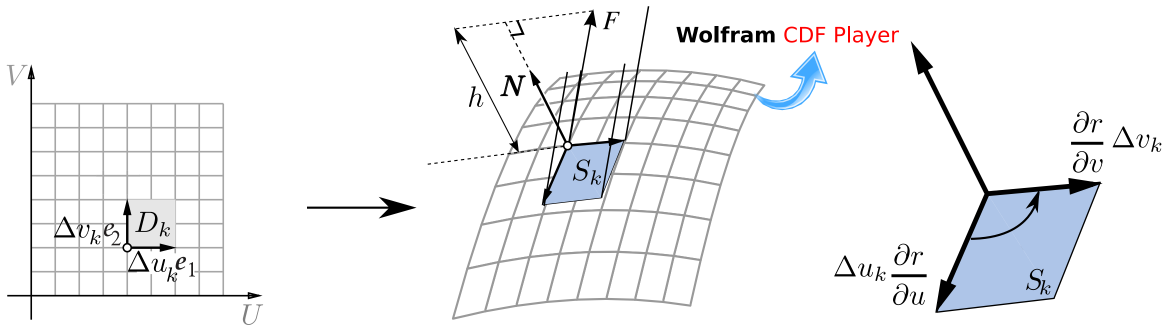


Figura 8.13: El fluido sobre S_k ocupa un paralelepípedo

Como el área de S_k es $\Delta S_k = \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| \Delta u_k \, \Delta v_k$, el fluido sobre S_k ocupa un paralelepípedo de volumen (base por altura),

$$\Delta S_k \, \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, \Delta S_k \approx \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| \Delta u_k \, \Delta v_k$$

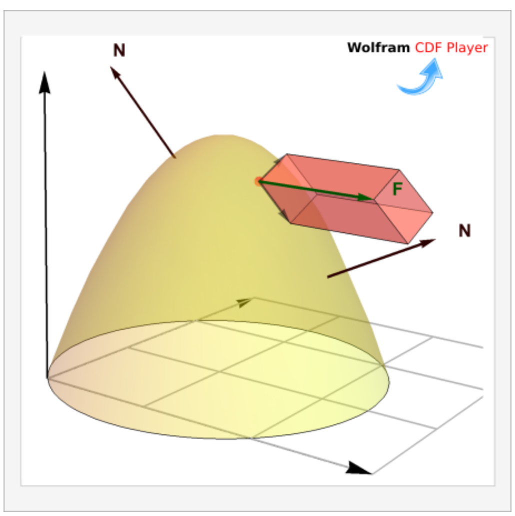


Figura 8.14: El fluido sobre S_k en "dirección" de $\mathbf{N}$

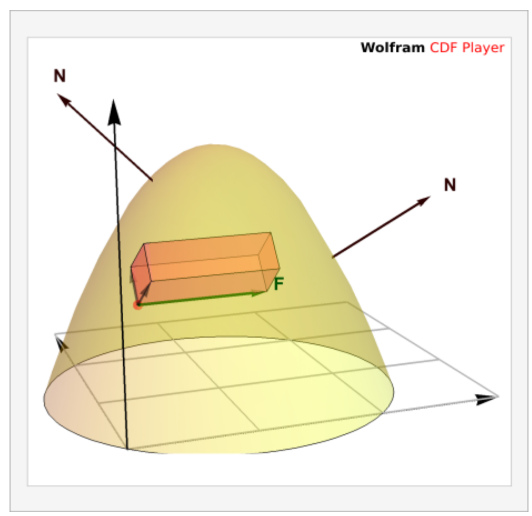


Figura 8.15: El fluido sobre S_k en contra la "dirección" de $\mathbf{N}$

8.6 Integral de flujo.

La discusión anterior sugiere que la suma $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, \Delta S_k$ puede ser una aproximación aceptable de la masa total de fluido que atraviesa S_k en la unidad de tiempo.

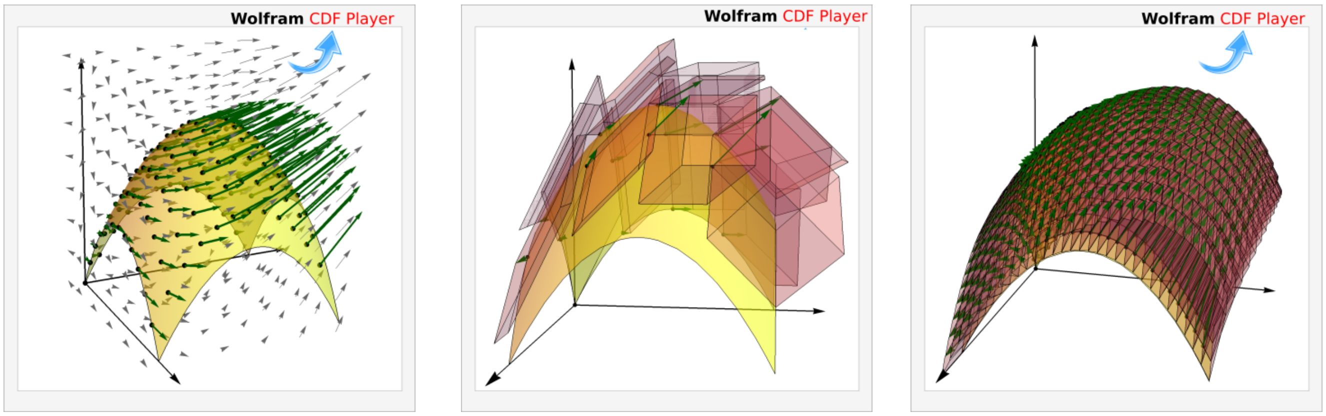


Figura 8.16: El flujo neto, por unidad de tiempo, es la suma de los flujos (volúmenes de los paralelepípedos)

Si $\mathbf{F}$ es la densidad de flujo de una corriente de fluido y $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a S definido por

$$\mathbf{N} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right|},$$

entonces la masa total de fluido (fluido neto) que pasa por S por unidad de tiempo "en la dirección" de $\mathbf{N}$ es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right|} \left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| dA = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dA$$

Orientación. Nuestra expresión para el flujo total lleva implícita la escongencia de uno de los dos vectores normales unitarios. Escoger un vector unitario para la región S es equivalente a "orientar" la región (como veremos má adelante). Esta escogencia de $\mathbf{N}$ decide el signo de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$. En lo que sigue, siempre vamos a escoger $\mathbf{N} = \dfrac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right|}$.

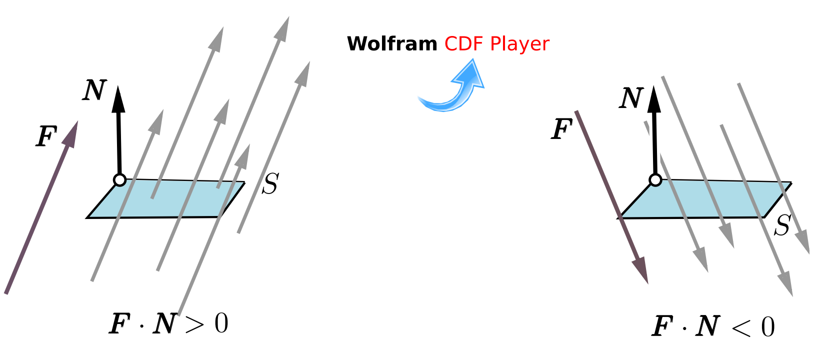


Figura 8.17: S se orienta con $\mathbf{N}$. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ calcula el flujo neto en "la dirección" del $\mathbf{N}$ escogido

En las aplicaciones es frecuente convenir en cuál $\mathbf{N}$ se escoge, para poder interpretar el resultado de $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ como "flujo neto" en la dirección escogida. La integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ calcula el flujo neto: El flujo que pasa en la "dirección" de el vector $\mathbf{N}$ escogido, "suma" y el flujo que pasa en la "dirección contraria", "resta". La suma de todo esto es el flujo neto.

Caso $z = f(x,y)$

Como consecuencia tenemos que si $S:\ z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$, se puede parametrizar S con $\mathbf{r}(x,y) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + f(x,y)\,\hat{\mathbf{k}}$ y entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot(-f_x,\,-f_y,1)\,dA$$

Integral de Flujo—Proyectando sobre varios varios planos.

a) Proyectando sobre XY: Si $S\ :\ z = z(x,y)$ o $S\ :\ G(x,y,z) = 0,$ con $(x,y)\in D_{xy}$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x,y,z(x,y))\cdot(-z_x,-z_y,1)\,dA,$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x,y,z(x,y))\cdot(G_x,\,G_y,\,G_z)\,\frac{1}{G_z}\,dA$$

b) Proyectando sobre XZ: Si $S\ :\ y = y(x,z)$ o $S\ :\ G(x,y,z) = 0,$ con $(x,z)\in D_{xz}$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{xz}} \mathbf{F}(x,y(x,z),z)\cdot(-y_x,1,-y_z)\,dA$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{xz}} \mathbf{F}(x,y(x,z),z)\cdot(G_x,\,G_y,\,G_z)\,\frac{1}{G_y}\,dA$$

c) Proyectando sobre YZ: Si $S\ :\ x = x(y,z)$ o $S\ :\ G(x,y,z) = 0,$ con $(y,z)\in D_{yz}$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{yz}} \mathbf{F}(x(y,z),y,z)\cdot(1,-x_y,-x_z)\,dA$$

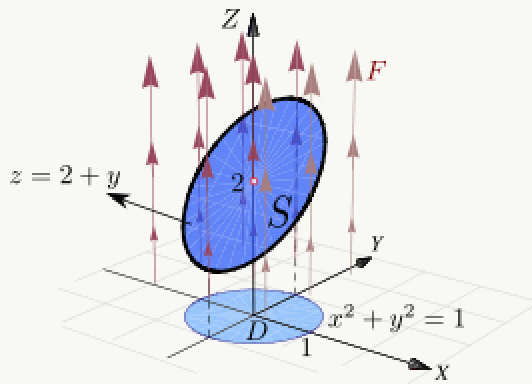
o, en "versión implícita",

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{D_{yz}} \mathbf{F}(x(y,z),y,z)\cdot(G_x,\,G_y,\,G_z)\,\frac{1}{G_x}\,dA$$

N La integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ puede diferir en el signo al cambiar el plano de proyección. Esto es así porque los vectores $(-z_x,-z_y,1)$, $(-y_x,1,-y_z)$ y $(1,-x_y,-x_z)$ son paralelos pero a veces son opuestos. En todo caso, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ se interpreta como el flujo neto en la dirección del vector $\mathbf{N}$ escogido.

Ejemplo 8.23

Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si $\mathbf{F}(x,y,z)=(z+1)\ \hat{\mathbf{k}}$ y S es la superficie $z=2+y$ con $x^2+y^2=1$.

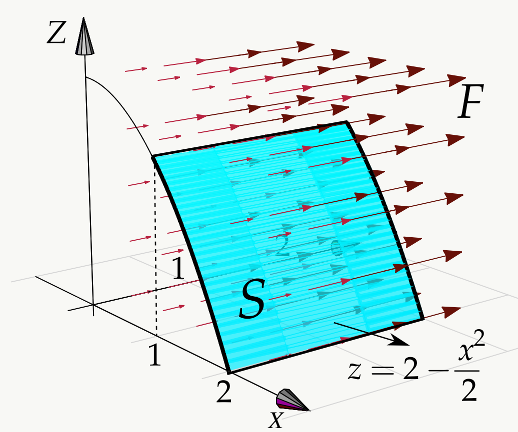


Solución: La superficie S tiene ecuación $z=2+y$. D_{xy} es el círculo de radio 1. Entonces,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_{D_{xy}} (0,0,z+1)\cdot(-z_x,\,-z_y,1)\,dA\\ &= \iint_{D_{xy}} (0,0,2+y+1)\cdot(0,-1,1)\,dA\\ &= \iint_{D_{xy}} y+3\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3+r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{6+\mathrm{sen}(\theta)}{4}\,d\theta = 3\pi\end{aligned}$$

Ejemplo 8.24

Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,y,0)$ y S el cilindro $z=2-\dfrac{x^2}{2}$, desde $y=0$ hasta $y=2$, como se ve en la figura.



Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$

Solución: Intuitivamente, el flujo *no pasa a través* de la superficie S, así que la integral de flujo debería ser 0.

En este caso solo se puede proyectar sobre YZ o XY. La proyección sobre YZ es un rectángulo. Sea $S:\ G(x,y,z)=0$ con $G(x,y,z)=z-2+\dfrac{x^2}{2}$. Entonces,

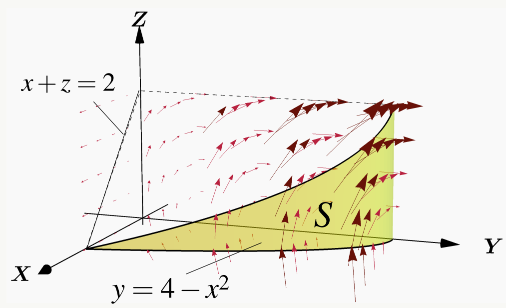
$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_{D_{yz}} \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla G}{G_x}\,dA\\ &= \int_0^2\int_0^{3/2}(0,y,0)\cdot(x,0,1)\frac{1}{x}\,dzdy \;=\; \int_0^2\int_0^{3/2} 0\,dzdy \;=\; 0\end{aligned}$$

Ejemplo 8.25

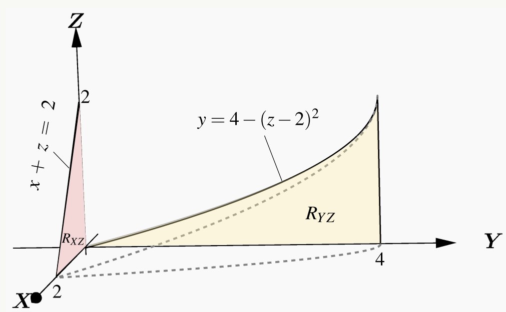
Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x, yz, xy)$$

y S el cilindro de ecuación $y = 4 - x^2$ limitado por el plano $x + z = 2$, tal y como se muestra en la figura de la derecha.



Solución: La superficie S tiene ecuación $G(x,y,z) = 0$ con $G(x,y,z) = y + x^2 + 4$. La proyección de S sobre el plano XZ es un triángulo.



$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_{D_{xz}} (x,yz,xy)\cdot\frac{\nabla G}{G_y}\,dA\\ &= \iint_{D_{xz}} (x,yz,xy)\cdot(2x,1,0)\,dA\\ &= \int_0^2\int_0^{2-x}\left(2x^2 + yz\right)\,dzdx\\ &= \int_0^2\int_0^{2-x}\left(2x^2 + (4-x^2)z\right)\,dzdx \;=\; \frac{112}{15}\end{aligned}$$

Si calculamos proyectando sobre YZ tenemos $S:\; x = \sqrt{4-y}$.

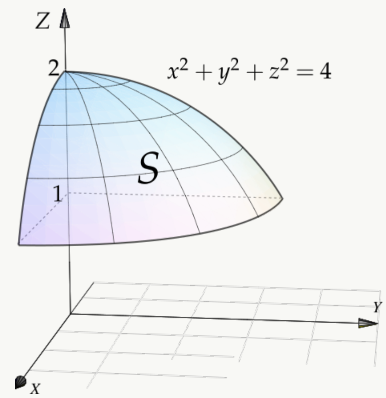
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_0^2\int_{4-(z-2)^2}^{4}\left(\sqrt{4-y} + \frac{yz}{2\sqrt{4-y}}\right)\,dy\,dz$$

Ejemplo 8.26

Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si

$$\mathbf{F}(x,y,z)=4xz\,\hat{\imath}\,+yz^3\,\hat{\jmath}+\,z^2\,\hat{\mathbf{k}}$$

y S es la superficie $z^2+y^2+x^2=4$ entre $z=1$ y $z=2$.

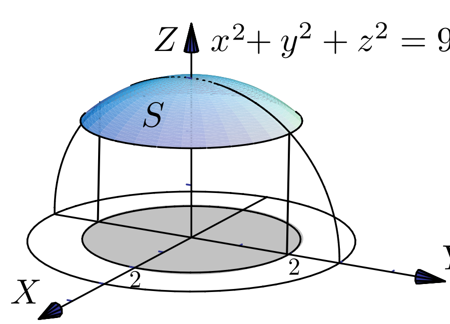


Solución: La superficie S tiene ecuación $G(x,y,z)=0$ con $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$. La proyección D_{xy} es el círculo $x^2+y^2=3$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_{D_{xy}} (4xz,yz^3,z^2)\cdot\frac{\nabla G}{G_z}\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} (4xz,yz^3,z^2)\cdot\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} \left(4x^2+y^2z^2+z^2\right)\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} \left(4x^2+y^2(4-x^2-y^2)+4-x^2-y^2\right)\,dA\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{3}}(8+6r^2-r^4+r^4\cos 2\theta)r\,dr\,d\theta\\
&= \frac{21\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

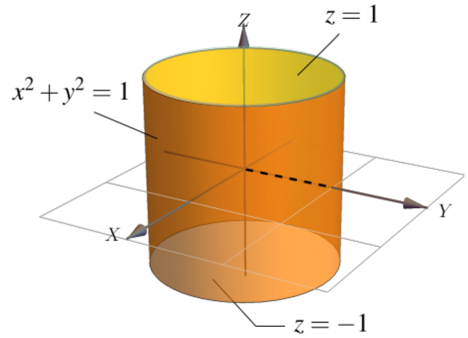
8.6.1 Calcule $I=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z)=y\;\hat{\imath}-x\;\hat{\jmath}+8z\;\hat{\mathbf{k}}$ y S la parte de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=9$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=4$, como se observa en la figura.



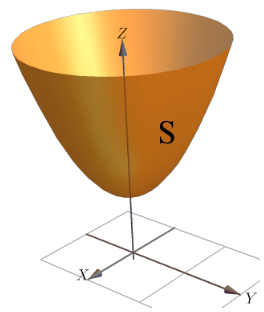
8.6.2 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\ \hat{\mathbf{i}} + x^2y\ \hat{\mathbf{j}} + y\ \hat{\mathbf{k}}$. Sea S es la frontera del sólido E limitado por

$$S_1 : \ x^2+y^2=1, \ S_2 : \ z=1 \ \text{y} \ S_3 : \ z=-1$$

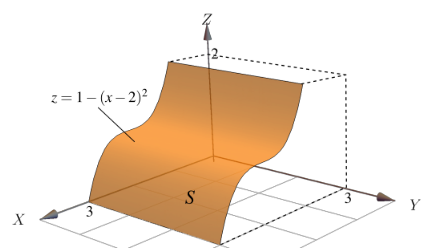
como se ve en la figura. Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ donde $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario exterior al sólido E.



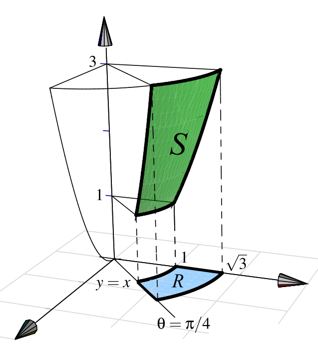
8.6.3 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \hat{\mathbf{i}} + y\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ y S es la superficie de ecuación $z = 1+x^2+y^2$, con $1 \leqslant z \leqslant 3$, tal y como se muestra en la figura. Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$.



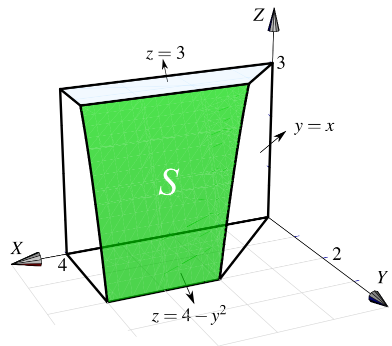
8.6.4 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,\ x+y,\ z)$. Calcule la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS}$, donde $\mathbf{S}$ es el trozo de cilindro de ecuación $z = 1-(x-2)^3$ que está limitado por los planos $y=0$, $y=3$, $z=1$ y $z=2$ tal y como se muestra en la figura.



8.6.5 Sea S la superficie de ecuación $z = x^2+y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z=1$, $z=3$, $y=x$ y el plano $x=0$, tal y como se muestra en la figura. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ \mathbf{dS}$ si $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z^2)$



8.6.6 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy,\ x,\ z+1)$ y sea $\mathbf{S}$ la porción de superficie de ecuación $z = 4 - y^2$ limitada por las superficies $z = 3,\ x = 4,\ z = 0$ y $x = y$, tal y como se muestra en la figura de la derecha. Calcular $\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ \mathbf{dS}$.



8.7 Superficies orientables.

Sea S una superficie y $\mathbf{r}(u,v)$ una parametrización de S. Los vectores normales a S, en (u,v), puede escogerse entre los dos vectores unitarios opuestos

$$\mathbf{N}(u,v) = \pm \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|\right|}$$

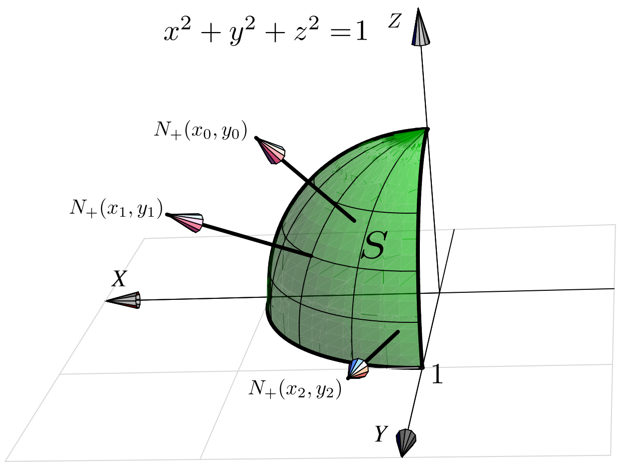
Caso $S:\ z = f(x,y)$

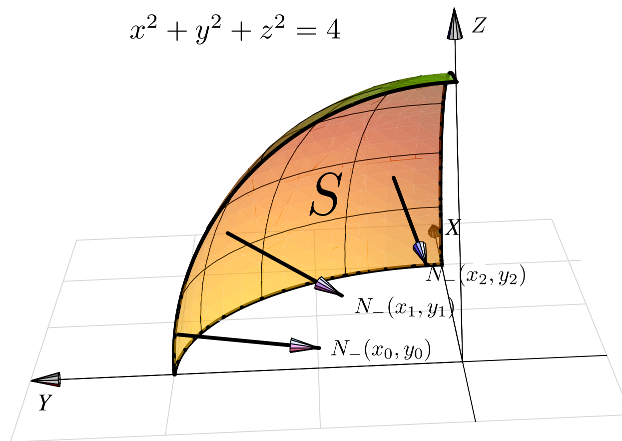
En el caso de que $S:\ z = f(x,y)$, si $\mathbf{r}(x,y) = x\ \hat{\mathbf{i}} + y\ \hat{\mathbf{j}} + f(x,y)\ \hat{\mathbf{k}}$ y entonces

$$\mathbf{N}_{+}(x,y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_{-}(x,y) = -\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

Si la superficie tiene dos "caras", el signo hace que cada vector normal esté en un lado u otro de la superficie. Este hecho se usa para "orientar" una superficie. Orientar una superficie significa escoger un signo para $\mathbf{N}$, una cara de la superficie es caracterizado $\mathbf{N}$ y la otra cara por $-\mathbf{N}$. Como $\mathbf{N}$ depende de la parametrización $\mathbf{r}$, es está la que al fin y al cabo orienta la superficie.

En el caso de una esfera, cada vector $\mathbf{N}_{+}(x,y)$ (con signo positivo) apunta al *exterior* y el cada vector $\mathbf{N}_{-}(x,y)$ apunta al interior



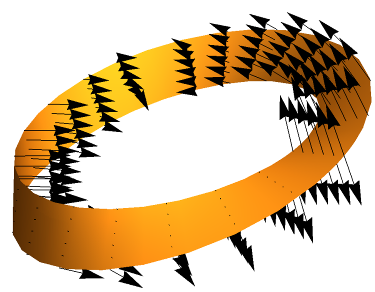


Definición 8.6

Si en cada punto (x, y, z) de la superficie regular S es posible asociar un vector unitario $\mathbf{N}(x, y, z)$ de tal manera que como función, $\mathbf{N}$ sea continua sobre toda la superficie S, entonces se dice que S es *orientable*.

Como decíamos, la definición supone que la superficie tiene dos lados. Uno de los lados queda determinado por la función continua $\mathbf{N}(x, y, z)$ sobre S y el otro lado por la normal de signo contrario.

Hay superficies de una sola cara, como la *banda de Möbius,* que no son orientables. En la figura que sigue tenemos una banda de Möbius. Note que la escogencia de $\mathbf{N}$ no orienta la banda, es decir, si escogemos uno de los $\mathbf{N}$, la presencia de estos vectores $\mathbf{N}$ "arriba" y "abajo" de la banda, muestran que hay una sola cara.



En las integrales de flujo que hemos calculado, hemos usado el vector normal unitario fundamental $\mathbf{N}_+$. No siempre este es el vector que se elige para los cálculos. Algunos teoremas requieren superficies orientadas con vectores normales unitarios hacia *el exterior.*

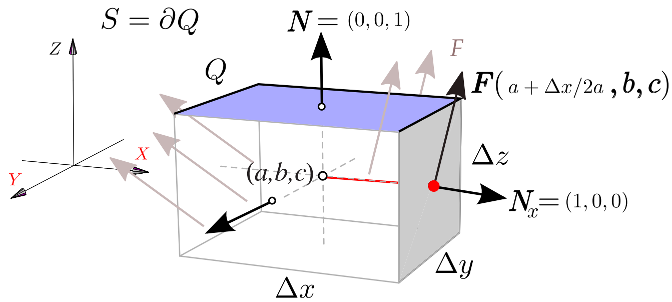
Convenio para superficies cerradas. En el caso de superficies cerradas, se conviene en que si $\mathbf{N}$ apunta hacia afuera, esta es *"la orientación positiva"* y si $\mathbf{N}$ apunta hacia adentro, esta es *"la orientación negativa".*

8.8 Teorema de la Divergencia.

Ahora nos interesa analizar el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$ continuamente diferenciable, a través de la frontera $S = \partial E$ de un sólido simple E, en la dirección del vector normal unitario *exterior* a $S = \partial E$. El flujo total se puede separar entre el flujo que entra y el flujo que sale, en cada cara del sólido el flujo podría ser distinto.

Divergencia significa "alejarse de". Intuitivamente, la "divergencia" es la densidad de flujo o flujo neto por unidad de volumen; es la cantidad de flujo que entra o sale en un punto y se calcula como el "cambio de flujo total", es decir, la suma del cambio de F en la dirección de X, el cambio de F en la dirección de Y y el cambio de F en la dirección de Z.

En un caso sencillo, se toma un cubo E centrado en (a,b,c) con aristas paralelas a los ejes. Calcular el flujo sobre $S=\partial E$ requiere calcular el flujo sobre cada una de las caras.



En la cara que contiene al punto $(a+\Delta x/2, b, c)$ (punto rojo en la figura anterior) la estimación del flujo total $\mathbf{F}t_{x+}$ sería

$$Ft_{x+} \approx \mathbf{F}(a+\Delta x/2, b, c)\cdot(1,0,0)\Delta y\Delta z = P(a+\Delta x/2, b, c)\Delta y\Delta z$$

En la cara (opuesta) que contiene al punto $(a-\Delta x/2, b, c)$ la estimación del flujo total $\mathbf{F}t_{x-}$ sería

$$Ft_{x-} \approx \mathbf{F}(a+\Delta x/2, b, c)\cdot(-1,0,0)\Delta y\Delta z = -P(a-\Delta x/2, b, c)\Delta y\Delta z$$

Luego el flujo total estimado en ambas caras sería,

$$Ft_{x+} + Ft_{x-} \quad\approx\quad [P(a+\Delta x/2, b, c) \;-\; P(a-\Delta x/2, b, c)]\Delta y\Delta z \;=\; \frac{\partial P}{\partial x}(a,b,c)\Delta x\Delta y\Delta z \quad \text{si} \quad \Delta x \approx 0$$

De manera similar, si ΔV es el volumen de la caja, el flujo total en las caras paralelas a los planos $y=0$ y $z=0$ sería aproximadamente $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(a,b,c)\Delta V$ y $\dfrac{\partial R}{\partial z}(a,b,c)\Delta V,$ respectivamente.

Así, el flujo total a través de $S=\partial E$ con vector normal exterior, sería aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(a,b,c)}\Delta V$$

Así, el flujo total que pasa a través de la frontera de una pequeña caja de centro (a,b,c) es un escalamiento del volumen, el factor de escalamiento $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$, evaluado en el centro, se llama *divergencia.*

Definición 8.7

La *divergencia* del campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ es el campo escalar

$$\mathbf{Div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Si $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable, $\mathbf{Div}\,\mathbf{F}$ es continuo y si E_i es una caja de diámetro pequeño, entonces

$$\mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,\Delta V \approx \iiint_{E_i} \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\;dV$$

Pero como $\mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,\Delta V$ es aproximadamente el flujo total a través de la frontera de E_i, en la dirección del vector normal exterior, entonces

$$\iiint_{E_i} \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\;dV \approx \iint_{\partial E_i} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

La generalización es llamada el *Teorema de la divergencia* o *Teorema de Gauss.*

Teorema 8.1 (Teorema de la Divergencia).

Sea E un sólido limitado por una superficie orientable S y sea $\mathbf{N}$ el vector normal unitario siempre exterior a E. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre E entonces

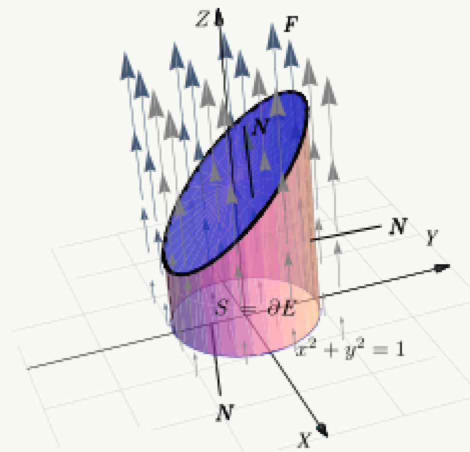
$$\iiint_{E} \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,dV \;=\; \iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

donde $\mathbf{Div}\,\mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$ si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

Como estamos asumiendo $\mathbf{N}$ exterior a E, entonces $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ calcula "el flujo neto que sale" de E. Si no usamos el teorema de la divergencia, tendríamos que ajustar en cada superficie el vector $\mathbf{N}$ para que quede exterior al sólido E.

Ejemplo 8.27

Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si $\mathbf{F}(x,y,z) = (z+1)\ \hat{\mathbf{k}},$ S es la frontera del sólido E limitado por el cilindro $x^2+y^2=1,$ el plano $z=2+y$ y $z=0,$ como se ve en la figura, y $\mathbf{N}$ es el vector unitario siempre exterior a $E.$



Solución: En vez de calcular la integral sobre cada una de las tres superficies que conforman la frontera de E (ver los ejemplos 8.6, 8.6 y 8.24), usamos el teorema de la divergencia.

- $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,z+1)$ y $\mathbf{Div}\,\mathbf{F} = 0+0+1 = 1.$

Proyectando sobre el plano XY y usando coordenadas cilíndricas, tenemos

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,dV\\ &= \iint_D \int_0^{2+y} 1\,dz\,dA \qquad \text{(la cantidad de flujo coincide con el volumen de } E!)\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2+r\,\text{sen}\,\theta} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta \;=\; 2\pi\end{aligned}$$

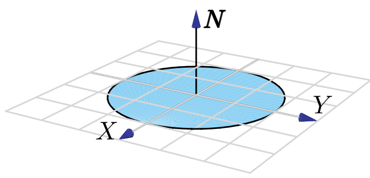
La importancia de que $\mathbf{N}$ se exterior a E. Se pide $\mathbf{N}$ se exterior a E por convenio, para medir el flujo en esa dirección. Si $\mathbf{N}$ no es siempre exterior a $E,$ el flujo neto, por supuesto, cambia.

Consideremos los ejemplos 8.6, 8.6 y 8.24. El cálculo de la integral de flujo se hizo siempre con

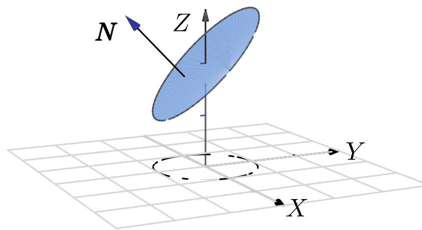
$$\mathbf{N}_1 = (-f_x,\ -f_y,\ 1)$$

pero este vector no siempre es exterior a $E.$ En el caso de la superficie S_a (figura siguiente), este vector *no es exterior* y

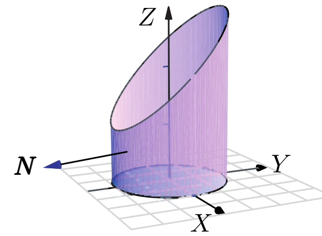
$$\iint_{S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \pi.$$



S_a



S_b



S_c

El resultado es

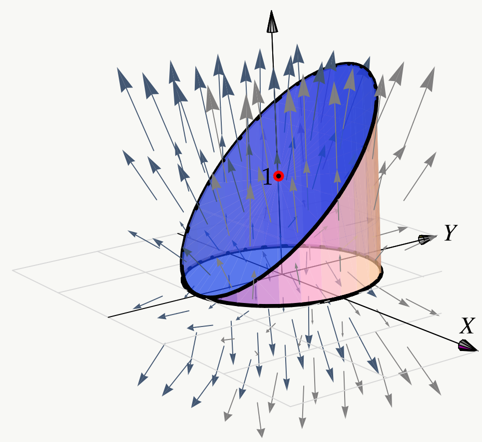
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{S_a} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{N})\,dS + \iint_{S_b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{S_c} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = -\pi + 3\pi + 0 \;=\; \iiint_E \mathbf{Div\,F}\;dV = 2\pi$$

Ejemplo 8.28

Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\cos x\;\;\hat{\imath} + \frac{1}{2}y^2\operatorname{sen} x\;\hat{\jmath} + z\;\hat{\mathbf{k}}$$

y S es la frontera del sólido E comprendido entre las superficies $z = 1+y$, $x^2+y^2 = 1$ y $z = 0$, y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E.



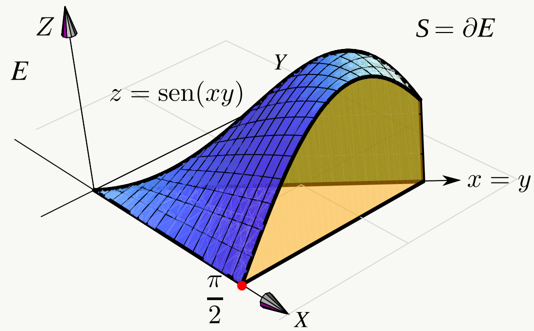
Solución: Podemos usar el teorema de la divergencia. La proyección del sólido sobre el plano XY es un círculo $x^2+y^2 = 1$.

- $\mathbf{Div\,F} = -y\operatorname{sen} x + y\operatorname{sen} x + 1 = 1.$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \mathbf{Div\,F}\;dV \\
&= \iint_D \int_0^{1+y} 1\,r\,dz\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+r\operatorname{sen}\theta} r\,dz\,dr\,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta \;=\; \pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.29

Sea E el sólido limitado por las superficies $S_a : z = \operatorname{sen}(xy)$, $S_b : x = \dfrac{\pi}{2}$ y $S_c : y = x$.



Sea S la frontera del sólido E y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario y exterior a E.

Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si $\mathbf{F} = \left(\dfrac{x^3}{3},\, z,\, yx\right)$.

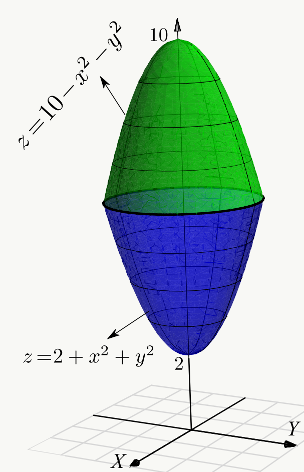
Solución: Podemos usar el teorema de la divergencia. La proyección del sólido sobre el plano XY es el triángulo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant y \leqslant x$.

- $\mathbf{Div}\,\mathbf{F} = x^2$

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,dV \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\int_0^{\operatorname{sen}(xy)} x^2\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} x^2\operatorname{sen}(xy)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - x\cos\left(x^2\right)\,dx = \frac{1}{8}\left(\pi^2 - 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.30

Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si $\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ y S es la frontera del sólido E comprendido entre las superficies $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2 + x^2 + y^2$, y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E.



Solución: Podemos usar el teorema de la divergencia.

- $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $\mathbf{Div}\,\mathbf{F} = 1+1+1 = 3$.

- La proyección del sólido sobre el plano xy es un círculo de radio 2 pues

$$z = 10 - x^2 - y^2 \;\cap\; z = 2 + x^2 + y^2 \implies 4 = x^2 + y^2.$$

Usando coordenadas cilíndricas obtenemos,

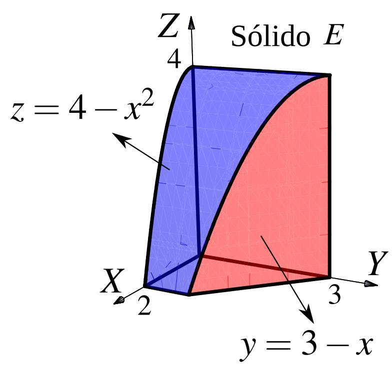
$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \mathbf{Div}\,\mathbf{F}\,dV\\ &= \iint_D \int_{2+x^2+y^2}^{10-x^2-y^2} 3\,dz\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2+r^2}^{10-r^2} 3r\,dz\,dr\,d\theta = 48\pi\end{aligned}$$

Ejercicios

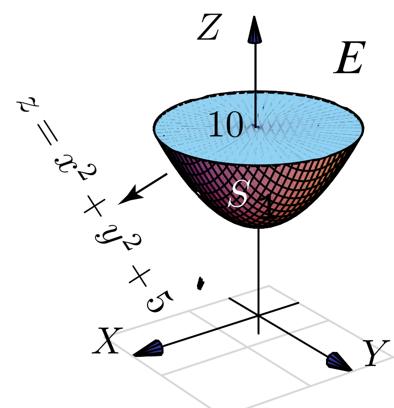
8.8.1 Consideremos el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ con

$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+\text{sen}(y))\ \hat{\mathbf{i}} + (\ln(xz) - y)\ \hat{\mathbf{j}} + (2z + \arctan(xy))\ \hat{\mathbf{k}}$

Calcule la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS}$ donde $\mathbf{S}$ es la frontera del sólido E, el cual se muestra en la figura a la derecha y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E.



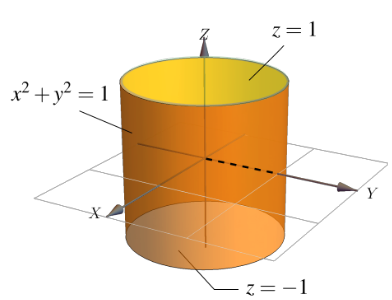
8.8.2 Use el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ donde S es la frontera del sólido E, limitado por la superficie $z = x^2 + y^2 + 5$ y el plano $z = 10$, tal y como se muestra en la figura a la derecha, $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\ \hat{\mathbf{i}} + y\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ y N es el vector normal unitario exterior a E.



8.8.3 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\ \hat{\mathbf{i}} + x^2y\ \hat{\mathbf{j}} + y\ \hat{\mathbf{k}}$ y sea S es la frontera del sólido E limitado por

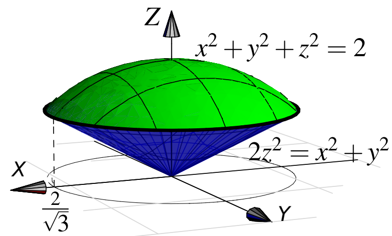
$S_1:\ x^2+y^2=1,\ S_2:\ z=1$ y $S_3:\ z=-1$

como se ve en la figura. Calcule $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ donde $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario exterior a E.



8.8.4 Sea S la frontera del sólido E limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y el cono $2z^2=y^2+x^2$, tal y como se muestra en la figura.

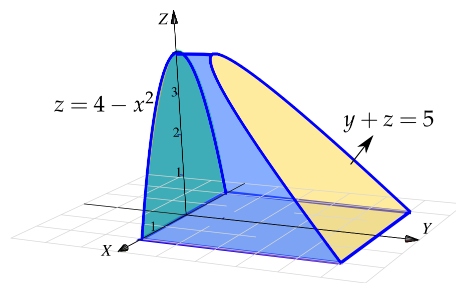
Si $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\ \hat{\imath} + x\arctan(xz)\ \hat{\jmath} + \dfrac{z^2}{2}\ \hat{\mathbf{k}}$, calcular $\displaystyle\iint_E \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ si $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E.



8.8.5 Sea E el sólido que se muestra en la figura a la derecha y sea S la frontera de E, es decir, $S=\partial E$. Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS$ donde

$$F(x,y,\ z) = (x^3+\operatorname{sen} z,\ x^2y+\cos z, \tan(x^2+y^2))$$

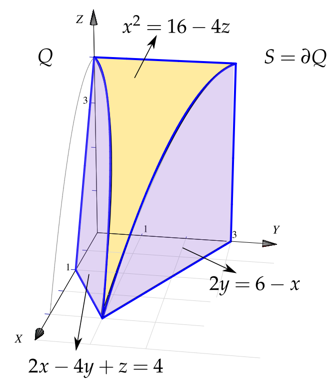
y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E.



8.8.6 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2+2)\ \hat{\mathbf{k}}$ y S la frontera del sólido Q, el cual se muestra a la derecha, y $\mathbf{N}$ es un vector normal exterior a E.

a.) Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia.

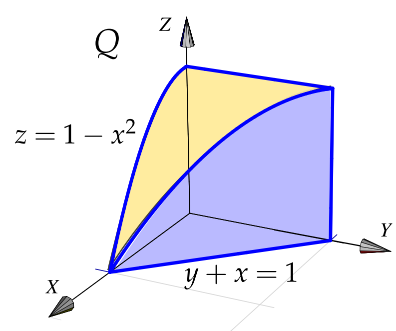
b.) Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ usando el teorema de la Divergencia.



8.8.7 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = 3y\ \hat{\imath} - xz\ \hat{\jmath} + yz\ \hat{\mathbf{k}}$, S es la frontera del sólido E, el cual se muestra a la derecha, y N es un vector normal exterior a E.

a.) Calcule $\displaystyle\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ sin usar el Teorema de la Divergencia.

b.) Calcule $\displaystyle\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ usando el teorema de la Divergencia.



8.9 Integral sobre una superfice.

La anterior discusión sobre inetegrales de flujo, nos lleva a una propuesta razonable de lo que puede ser una integral sobre una superficie. Si ponemos $f(x,y,z)=\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$, tenemos la siguiente definición,

Definición 8.8

Sea D un conjunto abierto y medible y S una superficie regular parametrizada por la función $\mathbf{r}(u,v)$, de clase C^1 en $\overline{D} = \text{interior}(D) \cup \partial D$, donde $(u,v) \in D$, de modo que $\left|\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| > 0$ para todo $(u,v) \in D$, y r es una biyección entre D y S.

Sea $f(x,y,z)$ una función definida y acotada sobre $\overline{S}$. Se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\left|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\right| dA.$$

Si $S = S_1 \cup ... \cup S_m$ es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \sum_i^m \iint_{S_i} g(x,y,z)dS$$

Integral de superficie con coordenadas rectangulares.

Caso $S:\ z = f(x,y)$

Si $S:\ z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$, se puede parametrizar S con con $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + f(x,y)\,\hat{\mathbf{k}}$ y entonces

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA.$$

Integral superficie–Proyectando sobre varios varios planos.

Asumimos que S es una superficie regular y que F es continuamente diferenciable e inyectiva sobre D.

a) Proyectando sobre XY: Si $S\ :\ z = z(x,y)$ o $S\ :\ F(x,y,z) = 0$, con $(x,y) \in D_{xy}$

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} g(x,y,z(x,y))\,\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA,$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} g(x,y,z(x,y))\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_z^2}}\,dA$$

b) Proyectando sobre XZ: Si $S\ :\ y = y(x,z)$ o $S\ :\ F(x,y,z) = 0$, con $(x,z) \in D_{xz}$

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xz}} g(x,y(x,z),z)\,\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dA$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xz}} g(x,y(x,z),z)\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_y^2}}\,dA$$

c) **Proyectando sobre** YZ: Si $S\,:\,x = x(y,z)$ o $S\,:\,F(x,y,z)=0$, con $(y,z)\in D_{yz}$

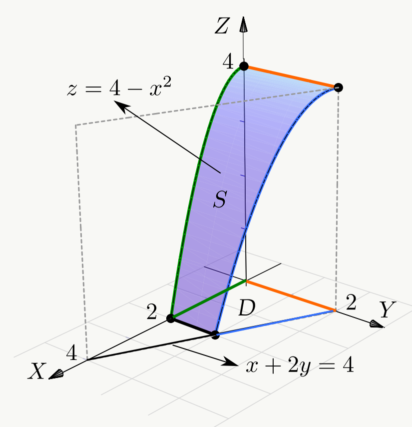
$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{yz}} g(x(y,z),y,z)\,\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dA$$

o, en "versión implícita",

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{yz}} g(x(y,z),y,z)\,\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_x^2}}\,dA$$

Ejemplo 8.31

Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \frac{z+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dS$ con S la porción de la superficie $z = 4-x^2$ limitada por el plano $x+2y=4$, como se muestra en la figura



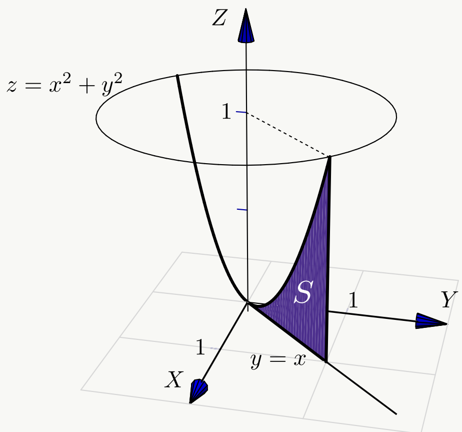
Solución: En coordenadas rectangulares,

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+4x^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{z+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dS &= \iint_D \frac{4-x^2+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\sqrt{1+4x^2}\,dA\\ &= \int_0^2\int_0^{2-x/2} 4\,dy\,dx \;=\; 12.\end{aligned}$$

Ejemplo 8.32 (Integrando sobre YZ**).**

Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S 2xyz\,dS$ con S la parte del plano $y=x$ limitado por $z=x^2+y^2$, como se muestra en la figura.



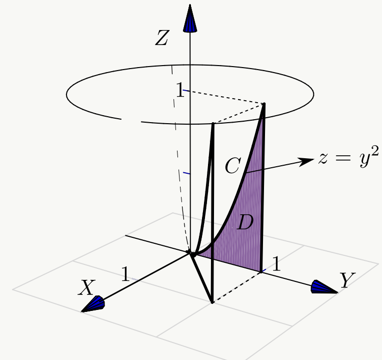


Figura 8.18: Superficie S

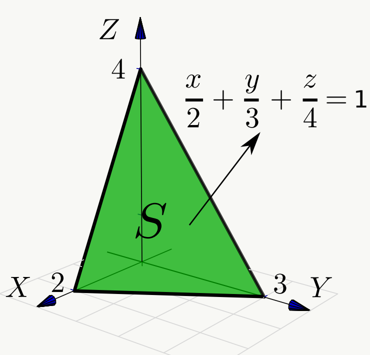
Solución: La superficie S solo se puede proyectar en los planos XZ o en YZ. La curva C de la proyección en el plano YZ se obtiene como la intersección del plano y el paraboloide: $C: \ y = x \ \cap \ z = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad C: \ z = 2y^2$.

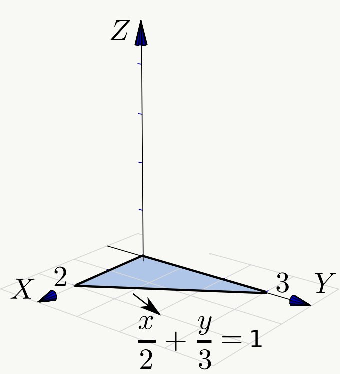
Como proyectamos en YZ, entonces $S: \ x = y$ y $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_S 2xyz \, dS &= \iint_D 2xyz\, \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2y^2} 2y^2 z\, \sqrt{2}\, dz\, dy \\
&= 4\sqrt{2}/7
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.33

Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S z + 2x + \frac{4}{3}y \ dS$ con S la parte del plano $\displaystyle\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ situada en el primer octante.





Solución: Como $S: z = 4 - 2x - \dfrac{4}{3}y$ entonces $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{61}/3$. Las variables de integración son x e y así que debemos sustituir z en el integrando,

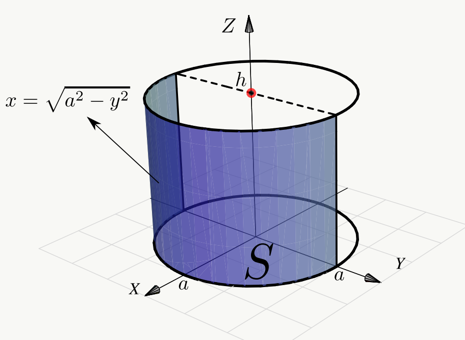
$$\begin{aligned}
\iint_S z + 2x + 4/3y\ dS &= \iint_D (z + 2x + 4/3y)\ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dA \\
&= \int_0^2\int_0^{3-3x/2} \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y\ + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2\int_0^{3-3x/2} 4\ \frac{\sqrt{61}}{3}\,dy\,dx\ = 4\sqrt{61}.
\end{aligned}$$

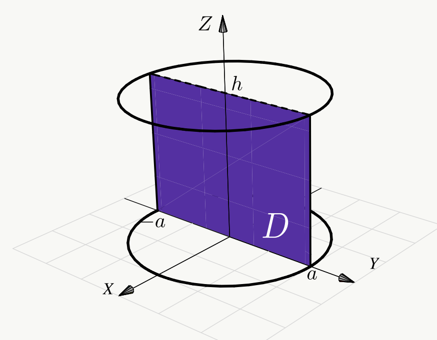
Ejemplo 8.34

Sea $a > 0$ y sea $I = \displaystyle\iint_S \frac{1}{a^2 + z^2}\,dS$ con S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = h > 0$.

a.) Calcular I usando coordenadas rectangulares, $S: x = \sqrt{a^2 - y^2}$.

b.) Calcular I usando la parametrización $S_1: \mathbf{r}(\theta, z) = a\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}},\ \ (\theta, z) \in D = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, h]$.





Solución:

a.) Proyectando sobre YZ, $S: x = \sqrt{a^2 - y^2}$. En este caso, $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{1}{a^2+z^2}\,dS &= \iint_D \frac{1}{a^2+z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\,dz\\ &= \int_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\int_0^h \frac{1}{a^2+z^2}\,dz \qquad \text{(la primera integral es impropia),}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} a\arcsen\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon}\cdot\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_0^h = \left(a\,\frac{\pi}{2}+a\,\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{h}{a}\right).\end{aligned}$$

b.) En este caso, esta es la manera fácil. Usando la parametrización uno-uno

$$\mathbf{r}(\theta,z) = a\cos\theta\ \hat{\imath} + a\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}},\quad (\theta,z)\in\ D=[-\pi/2,\pi/2]\times[0,h].$$

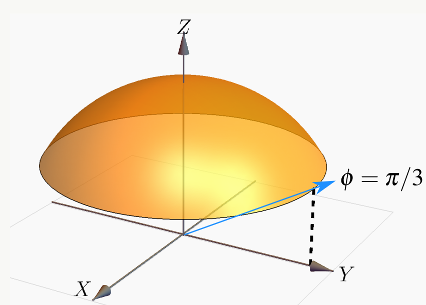
- $r_\theta = (-a\,\text{sen}\,\theta,\ a\cos\theta,\ 0)$
- $r_z = (0,\ 0,\ 1)$
- $\left|\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = ||(a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0)|| = a.$

$$\iint_S \frac{1}{a^2+z^2}\,dS = \iint_D \frac{1}{a^2+z^2}\left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\right|\,dz\,d\theta = \int_{-pi/2}^{\pi/2}\int_0^h \frac{a}{a^2+z^2}\,dz\,d\theta = \pi\arctan\left(\frac{h}{a}\right).$$

Note que usando esta parametrización no tenemos problemas de singularidades.

Ejemplo 8.35 (Usando coordenadas esféricas).

Considere la integral de superficie $I=\displaystyle\iint_S \ln z\,dS$ con S el casquete de esfera $x^2+y^2+z^2=1,\ \frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1.$



a.) Calcular I usando coordenadas rectangulares

b.) Calcular I usando la parametrización (coordenadas esféricas)

$$S:\ \mathbf{r}(\theta,\varphi) = (\text{sen}\,\varphi\ \cos\theta,\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \cos\varphi)\,,\quad \text{con}\quad (\theta,\varphi)\in\ [0,2\pi[\times[0,\pi/3].$$

c.) Calcular I usando la parametrización

$$S:\mathbf{r}(z,\theta) = \sqrt{1-z^2}\cos t\ \hat{\imath} + \sqrt{1-z^2}\,\text{sen}\,t\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}\quad \text{con}\quad \frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1\quad \text{y}\quad \theta\in\ [0,2\pi[.$$

Solución:

a.) En coordenadas rectangulares $S:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, con $z\in[1/2,1]$. Entonces la proyección sobre el plano XY está entre el origen y la circunferencia $x^2+y^2=3/4$. Las variables de integración son x e y así que debemos sustituir z en el integrando,

$$\begin{aligned}
\iint_S \ln z\, dS &= \iint_D \ln(z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA\\
&= \iint_D \log\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\, dA, \qquad \text{(pasamos a polares),}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3/4}} \log(\sqrt{1-r^2})\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\, d\theta \qquad \text{(usamos la sustitución } u^2=1-r^2\text{),}\\
&= \pi\,(\ln 2-1) \qquad \text{(la integral es impropia, se calcula con } u\to 0\text{).}
\end{aligned}$$

b.) Vamos a usar una parametrización del casquete de la esfera basada en coordenadas esféricas. Observe que los parámetros son θ y φ. En este caso, $\rho=1$.

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta\\ y = \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta\\ z = \cos\varphi\end{cases} \implies \mathbf{r}(\theta,\varphi)=(\operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi),\ (\theta,\varphi)\in[0,2\pi[\times[0,\pi/3].$$

El valor $\varphi=\pi/3$ se obtiene de resolver $z=1\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}$. Luego,

- $r_\theta=(-\sin\theta\,\sin\varphi,\cos\theta\,\sin\varphi,0)$
- $r_\varphi=(\cos\theta\,\cos\varphi,\cos\varphi\,\sin\theta,-\sin\varphi)$
- $\left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\right|=\operatorname{sen}\varphi>0\quad\text{en}\quad[0,\pi/3],$

Las variables de integración son φ y θ, así que debemos sustituir z en el integrando. Para resolver la integral se hace la sustitución $u=\cos\varphi$,

$$\iint_S \ln z\, dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\ln(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi d\theta=-\int_0^{2\pi}\int_1^{\cos\pi/3}\ln(u)\, du\, d\theta=\pi\,(\ln 2-1)$$

c.) Como $S: x^2+y^2=1-z^2$, con $\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1$; podemos parametrizar el casquete como

$$\mathbf{r}(z,\theta)=\sqrt{1-z^2}\cos t\ \hat{\imath}+\sqrt{1-z^2}\,\text{sen}\,t\ \hat{\jmath}+z\ \hat{\mathbf{k}}\quad\text{con}\quad \frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1\quad\text{y}\quad \theta\in[0,2\pi[.$$

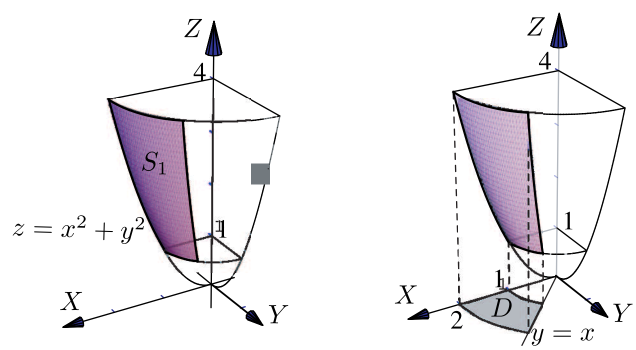
- $\left|\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right|\right|=\left|\left|(-\sqrt{1-z^2}\cos t,\ -\sqrt{1-z^2}\,\text{sen}\,t,\ -z)\right|\right|=1$

En este caso las variables de integración son z y θ así que no hay nada que sustituir en la integral,

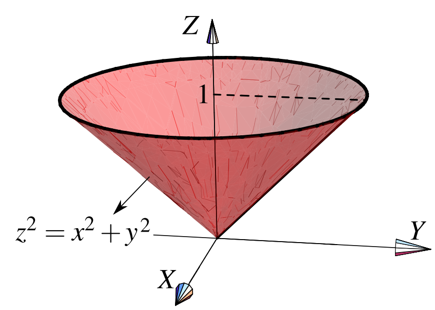
$$\iint_S \ln z\, dS\ =\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1 \ln(z)\cdot 1\,dz\,d\theta\ =\ =\pi\,(\ln 2\,-\,1)$$

Ejercicios

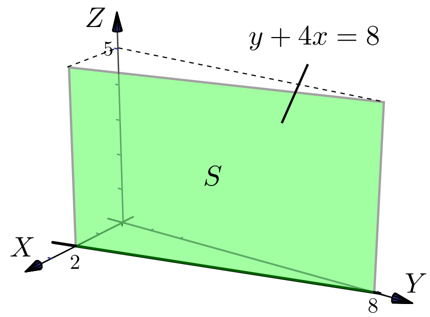
8.9.1 Determine el área de la superficie S de ecuación $z=x^2+y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z=4$, $z=1$, $y=x$ y el plano $y=0$, tal y como se muestra en la figura



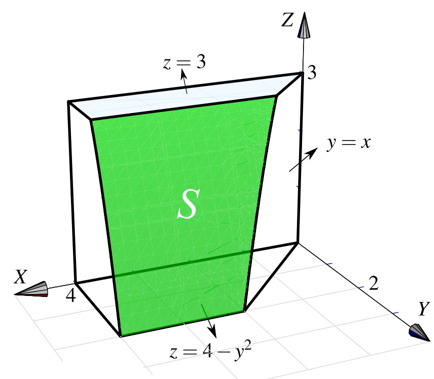
8.9.2 Sea S la superficie del cono $z^2=x^2+y^2$ comprendida entre $z=0$ y $z=1$. Usando integral de superficie, calcular el área de la superficie S.



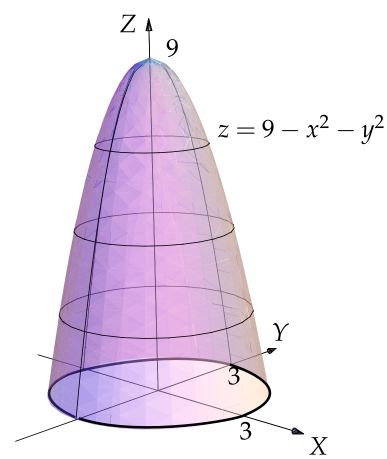
8.9.3 Calcule $\iint_S x^2 - 2y + z\, dS$ donde S es la superficie de la figura.



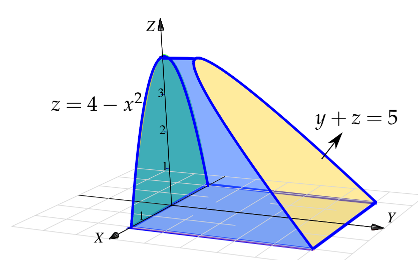
8.9.4 Sea $\mathbf{S}$ la porción de superficie de ecuación $z = 4 - y^2$ limitada por las superficies $z = 3$, $x = 4$, $z = 0$ y $x = y$, tal y como se muestra en la figura de la derecha. Calcular $\iint_S (2xy + z + 1)\, dS$



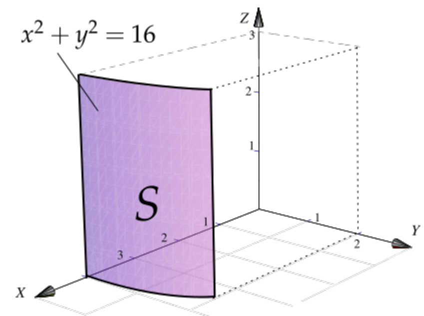
8.9.5 Calcule la integral de superficie $\iint_s (x^2 + y^2 + z)\, dS$ donde S es la superficie de ecuación $z = 9 - x^2 - y^2$, limitada por el plano $z = 0$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



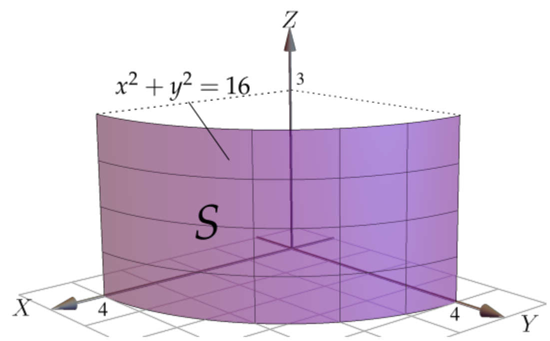
8.9.6 Sea E el sólido que se muestra en la figura a la derecha y sea S la frontera de E, es decir, $S = \partial E$. Calcule $\iint_S xy(z + 1)\, dS$



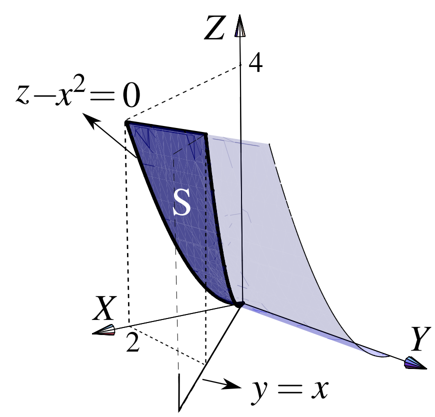
8.9.7 Calcule el área de la superficie S tal y como se muestra en la figura a la derecha.



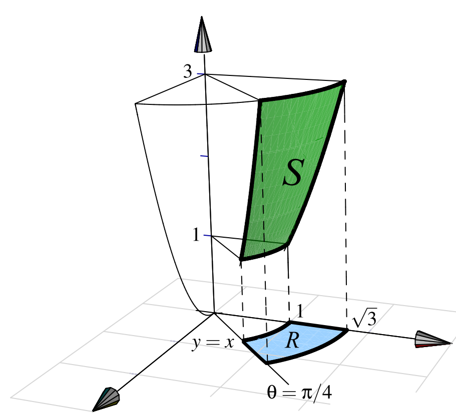
8.9.8 Calcule el área de la superficie S tal y como se muestra en la figura a la derecha.



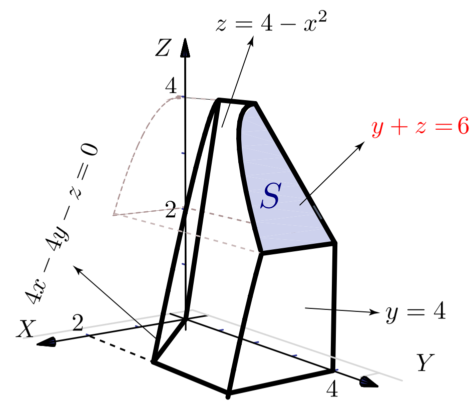
8.9.9 La superficie S es el trozo del cilindro $z-x^2=0$ que está limitado por los planos $y=0$, $y=x$ y $z=4$, en el primer octante. La Superficie S se muestra en la figura que sigue. Calcule el área de S.

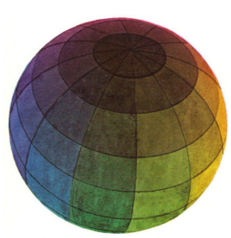


8.9.10 Determine el área de la superficie S de ecuación $z=x^2+y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z=1$, $z=3$, $y=x$ y el plano $x=0$, tal y como se muestra en la figura.



8.9.11 Calcule el área de la superficie S tal y como se muestra en la figura a la derecha.





Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

9 — Integral de Línea.

En el capítulo 4 estudiamos las curvas y sus parametrizaciones. Recordemos que una *trayectoria* C en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Si la función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en $[a,b]$, entonces a la representación gráfica de $\mathbf{r}$ se le llama *curva* y decimos que esta curva esta descrita paramétricamente por $\mathbf{r}(t)$. Escribimos

$$C:\ \mathbf{r}(t) \quad \text{con} \quad t\in[a,b]$$

• Si $\mathbf{r}(a)=\mathbf{r}(b)$, la curva se dice *cerrada*.

• Si $\mathbf{r}$ es inyectiva en $[a,b]$, la curva se dice *simple.* Si $\mathbf{r}$ es cerrada y es inyectiva en $]a,b]$, la curva se dice *cerrada simple.* Las curvas cerradas simples se llaman curvas de Jordan.

• A $\mathbf{r}$ le llamamos una *parametrización* de C.

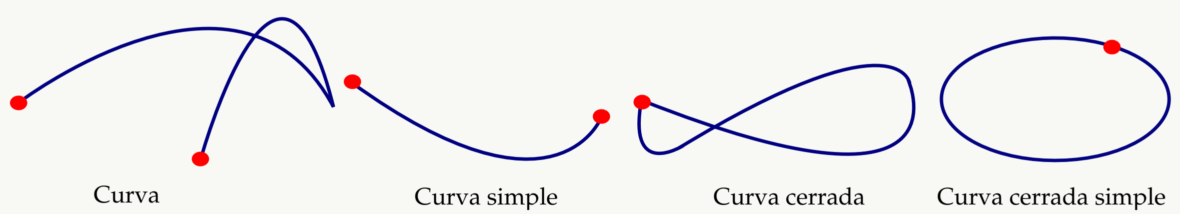


Figura 9.1: Curvas

Curvas regulares. Decimos que la curva C es *regular o 'suave'* en $[a,b]$ si $\mathbf{r}'(t)$ es continua en $[a,b]$ y $\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$ para todo $t\in[a,b]$ (es decir las componentes de $\mathbf{r}$ no se anulan simultáneamente). También decimos que una curva C es *regular a trozos* en $[a,b]$ si es regular en cada subintervalo de alguna partición finita de $[a,b]$.

Ejemplo 9.1 (Curvas Orientadas).

Consideremos las curvas C_1 y C_2

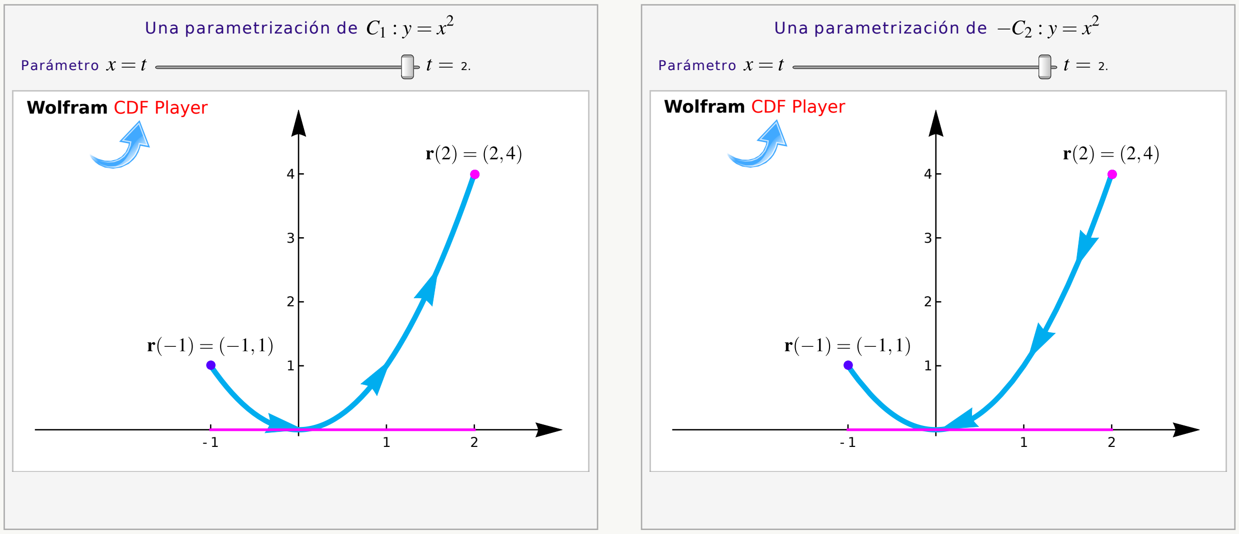


Figura 9.2: Curvas C_1 y C_2.

Ambas curvas tienen ecuación, en coordenadas rectangulares, $y = x^2$ con $x \in [-1,2]$. Pero C_1 inicia en $A = (-1,1)$ y termina en $B = (2,4)$; mientras que C_2 inicia en B y termina en A.

Para parametrizar cada curva debemos tomar en cuenta su *orientación.*

- Una parametrización de C_1 es (tomando a $x = t$ como parámetro),

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t)) = (\underbrace{t}_{x(t)},\, \underbrace{t^2}_{y(t)}) \quad \text{o también} \quad \mathbf{r}(t) = \underbrace{t}_{x(t)}\,\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{t^2}_{y(t)}\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{con} \quad t \in [-1,2].$$

  Observe que

$$\mathbf{r}(-1) \;=\; (x(-1),\, y(-1)) \;=\; (-1,\, (-1)^2) \;=\; A \;\text{ y }\; \mathbf{r}(2) \;=\; (2,\, 2^2) = B.$$

- C_2 solo difiere de C_1 en la orientación. Podemos usar la misma parametrización de C_1 pero usando la notación $-C_2$ para indicar que la orientación está invertida.

$$-C_2 : \; \mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t)) = (t,\, t^2),\; t \in [-1,2].$$

(Cambio de orientación).

si $\mathbf{r}(t)$ es una parametrización con $t \in [a,b]$, entonces una parametrización que invierte la orientación es $\mathbf{r_1}(t) \;=\; \mathbf{r}(a+b-t)$ con $t \in [a,b]$

(Curvas $r = g(\theta)$).

Si la curva C tiene ecuación $r = g(\theta)$ entonces una parametrización es $\mathbf{r}(t) = (g(t)\cos t,\; g(t)\,\mathrm{sen}\, t)$.

(Parametrizar una elipse contra-reloj).

Una elipse de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se puede parametrizar con

$$\mathbf{r}(t)=(h+a\cos t)\,\hat{\imath}\;+\;(k+b\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath}\quad\text{con}\quad t\in\;[0,2\pi[.$$

En particular la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ se puede parametrizar con

$$\mathbf{r}(t)=(h+a\cos t)\,\hat{\imath}\;+\;(k+a\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath}\quad\text{con}\quad t\in\;[0,2\pi[.$$

Ejemplo 9.2

Sea C la curva de ecuación

$$(x-1)^2+(y-2)^2=16;\; z=3.$$

Se trata de una circunferencia en el plano $z=3$, es decir, un caso particular de elipse. Una parametrización es

$$\mathbf{r}(t)=(1+4\cos\,t)\;\hat{\imath}\;+\;(2+4\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath}\;+\;3\;\hat{\mathbf{k}},\quad t\in\;[0,2\pi[$$

Observe que $\mathbf{r}(0)=(5,2,3)=\mathbf{r}(2\pi)$.

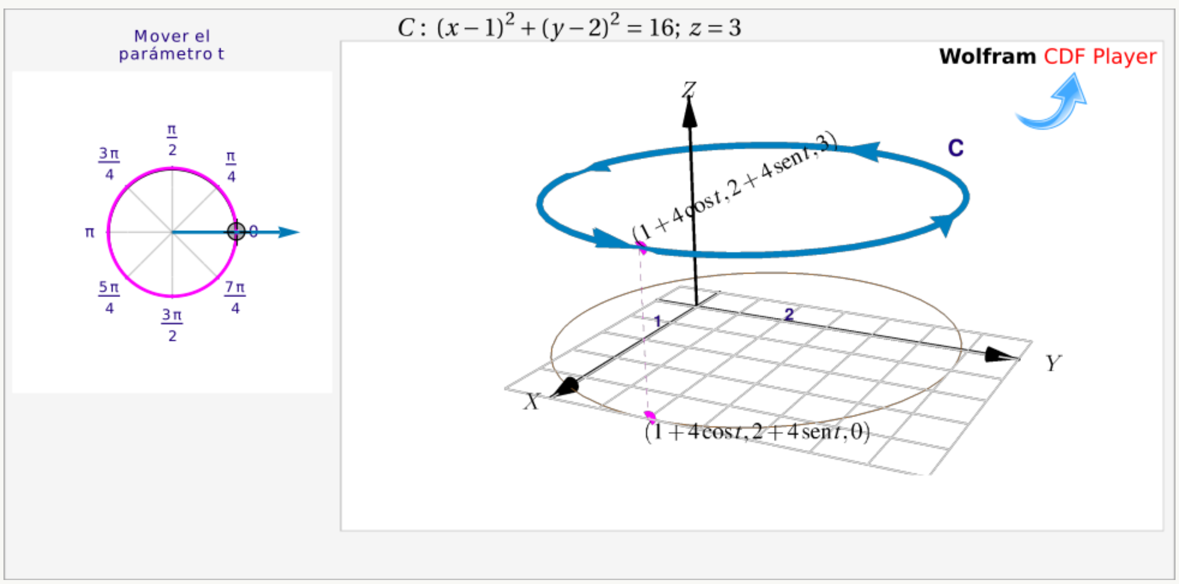
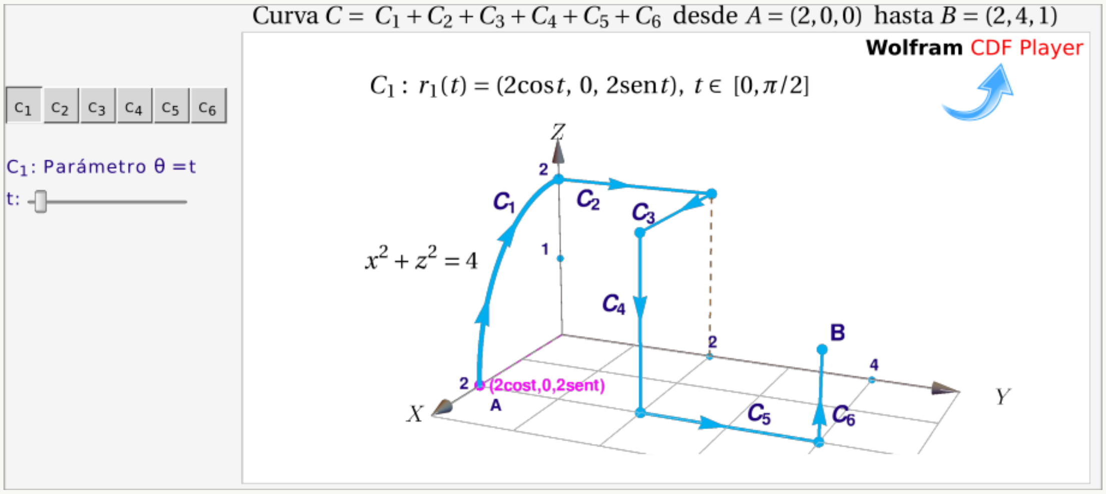


Figura 9.3: Curva C.

Ejemplo 9.3

Considere la curva $C=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6$. La curva inicia en $A=(2,0,0)$ y fnaliza en $B=(2,4,1)$. La curva C_1 es el trozo de circunferencia $x^2+z^2=4$ y las otras curvas son segmentos de recta, tal y como se ve en la figura. Parametrizar C.



Solución:

- C_1 es un cuarto de circunferencia de radio 2, en el plano XZ. La podemos parametrizar con

$$C_1: \ \mathbf{r}_1(t) = (2\cos t,\ 0,\ 2\,\text{sen}\, t),\ t \in \ [0, \pi/2]$$

- C_2 es un segmento de recta paralelo el eje Y. Podemos tomar como parámetro a $y = t$, además $x(t) = 0$ y $z(t) = 2$. Una parametrización es

$$C_2: \ \mathbf{r}_2(t) = (0,\ t,\ 2),\quad t \in \ [0,2],$$

- C_3 es un segmento de recta paralelo el eje X. Podemos tomar como parámetro a $x = t$, además $y(t) = 2$ y $z(t) = 2$. Una parametrización es

$$C_3: \ \mathbf{r}_3(t) = (t,\ 2,\ 2),\quad t \in \ [0,2],$$

- C_4 es un segmento de recta paralelo el eje Z. Podemos tomar como parámetro a $z = t$, además $y(t) = 2$ y $x(t) = 2$. Si $t \in \ [0,2]$, la orientación queda invertida, lo cual denotamos con $-C_4$ en la parametrización que sigue,

$$-C_4: \ \mathbf{r}_4(t) = (2,\ 2,\ t),\quad t \in \ [0,2]$$

- C_5 es un segmento de recta paralelo el eje Y. Podemos tomar como parámetro a $y = t$, además $x(t) = 2$ y $z(t) = 0$. Una parametrización es

$$C_5: \ \mathbf{r}_5(t) = (2,\ t,\ 0),\quad t \in \ [2,4]$$

- C_6 es un segmento de recta paralelo el eje Z. Podemos tomar como parámetro a $z = t$, además $y(t) = 4$ y $x(t) = 2$. Una parametrización es

$$C_6: \ \mathbf{r}_6(t) = (2,\ 4,\ t),\quad t \in \ [0,1]$$

Segmentos de recta. Recordemos del capítulo 4 que el segmento de recta que va de A hasta B se puede parametrizar con

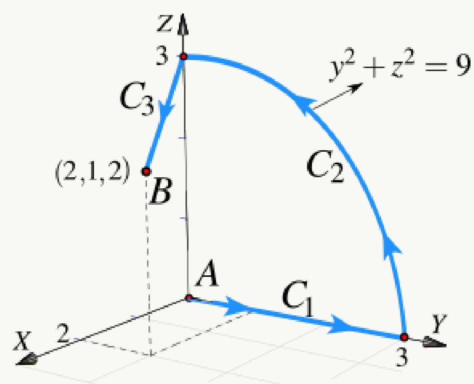
$$\mathbf{r}(t) = A + t(B - A) \quad \text{con} \quad t \in [0,1].$$

El punto inicial es $\mathbf{r}(0) = A + 0\cdot(B - A) = A$; el punto final es $\mathbf{r}(1) = A + 1\cdot(B - A) = B$.

N Los segmentos paralelos a los ejes es mejor parametrizarlos usando $x = t$, $y = t$ o $z = t$, según corresponda.

Ejemplo 9.4

Considere la curva $C = C_1 + C_2 + C_3$ tal y como se muestra en la figura. Parametrizar C.



Solución:

- C_1 es un segmento de recta sobre el eje Y por tanto $x(t) = 0$ y $z(t) = 0$. Una parametrización es
$$\mathbf{r}_1(t) = (0,\ t,\ 0) \quad \text{con} \quad t \in [0,3].$$

- C_2 es un cuarto de circunferencia de radio 3, en el plano YZ. Lo podemos parametrizar con

$$\mathbf{r}_2(t) = (0,\ 3\cos t,\ 3\,\text{sen}\, t) \quad \text{con} \quad t \in [0,\pi/2].$$

- C_3 es un segmento de recta que va de $(2,1,2)$ hasta $(0,0,3)$. Podemos parametrizar con

$$\mathbf{r}_3(t) = (2,1,2) + t[(0,0,3) - (2,1,2)] = (2 - 2t,\ 1 - t,\ 2 + 2t) \quad \text{con} \quad t \in [0,1]$$

Ejemplo 9.5

Determine una parametrización para $C = C_1 + C_2 + C_3$ de la figura adjunta.

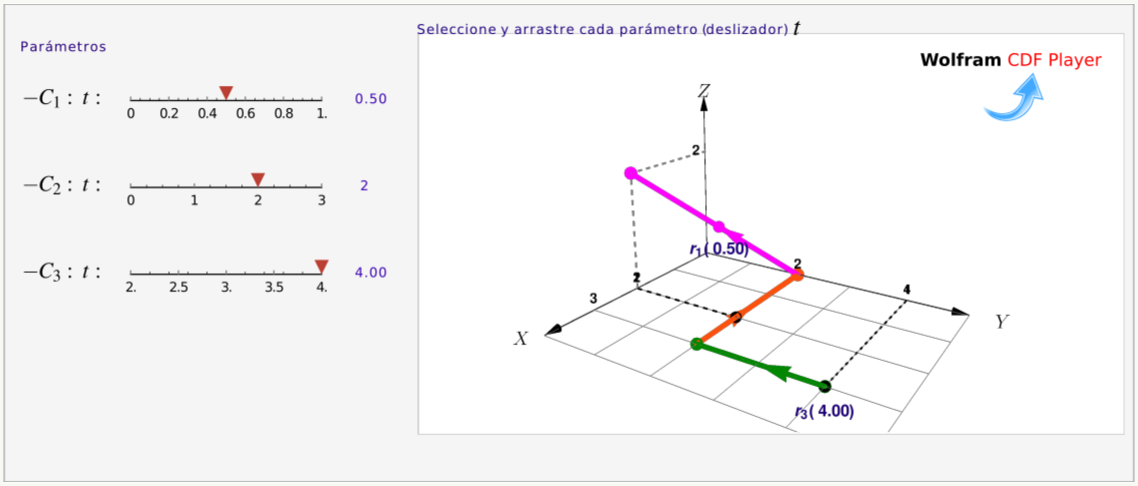


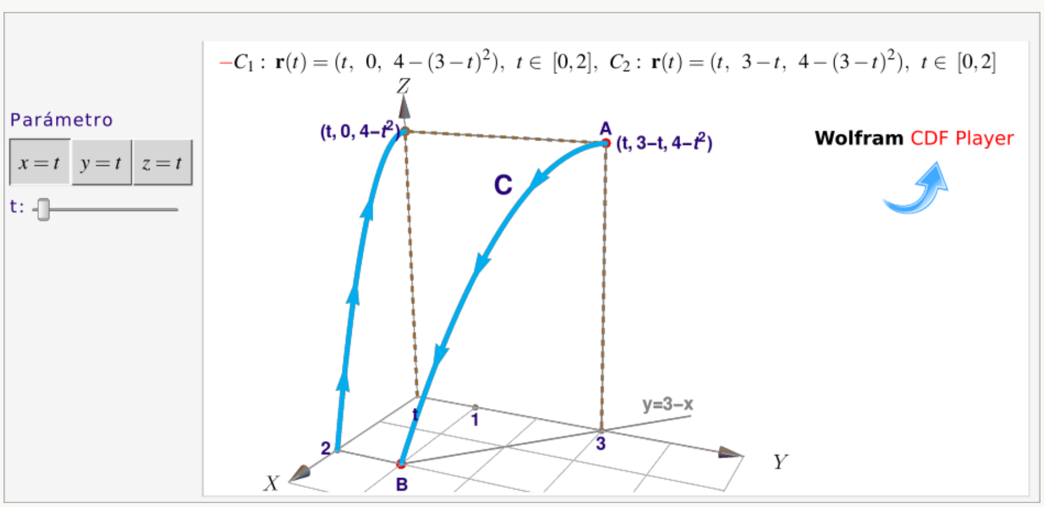
Figura 9.4: Curva $C = C_1 + C_2 + C_3$

Solución: El segmento C_1 lo parametrizamos con la fórmula $\mathbf{r}_1(t) = A + t\cdot(B - A),\ t \in [0,1]$. Para el segmento C_2 podemos usar $x = t$ como parámetro y para el segmento C_3 podemos usar $y = t$ como parámetro. En los tres casos la orientación queda invertida.

$$C : \begin{cases} -C_1 : \ \mathbf{r}_1(t) = (2,0,2) + t\cdot[(0,2,0) - (2,0,2)] = (2-2t)\,\hat{\mathbf{\imath}} + 2t\,\hat{\mathbf{\jmath}} + (2-2t)\,\hat{\mathbf{k}}, \quad t \in [0,1] \\ -C_2 : \ \mathbf{r}_2(t) = t\,\hat{\mathbf{\imath}} + 2\,\hat{\mathbf{\jmath}}, \quad t \in [0,3] \\ -C_3 : \ \mathbf{r}_3(t) = 3\,\hat{\mathbf{\imath}} + t\,\hat{\mathbf{\jmath}}, \quad t \in [2,4] \end{cases}$$

Ejemplo 9.6

Considere las curvas $C_1 : \ z = 4 - x^2,\ y = 0$ y C_2 la curva de intersección entre las superficies $S_1 : \ z = 4 - x^2$ y el plano $S_2 : \ x + y = 3$ en el primer octante. Determine una parametrización para C_1 y C_2.



Solución:

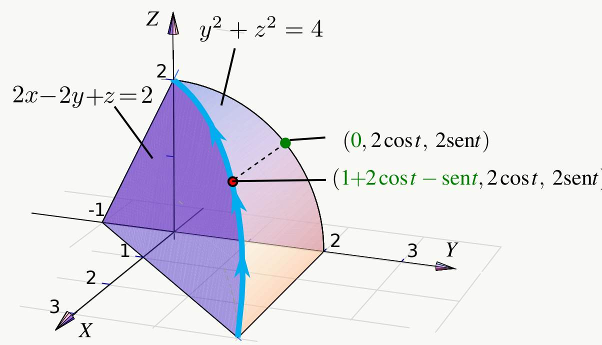
- Si tomamos a $x = t$, entonces $\begin{cases} -C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 4-t^2), \ t \in [0,2] \\ C_2: \mathbf{r}_2(t) = (t, 3-t, 4-t^2), \ t \in [0,2] \end{cases}$

- Si tomamos a $y = t$, entonces $-C_2: \mathbf{r}_2(t) = (3-t, \ t, 4-(3-t)^2), \ t \in [1,3]$

- Si tomamos a $z = t$, entonces $\begin{cases} C_1: \mathbf{r}_1(t) = (\sqrt{4-t}, 0, t), \ t \in [0,4] \\ -C_2: \mathbf{r}_2(t) = (\sqrt{4-t}, 3-\sqrt{4-t}, t), \ t \in [0,4] \end{cases}$

Ejemplo 9.7

Considere la curva C de intersección entre el plano $2x-2y+z=2$ y el cilindro $y^2+z^2=4$. Determine una parametrización para C.



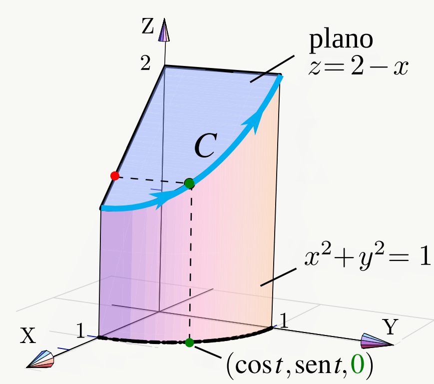
Solución: Los puntos de C son puntos $(x(t), y(t), z(t))$ en donde $y(t)$ y $z(t)$ están en la circunferencia $y^2+z^2=4$, es decir, podemos poner $y(t) = 2\cos t$ y $z(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t$.

Como $x(t)$ está en el plano $2x-2y+z=2$, despejando: $x(t) = 1 - z(t)/2 + y(t)$, ahora podemos escribir

$$C: \mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t - \mathrm{sen}\, t, \ 2\cos t, \ 2\,\mathrm{sen} t) \quad \text{con} \quad t \in [0, \pi/2]$$

Ejemplo 9.8

Considere la curva C de intersección entre el cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $z=2-x$. Parametrizar C.



Solución: Hay varias maneras de parametrizar C. Veamos dos maneras.

- **Primera manera**: Los puntos de C son puntos $(x(t), \ y(t), \ z(t))$ con $x(t)$ y $y(t)$ sobre la circunfe-rencia $x^2+y^2=1$, por lo tanto podemos poner $x(t) = \cos t$ y $y(t) = \mathrm{sen}\, t$. Como $z(t)$ está en el plano $z = 2-x$, entonces $z(t) = 2 - x(t)$.

Una parametrización podría ser

$$C: \ \mathbf{r}(t) \ = \ (\cos t, \ \operatorname{sen} t, \ 2-\cos t) \quad \text{con} \quad t \in [0, \pi/2]$$

Observe que $\mathbf{r}(0) = (1,0,1)$ y que $\mathbf{r}(\pi/2) = (0,1,2)$.

- **Segunda manera**: Ver los puntos de C con $x(t)$ y $z(t)$ sobre la recta $z = 2 - x$ y $y(t)$ en el el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Una parametrización se podría obtener tomando a $x = t$ como paramétro:

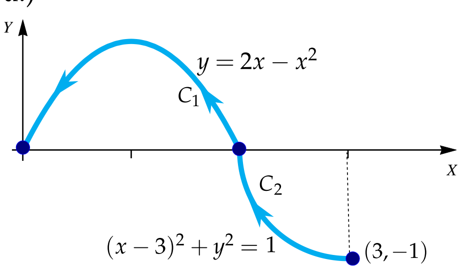
$$-C: \ \mathbf{r}(t) \ = \ (t, \ \sqrt{1-t^2}, \ 2-t) \quad \text{con} \quad t \in [0,1]$$

La parametrización invierte la orientación, eso lo indicamos con "$-C$".

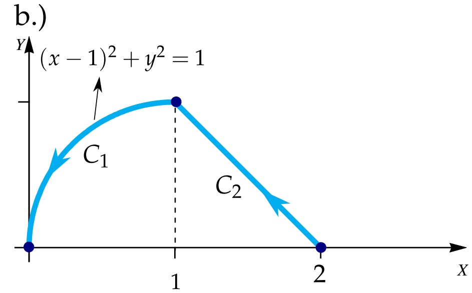
Ejercicios

9.0.1 Determine una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

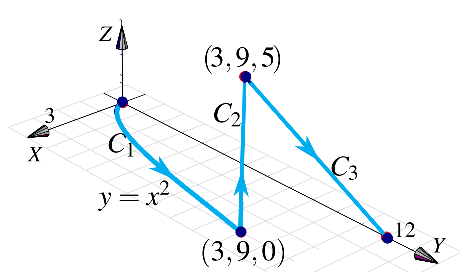
a.)



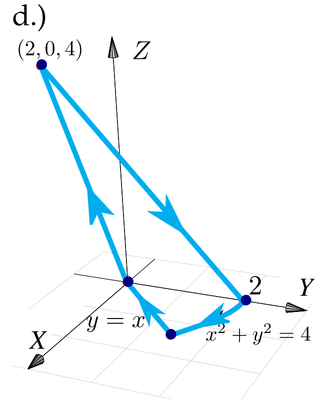
b.)



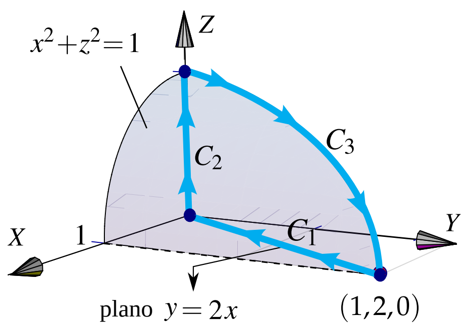
c.)



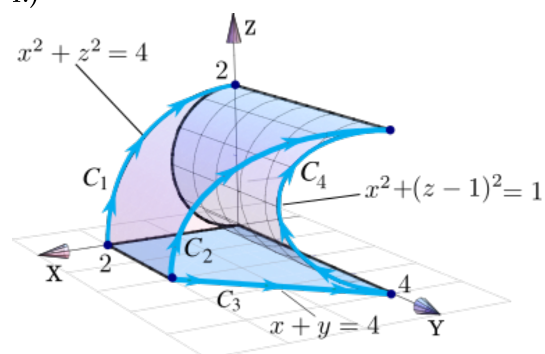
d.)



e.)



f.)



9.1 Longitud de una curva.

Consideremos una curva C regular y simple, parametrizada por $\mathbf{r}$ en $[a,b]$. Para calcular la longitud de C, la idea es partir el intervalo $[a,b]$ en n partes $[a,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup ... \cup[t_{n-1},b]$ y considerar una línea poligonal inscrita en C, como se muestra en la figura.

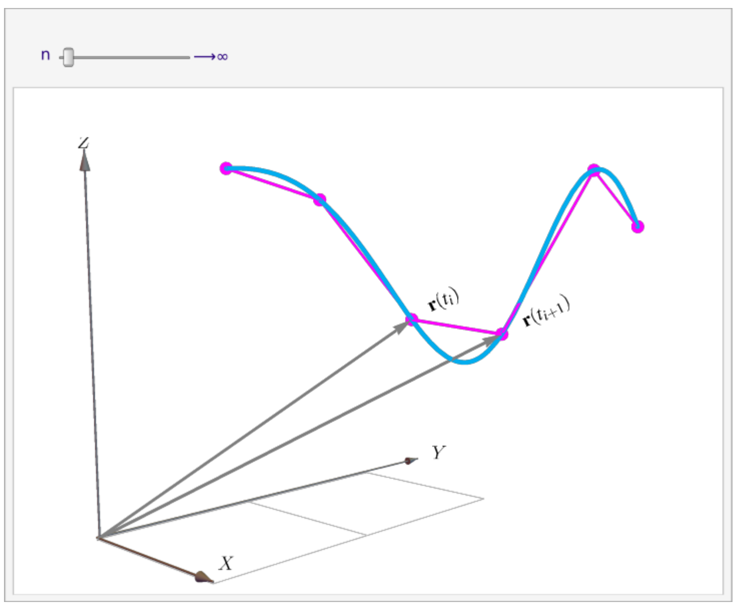


Figura 9.5: Longitud de arco como una integral de Riemann.

La longitud de la curva ("rectificable") se define como el límite al cual tiende la suma de las longitudes de los segmentos de la línea poligonal cuando $||P|| = \text{Máx}(t_{i-1}-t_i) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$, es decir

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})||$$

Si C es regular, por el teorema del valor medio podemos poner $||\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})|| = ||\mathbf{r}'(\xi_i)(t_i-t_{i-1})||$ con $\xi_i \in]t_i, t_{i-1}[$ y concluir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{r}'(\xi_i)\triangle t|| = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt$$

Definición 9.1 (Longitud de una curva).

Sea C regular, simple y parametrizada por $\mathbf{r}(t),\ t \in [a,b]$. Si $ds = ||\mathbf{r}'(t)||dt,$ entonces la longitud (de arco) de C es

$$s = \int_C 1 \cdot ds \;=\; \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt$$

Además, la longitud de arco *no depende* de la parametrización de C (ni, por tanto, de la orientación).

Sea C parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$.

Caso $C:\ \mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$ con $t \in [a,b]$ entonces

$$s = \int_C ds \;=\; \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Caso $C:\ y = f(x)$

Si $y = f(x)$ entonces tomando $x = t$ tenemos

$$s = \int_C ||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Caso $C:\ \mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$ con $t \in [a,b]$ entonces

$$s = \int_C ds \;=\; \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

Ejemplo 9.9

Calcular la longitud de la circunferencia de un círculo de radio a.

Solución: La circunferencia C se puede parametrizar con

$$C:\ \mathbf{r}(t) = \underbrace{a\cos(t)}_{x(t)}\ \hat{\imath} + \underbrace{a\,\text{sen}(t)}_{y(t)}\ \hat{\jmath} \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi[.$$

$$r'(t) = \underbrace{-a\,\text{sen}(t)}_{x'(t)}\ \hat{\imath} + \underbrace{a\cos(t)}_{y'(t)}\ \hat{\jmath}$$

$$s = \int_C ds \;=\; \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\,\text{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2a\pi$$

Ejemplo 9.10

Calcular la longitud de la la hélice $x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 2\,\mathrm{sen}(t),\ z(t) = t/4$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \underbrace{2\cos(t)}_{x(t)}\ \hat{\mathbf{\imath}} + \underbrace{2\,\mathrm{sen}(t)}_{y(t)}\ \hat{\mathbf{\jmath}} + \underbrace{t/4}_{z(t)}\ \hat{\mathbf{k}} \text{ con } t \in [0, 2\pi]. \\
\mathbf{r}'(t) &= \underbrace{-2\,\mathrm{sen}(t)}_{x'(t)}\ \hat{\mathbf{\imath}} + \underbrace{2\cos(t)}_{y'(t)}\ \hat{\mathbf{\jmath}} + \underbrace{1/4}_{z'(t)}\ \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + \frac{1}{16}}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{65}{16}}\,dt = 2\pi\sqrt{\frac{65}{16}}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

9.1.1 Calcular la longitud de la curva $C:\ y = \sqrt{x^3},\ \ x \in [0, 44]$

9.1.2 Calcular la longitud de la curva $C:\ x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2},\ \ y \in [1,\ 4]$.

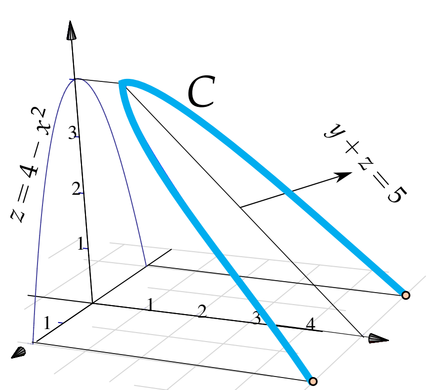
9.1.3 Calcular la longitud de la curva $C:\ y^2 = (2x-1)^3,\ \ x \in [1/2,\ 4]$ (Ayuda: La curva tiene dos ramas).

9.1.4 Calcular la longitud de la curva $C:\ y = \log(\sec x),\ \ x \in [0,\ \pi/4]$

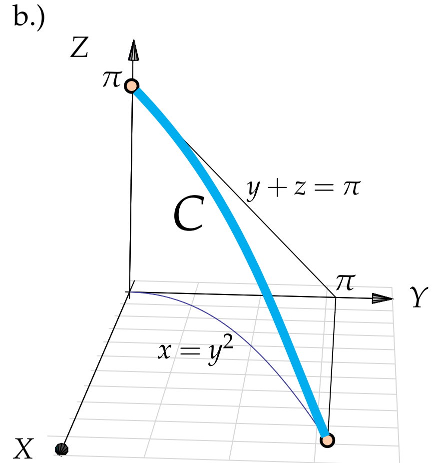
9.1.5 Calcular la longitud de la curva $C:\ y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x},\ \ x \in [1,\ 2]$

9.1.6 **Plantear** la o las integrales que dan la longitud de las siguientes curvas,

a.)



b.)



9.2 Integral de línea para campos escalares.

Masa de un alambre. Consideremos un trozo de alambre delgado cuya masa varía continuamente y tiene valor $\rho(\mathbf{x})$ gramos por centímetro en el punto $\mathbf{x}$ sobre C.

Para estimar la masa total sobre C, hacemos una partición de C : $\{\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), ..., \mathbf{r}(t_{k+1})\}$ donde $\mathbf{r}$ es una parametrización de C.

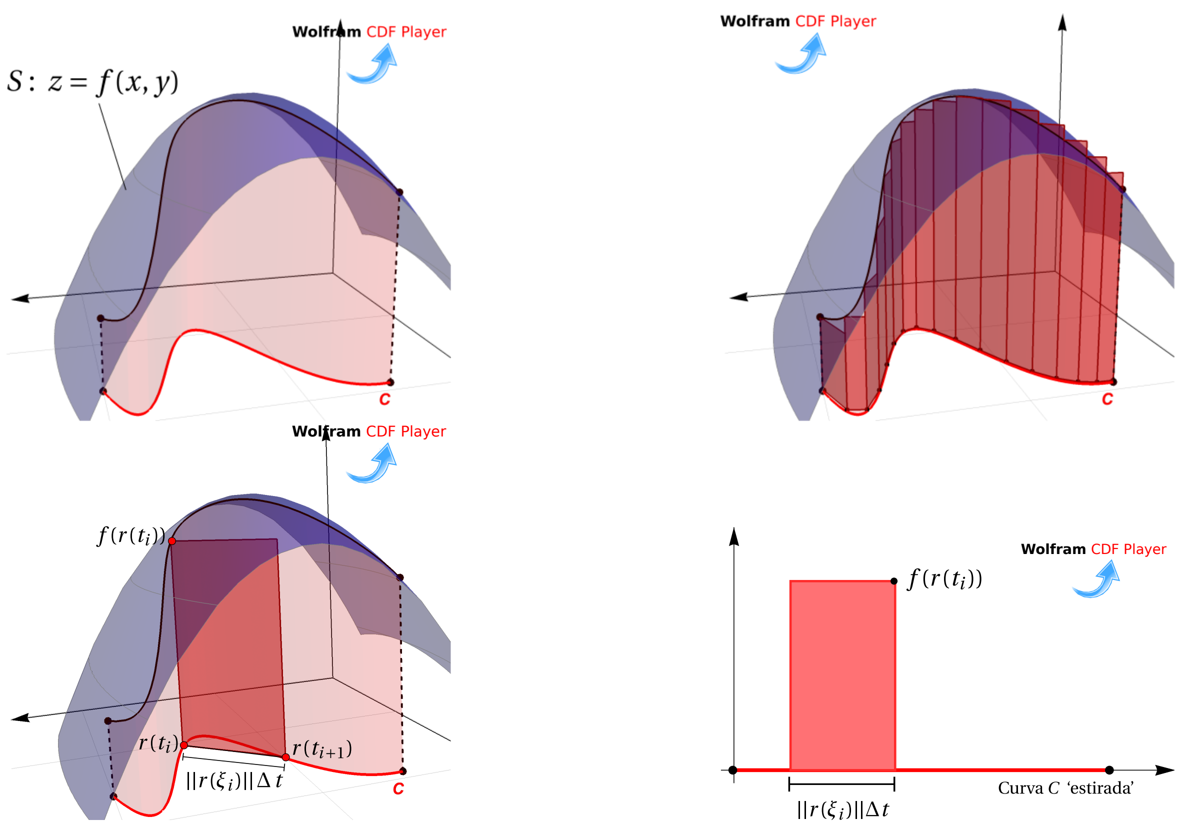
Si $\Delta s_i = ||\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)||$ centímetros, la masa del segemento que va de $\mathbf{r}(t_{i+1})$ a $\mathbf{r}(t_i)$ es aproximadamente $\rho(\mathbf{r}(t_i))\Delta s_i$ gramos y la masa total m del alambre sería

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \rho(\mathbf{r}(t_i))\Delta s_i$$

Esta es una suma de Riemman y por tanto podemos tomar el límite (si existe): $m = \displaystyle\int_C \rho(\mathbf{x})\, ds$

Generalizando la fórmula, si $\Delta s_i = ||\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|| = ||\mathbf{r}'(\xi_i)||\Delta t$, entonces

$$\int_C f\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(\mathbf{r}(t_i))||\mathbf{r}'(\xi_i)||\Delta t$$



Definición 9.2

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y C una curva suave y simple, contenida en U y parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$, entonces *la integral de línea* de f sobre C es

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||\, dt$$

Ejemplo 9.11

Sea C el arco de parábola $x = y^2$ con $y \in [0, \sqrt{2}]$. Calcular $\int_C \left(2x - 2y^2 + 8y\right)\, ds$

Solución: Usemos $y = t$ como parámetro,

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = \underbrace{t^2}_{x(t)}\ \hat{\imath} + \underbrace{t}_{y(t)}\ \hat{\jmath} \quad \text{con} \quad t \in [0, \sqrt{2}].$$

$$r'(t) = \underbrace{2t}_{x'(t)}\ \hat{\imath} + \underbrace{1}_{y'(t)}\ \hat{\jmath}$$

Entonces $ds \ = \ ||\mathbf{r}'(t)||\, dt \ = \ \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \ = \ \sqrt{(2t)^2 + 1^2}\, dt$

$$\begin{aligned} \int_C 2x - 2y^2 + 8y\, ds \ &= \ \int_0^{\sqrt{2}} (2t^2 - 2t^2 + 8t)\sqrt{(2t)^2 + 1^2}\, dt \\ &= \ \int_0^{\sqrt{2}} 8t\sqrt{4t^2 + 1}\, dt \\ &= \ \frac{2}{3}(4t^2 + 1)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} \ = \ 52/3 \end{aligned}$$

Ejemplo 9.12

Calcular $\int_C (x^2 + y^2)^5\, ds$ con C la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: Una parametrización de la circunferencia es

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = 2\cos t\ \hat{\imath}\ +\ 2\,\mathrm{sen}\, t\ \hat{\jmath}, \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como $ds \ = \ ||\mathbf{r}'(t)||\, dt \ = \ ||4\,\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t||\, dt \ = \ 2\, dt$ entonces

$$\int_C (x^2 + y^2)^5\, ds = \int_0^{2\pi} 4^5\, 2\, dt \ = \ 2 \cdot 4^5 \cdot 2\pi.$$

Ejemplo 9.13

Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$ con C la espira (una vuelta) de la hélice $x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 2\,\text{sen}(t),\ z(t) = 2t.$

Solución: Como $||\mathbf{r}'(t)|| = ||4\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4|| = \sqrt{8}$, entonces

$$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{4t^2}{4}\sqrt{8}\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^3.$$

Ejercicios

9.2.1 Calcular $\displaystyle\int_C xy^2\,ds$ donde C es la mitad superior de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 16$

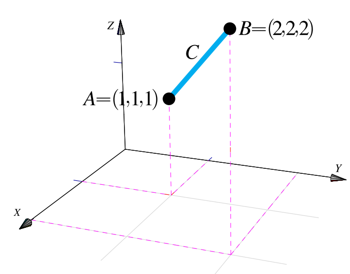
9.2.2 Calcular $\displaystyle\int_C x\,ds$ donde C es el arco de parábola $C:\ y = x^2$ con $x \in [-1,1]$.

9.2.3 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{xy+z}{2x-y}\,ds$ donde C es el segmento de recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$.

9.2.4 Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\,ds$$

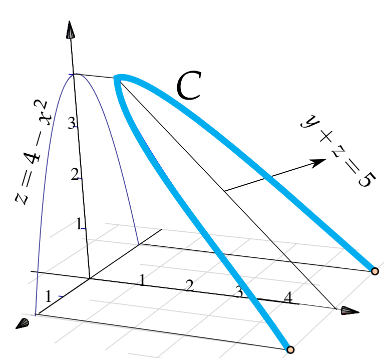
donde C es el segmento de recta que va desde $A=(1,1,1)$ hasta el punto $B=(2,2,2)$, tal y como se muestra en la figura a la derecha



9.2.5 Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\,ds$$

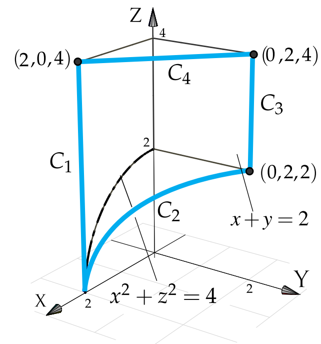
donde C es la curva que se muestra en la figura a la derecha



9.2.6 Calcule la integral de línea

$$\int_C x + y + z - 2\, ds$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la curva que se muestra en la figura a la derecha



9.3 (∗) Longitud de arco en coordenadas polares.

Ahora el parámetro será θ. Si C esta dada por $r = \mathbf{r}(\theta)$ con $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, entonces

$$\begin{cases} x(\theta) = \mathbf{r}(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \mathbf{r}(\theta)\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} x' &= r'(\theta)\cos(\theta) - \mathbf{r}(\theta)\,\text{sen}(\theta) \\ y' &= r'(\theta)\,\text{sen}(\theta) + \mathbf{r}(\theta)\cos(\theta) \end{aligned}$$

Luego, desarrollando y simplificando: $||(x', y')|| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(r'(\theta))^2 + r^2(\theta)}$. Así,

Longitud de arco en coordenadas polares

$$\int_C f\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\mathbf{r}(\theta)\cos(\theta), \mathbf{r}(\theta)\,\text{sen}(\theta))\sqrt{[r\,'(\theta)]^2 + r^2(\theta)}\, d\theta$$

Ejemplo 9.14

Calcular $\int_C x\sqrt{x^2 - y^2}\, ds$ con C la curva de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$.

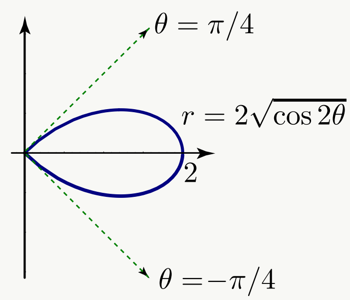


Figura 9.6: Curva C

Solución: Cambiando a polares la curva queda con ecuación $r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$ donde $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Además

$$(x')^2+(y')^2=[r'(\theta)]^2+r^2(\theta)=\left(-\frac{2\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2+\left(2\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2=\frac{4}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\,ds &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r\cos\theta\,\sqrt{r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\sqrt{\frac{4}{\cos(2\theta)}}\,d\theta\\
&= 8\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\,\cos\theta\,d\theta \quad \text{(sustituyendo } r \text{ y simplificando).}\\
&= 8\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta-2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta \quad \text{(sustituyendo } \cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)\\
&= \operatorname{sen}\theta-2\,\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{16\sqrt{2}}{3.}
\end{aligned}$$

9.4 Integral de línea de campos vectoriales. Trabajo.

Trabajo. Si se aplica una fuerza (empuje) *constante* $\mathbf{F}$ (en la dirección del movimiento) para mover un objeto a una distancia d en línea recta, entonces el trabajo que hace la fuerza es $W=$ Fuerza $\cdot$ distancia. Si hay un ángulo θ entre la dirección en la que se aplica la fuerza constante y la dirección del movimiento, entonces solo la camponente de la fuerza en la dirección del desplazamiento hace algún trabajo.

Supongamos que el vector unitario $\Delta\mathbf{r}$ es la dirección del desplazamiento. Si θ es la medida del ángulo formado por $\mathbf{F}$ y $\Delta\mathbf{r}$ entonces el escalar $||\mathbf{F}||\cos\theta$ es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento[1] (0 si $\theta=\pi/2$ y $||\mathbf{F}||$ si $\theta=0$). Luego el trabajo realizado es

$$W=||\mathbf{F}||\,||\Delta\mathbf{r}||\cos\theta=\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$$

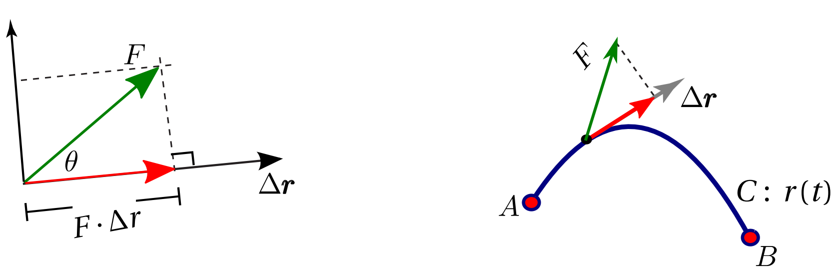


Figura 9.7: Trabajo.

[1] $\mathbf{F}$ se descompone como la suma de su componente ortogonal y su proyección ortogonal sobre $\Delta\mathbf{r}$. Solamente la proyección ortogonal es la parte de $\mathbf{F}$ responsable del trabajo que se efectúa.

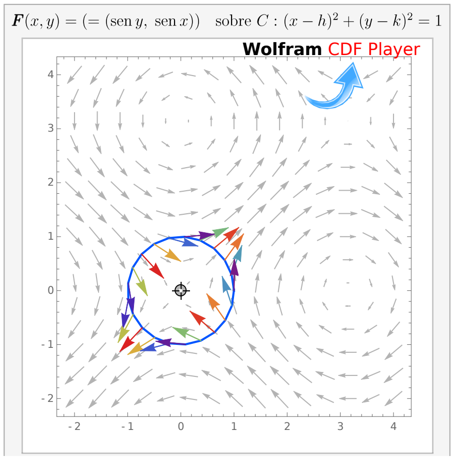


Figura 9.8: $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y,\ \operatorname{sen} x)$ sobre una curva C

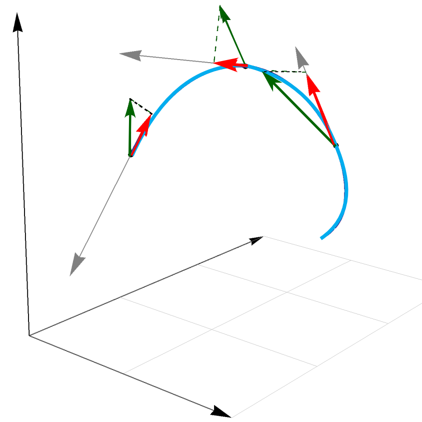


Figura 9.9: $\mathbf{F}(x, y, z) = -0.5(x \operatorname{sen}\ y, 0, -\operatorname{sen}\ z)$ sobre C

Definición 9.3 (Trabajo).

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre la curva C. Suponemos que C está orientada, es regular y simple. Entonces

$$W = \lim_{\substack{k\to\infty \\ ||M||\to 0}} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i := \int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r}?$$

si el límite existe cuando es tomado sobre todas las particiones ordenadas $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), ... \mathbf{r}(t_{k+1})$ de C con $||M|| = \text{máx}_i\{||\Delta\mathbf{r}_i||\}$ y $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i),\ \ i = 1, ..., k$

Para calcular el trabajo que hace una fuerza para mover una particula sobre una curva $C:\ \mathbf{r}(t)$, usamos como vector de desplazamiento el vector unitario tangente $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$. Si C esta parametrizada por $\mathbf{r}(s)$ (usando la longitud de arco s como parámetro) con $0 \leqslant s \leqslant \ell$, entonces como $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt\ = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}\, ||\mathbf{r}'(t)||dt = \mathbf{T}\, ds$, para calcular el trabajo sobre una curva C, se consideran pedazos muy pequeños de la curva, tan pequeños que son, aproximadamente, segmentos de recta y la fuerza es casi constante sobre estos pedazos de tamaño $||\mathbf{T}ds|| = ||d\mathbf{r}||$. El trabajo hecho por $\mathbf{F}$ para mover la partícula desde el inicio hasta el final de $d\mathbf{r}$ es $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sumando todos los trabajos (pasando a la integral) obtenemos

$$W = \int_0^{\ell} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\ ds = \int_C \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r}$$

El escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ puede ser positivo o negativo, dependiendo de la orientación de la curva de tal manera que lo que calculamos es "el trabajo neto". La función escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ puede tener discontinuidades de primera espacie ligadas a algún punto esquina de C.

En la definición anterior, C puede ser regular, cerrada y simple. En particular si C es la unión de curvas regulares y simples C_1, C_2, ..., C_n, escribimos $C = C_1 + C_2 + ... + C_n$ y definimos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r}\ +\ \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r}\ +\ \cdots\ +\ \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r}$$

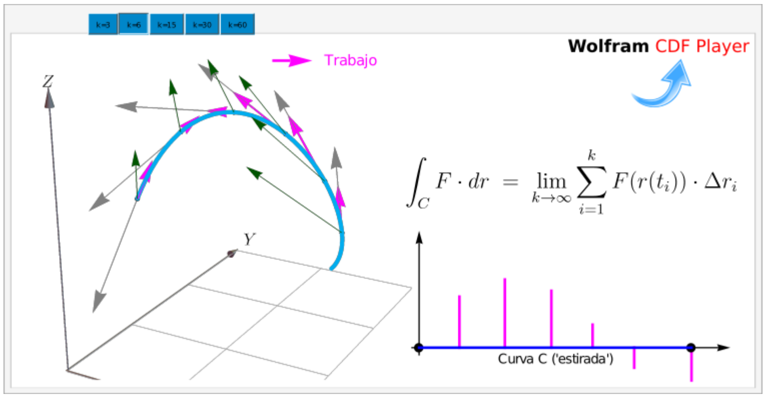


Figura 9.10: Calculando el trabajo W

Si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} = \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||})\, ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\, \hat{\mathbf{\imath}} + Q(x, y)\, \hat{\mathbf{\jmath}}$

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\, \hat{\mathbf{\imath}} + Q(x, y)\, \hat{\mathbf{\jmath}}$, como $dx = x'(t)dt$ y $dy = y'(t)dt$, podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} \; = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \; = \int_a^b P\, dx + Q\, dy$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} \;&=\; \int_a^b P\, dx + Q\, dy \\ &=\; \int_a^b (P(x(t), y(t)),\; Q(x(t), y(t)) \cdot (x'(t),\; y'(t))\, dt \end{aligned}$$

$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\, \hat{\mathbf{\imath}} + Q(x, y, z)\, \hat{\mathbf{\jmath}} + R(x, y, z)\, \hat{\mathbf{k}}$

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\, \hat{\mathbf{\imath}} + Q(x, y, z)\, \hat{\mathbf{\jmath}} + R(x, y, z)\, \hat{\mathbf{k}}$, como $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$ y $dz = z'(t)dt$, podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} \; = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot r'(t)\, dt \; = \int_a^b P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_a^b P(\mathbf{r}(t))\,dx + Q(\mathbf{r}(t))\,dy + R(\mathbf{r}(t))\,dz \\ &= \int_a^b (P(x(t),y(t),z(t)),\; Q(x(t),y(t),z(t)),\; R(x(t),y(t),z(t)))\cdot(x'(t),\; y'(t),\; z'(t))\,dt\end{aligned}$$

Cuando una curva C es parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ con $t\in[a,b]$, entonces inducimos una orientación en C. Distintas parametrizaciones pueden inducir distintas orientaciones.

Por ejemplo, en la figura se tiene la curva $y=2\,\text{sen}(x)$ con $x\in[0,3]$. Dos parametrizaciones que inducen orientaciones opuestas son $\mathbf{r}_1(t)=(t,\text{sen}\,t)$ y $\mathbf{r}_2(t)=(3-t,\text{sen}(3-t))$ ambas con $t\in[0,3]$.

Figura 9.11: Orientación inducida por dos parametrizaciones.

Si $\mathbf{r}_1(t)$ parametriza C en una dirección con vector tangente T y $\mathbf{r}_2(t)$ parametriza C en sentido contrario, con vector tangente $-T$, entonces denotamos la segunda curva como $-C$ y admitimos como válido que

Convenio

$$\int_{-C}\mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$$

- Más adelante, cuando veamos el teorema de Green, usaremos la siguiente noción de orientación: *la curva cerrada C está orientada positivamente, respecto a una región D, si al movernos sobre C, la región siempre está a nuestra izquierda.*

- Note que el trabajo W puede ser un número negativo. Esto ocurre cuando la fuerza actúa en contra del desplazamiento de la partícula.

- En la sección 9.8, la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ se interpreta como "la suma" de las componentes de $\mathbf{F}$ tangentes a la curva. Si C es cerrada, esta integral indica cómo $\mathbf{F}$ tiende a circular alrededor de la curva. Esta interpretación es la que usamos para el teorema de Green.

Ejemplo 9.15

Consideremos una fuerza constante $\mathbf{F}(x,y) = 1\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$. Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si C el segmento de recta que se muestra en la figura.

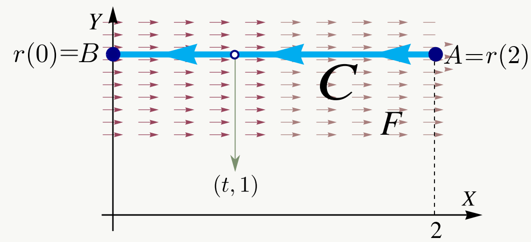


Figura 9.12: Curva C

Solución: Usamos a $x = t$ como parámetro. La parametrización $\mathbf{r}(t) = t\,\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath}$, $t \in [0,2]$, parametriza a "$-C$" pues $\mathbf{r}(0) = (0,1) = B$ y $\mathbf{r}(2) = (2,1) = A$.

Es costumbre escribir, $-C:\ \ \mathbf{r}(t) = t\,\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath},\ \ t \in [0,2]$. Luego, $\mathbf{r}'(t) = 1\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$

Como $\mathbf{F}(x,y) = 1\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$ entonces $P(x,y) = 1$ y $Q(x,y) = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= -\int_C (P(x(t),y(t)),\ Q(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),\ y'(t))\,dt\\
&= -\int_0^2 (1,\ 0)\cdot(1,\ 0)\,dt \;=\; -\int_0^2 1\,dt \;=\; -2
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.16

Sea $\mathbf{F}(x,y) = x\,\hat{\imath} + (x+y)\,\hat{\jmath}$. Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si C es la curva de ecuación es $y = x^2$, $x \in [-1,2]$ tal y como se muestra en la figura.

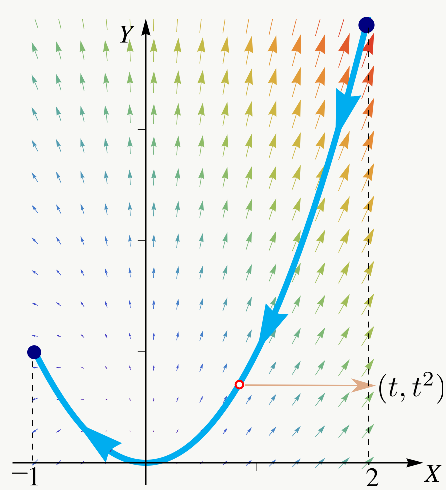


Figura 9.13: Curva C

Solución: Usamos a $x = t$ como parámetro. La parametrización $\mathbf{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t^2\,\hat{\jmath}$, $t \in [-1,2]$, parametriza a "$-C$" pues $\mathbf{r}(-1) = (-1,1) = B$ y $\mathbf{r}(2) = (2,4) = A$.

Es costumbre escribir,

$$-C:\ \ \mathbf{r}(t) = t\,\hat{\imath} + t^2\,\hat{\jmath},\ \ t \in [-1,2].$$

Luego $\mathbf{r}'(t) = 1\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath}$

Como $\mathbf{F}(x,y) = x\,\hat{\imath} + (x+y)\,\hat{\jmath}$ entonces $P(x,y) = x$ y $Q(x,y) = x+y$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= -\int_{-C} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}\\
&= -\int_C (P(x(t),y(t)),\ Q(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),\ y'(t))\,dt\\
&= -\int_{-1}^{2} (t,\ t+t^2)\cdot(1,\ 2t)\,dt\\
&= -\int_{-1}^{2} \left(t+2t^2+2t^3\right)\,dt \;=\; -15
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.17

Calcular $\displaystyle\int_C y^2dx + x^2dy$ donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1.$

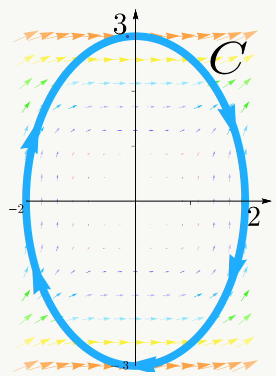


Figura 9.14: Curva C.

Solución: Podemos usar la parametrización

$$-C:\quad \mathbf{r}(\theta) = 2\cos\theta\ \hat{\imath} + 3\operatorname{sen}\theta\ \hat{\jmath}\quad \text{con}\quad \theta\in[0,2\pi].$$

Como $\mathbf{F}(x,y)=(y^2,x^2)$ entonces $P=y^2$ y $Q=x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_C y^2dx + x^2dy &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= -\int_0^{2\pi} (9\operatorname{sen}^2\theta,\ 4\cos^2\theta)\cdot(-2\operatorname{sen}\theta,\ 3\cos\theta)\,d\theta\\
&= -\int_0^{2\pi} -18\operatorname{sen}^3\theta + 12\cos^3\theta\,d\theta \;=\; 0 \quad (\quad \text{Usar:}\quad \cos^3\theta = (1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta.)
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.18

Sea $\mathbf{F}(x,y)=(y^2,\ x^2)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde C es la curva de la figura 9.15.

Solución: Parametrizamos C,

$$\begin{cases} C_1 \ : \ \mathbf{r}_1(t) = (t, 0) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \\ C_2 \ : \ \mathbf{r}_2(t) = (1, t) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \\ -C_3 \ : \ \mathbf{r}_3(t) = (t, t^2) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

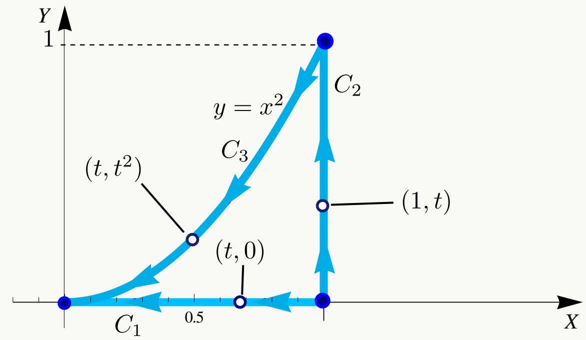


Figura 9.15: Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_{C_1} y^2 dx + x^2 dy + \int_{C_2} y^2 dx + x^2 dy - \int_{-C_3} y^2 dx + x^2 dy \\ &= \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1, 0)\, dt + \int_0^1 (t^2, 1) \cdot (0, 1)\, dt - \int_0^1 (t^4, t^2) \cdot (1, 2t)\, dt \\ &= \int_0^1 0\, dt + \int_0^1 1\, dt - \int_0^1 [t^4 + 2t^3]\, dt = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo 9.19

Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x \ln(yz) \ \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x \right) \ \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{x^2}{z} + 2z \right) \ \hat{\mathbf{k}}$$

y C la curva de la figura.

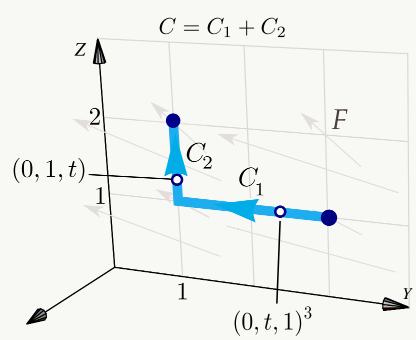


Figura 9.16: Curva $C = C_1 \cup C_2$.

Solución:

$$\begin{cases} -C_1 : \ \mathbf{r}_1(t) = (0, t, 1) \quad \text{con} \quad t \in [1,3], \\ C_2 : \ \mathbf{r}_2(t) = (0, 1, t) \quad \text{con} \quad t \in [1,2]. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = -\int_1^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t))\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt + \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t))\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt \\
&= -\int_1^3 \mathbf{F}(0,t,1)\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt + \int_1^2 \mathbf{F}(0,1,t)\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt \\
&= -\int_1^3 (0,-5,2)\cdot(0,1,0)\,dt + \int_1^2 (0,-5,2t)\cdot(0,0,1)\,dt \\
&= -\int_1^3 [0+(-5)\cdot 1+0]\,dt + \int_1^2 [0+0+(2t)\cdot 1]dt = 13
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.20

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\ \hat{\mathbf{i}} + (y-z)\ \hat{\mathbf{j}} + (x+z)\ \hat{\mathbf{k}}$ y sea C la curva de la figura 9.17. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$.

Solución: Primero parametrizamos C.

C_1 se puede parametrizar usando la fórmula para el segmento de recta que va desde $A_1=(1,2,0)$ hasta $A_2=(0,4,2)$, es decir,

$$C_1:\quad \mathbf{r}_1(t) = A_1 + t(A_2-A_1) = (1-t)\ \hat{\mathbf{i}} + (2+2t)\ \hat{\mathbf{j}} + 2t\ \hat{\mathbf{k}},\quad \text{con}\quad t\in[0,1].$$

C_2 se puede parametrizar tomando $z=t$.

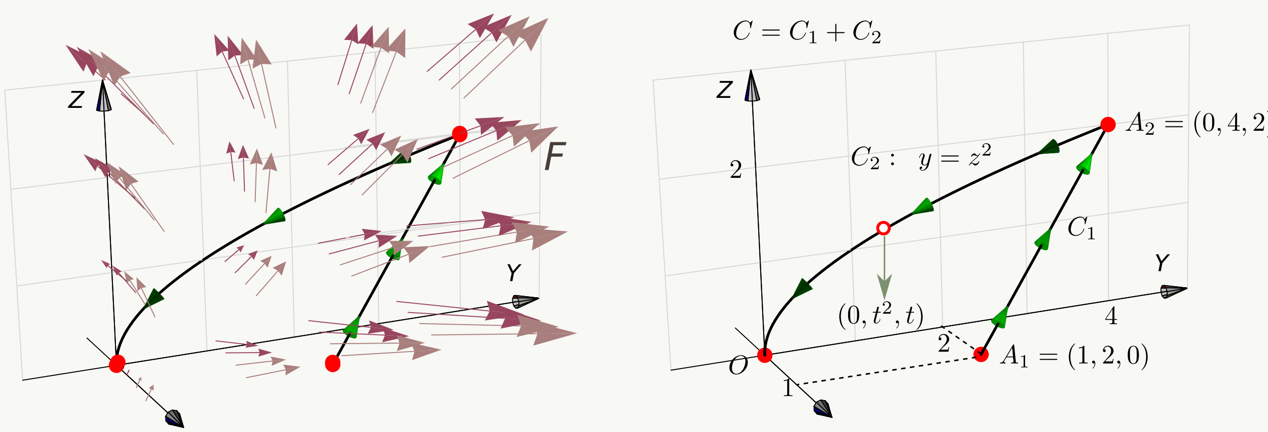


Figura 9.17: Curva C

$$\begin{cases} C_1\ :\ \mathbf{r}_1(t) &= (1-t)\ \hat{\mathbf{i}} + (2+2t)\ \hat{\mathbf{j}} + 2t\ \hat{\mathbf{k}},\ t\in[0,1], \qquad \checkmark \\ -C_2\ :\ \mathbf{r}_2(t) &= (0,t^2,t),\ t\in[0,2], \qquad \mathbf{r}_2(0)=(0,0,0)\ \text{ y }\ \mathbf{r}_2(2)=A_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t))\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt - \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t))\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt\\
&= \int_0^1 (3+t,2,1+t)\cdot(-1,2,2)\,dt - \int_0 (t^2,t^2-t,t)\cdot(0,2t,1)\,dt\\
&= \int_0^1 (t+3)\,dt - \int_0^2 \left(t-2t^2+2t^3\right)\,dt = -\frac{23}{6}\end{aligned}$$

Ejemplo 9.21

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (z+\cos x)\,\hat{\imath} + (2z + x\cos x)\,\hat{\jmath} + x\,\hat{\mathbf{k}}$.

Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si $C = C_1 + C_2 + C_3$, tal y como se muestra en la figura de la derecha.

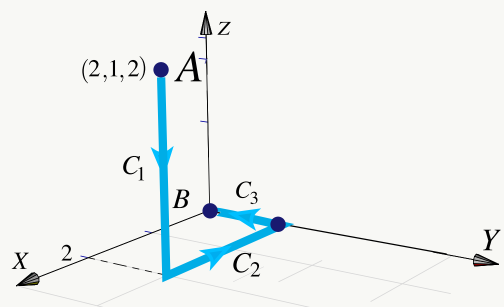


Figura 9.18

Solución: Una parametrización para C es

$$C: \begin{cases} -C_1: \mathbf{r}_1(t) = (2,1,t),\ t\in[0,2]\\ -C_2: \mathbf{r}_2(t) = (t,1,0),\ t\in[0,2]\\ -C_3: \mathbf{r}_3(t) = (0,t,0),\ t\in[0,1]\end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_0^2 (t+\cos(2),\ 2t+2\cos(2),\ 2)\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt - \int_0^2 (\cos t,\ t\cos t,\ t)\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt - \int_0^1 (t,0,0)\cdot \mathbf{r}_3'(t)dt\\
&= -\int_0^2 (t+\cos(2),\ 2t+2\cos(2),\ 2)\cdot(0,0,1)\,dt - \int_0^2 (\cos t,\ t\cos t,\ t)\cdot(1,0,0)\,dt - \int_0^1 (t,0,0)\cdot(0,1,0)dt\\
&= -\int_0^2 2\,dt - \int_0^2 \cos t\,dt - 0 = -2t\Big|_0^2 - \operatorname{sen} t\Big|_0^2 = -4-\operatorname{sen}(2)\end{aligned}$$

Ejercicios

9.4.1 Calcule $I = \int_C x\,dx + 3y^2\,dy + 2z\,dz$. La curva C es el semento de recta que va de $P(1,1,0)$, a $Q(1,2,2)$.

9.4.2 Calcule $I = \int_C x\,dx + y^2\,dy$. La curva $C = C_1 \cup C_2$ es la curva que aparece en la figura.

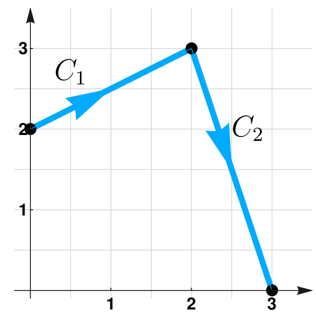
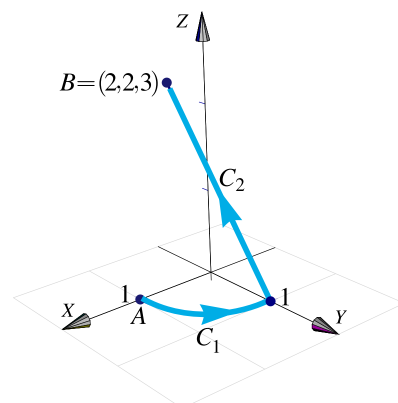
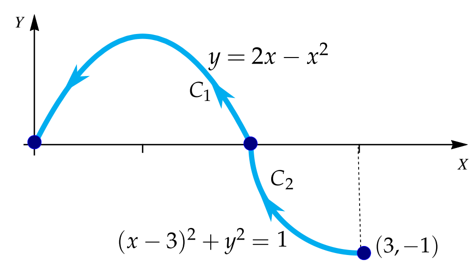


Figura 9.19: Curva C

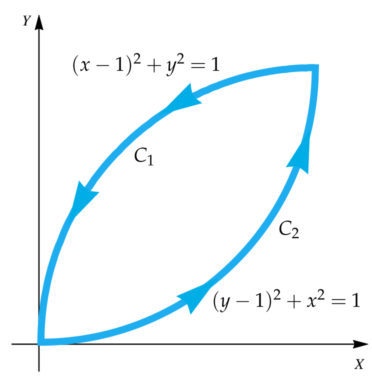
9.4.3 Calcule $I = \int_C x\,dx + z\,dy + \,dz$. La curva $C = C_1 \cup C_2$ es la curva que aparece en la figura; C_1 es un trozo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y C_2 es el segmento que va de $(0,1,0)$ a $B = (2,2,3)$.



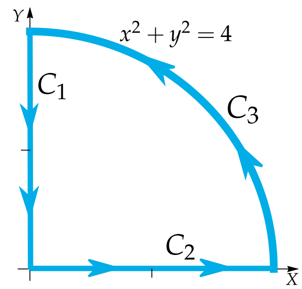
9.4.4 Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $F(x,y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$, $C_1 : (x-3)^2 + y^3 = 1$ donde $C = C_1 \cup C_2$.



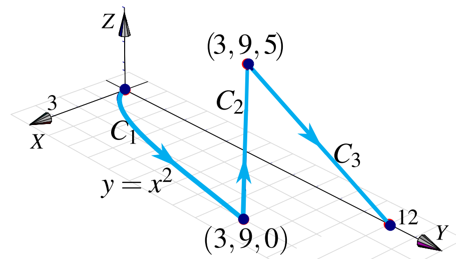
9.4.5 Calcule $\int_C x\,dy - y\,dx$ donde $C = C_1 \cup C_2$



9.4.6 Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, y además $F(x, y) = (2y + \sqrt{9+x^3})\,\mathbf{i} + (5x + e^{\arctan y})\,\mathbf{j}$



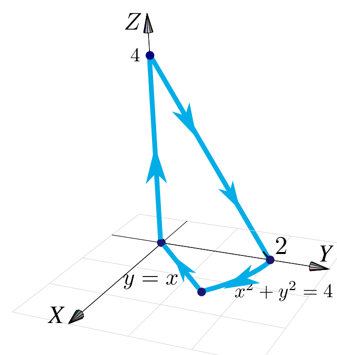
9.4.7 Calcule $\int_C x^2z\,dx - yx^2\,dy + 3xz\,dz$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (figura de la derecha).



9.4.8 Considere el campo de fuerzas

$\mathbf{F}(x,y,z) = 4xe^z\ \hat{\imath} + y\cos(z)\ \hat{\jmath} + 2x^2e^z\ \hat{\mathbf{k}}.$

Sea C la curva de la figura a la derecha. Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.



9.5 Campos conservativos. Independencia de la trayectoria.

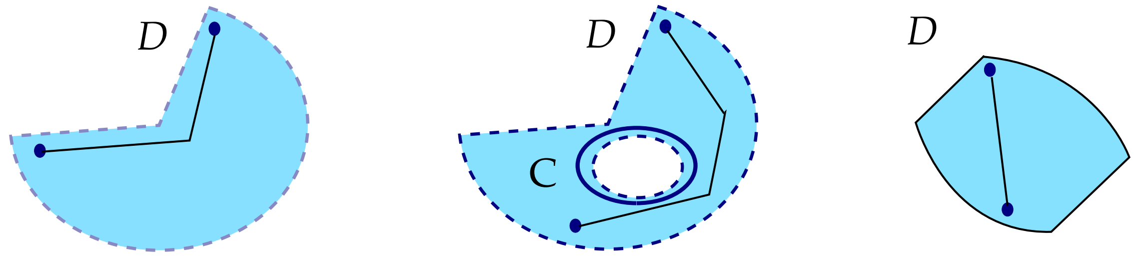
Una condición para que la integral de línea no dependa de la trayectoria que une a A con B es que exista φ tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$. En este caso podemos calcular la integral de línea usando cualquier camino que una A con B o también, usando el Teorema Fundamental para la integral de línea.

Definición 9.4

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *conexo* si todo par de puntos de D se pueden unir con una curva regular a trozos contenida en D. Es decir, D es de "una sola pieza".

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se dice *simplemente conexo* si toda curva cerrada simple C en D, encierra una región que está también en D. Es decir, los conjuntos simplemente conexos no tienen "agujeros".

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todo par de puntos $A, B \in D$, el segmento de recta que une A con B está contenido en D, es decir, $\{A + t(B-A) : t \in [0,1]\} \subset D$.



D es simplemente conexo, pero no convexo   D es conexo pero no simplemente conexo   D es convexo

Definición 9.5

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre un conjunto abierto U. Si φ es una función diferenciable sobre U tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, decimos que φ es una función potencial de $\mathbf{F}$. También decimos que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Si U es conexo y $\mathbf{F}$ conservativo, las funciones potenciales de $\mathbf{F}$ son iguales salvo constantes. También se puede mostrar que si $\mathbf{F} = (P, Q)$ y si $P_y \neq Q_x$, entonces $\mathbf{F}$ no es conservativo (no tiene función potencial). La condición $P_y = Q_x$ *es solo necesaria* para que $\mathbf{F}$ sea conservativo. La condición es *necesaria y suficiente* si U es *simplemente conexo*[2].

Teorema 9.1 (Test de derivadas mixtas).

Sea $\mathbf{F} = P\ \hat{\mathbf{\imath}} + Q\ \hat{\mathbf{\jmath}}$ es de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo D del plano. Decimos que $\mathbf{F}$ es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sea $\mathbf{F} = P\ \hat{\mathbf{\imath}} + Q\ \hat{\mathbf{\jmath}} + R\ \hat{\mathbf{k}}$ es de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo D del espacio. Decimos que $\mathbf{F}$ es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Teorema 9.2 (Teorema Fundamental para integrales de línea).

Sea $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 donde D es conexo y abierto. Sea C una curva regular a trozos en D parametrizada por $\mathbf{r}$ y sean $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$; se tiene

$$\int_C \nabla\varphi \cdot\, d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

[2] Un conjunto D es *simplemente conexo* si cualquier curva cerrada contenida en D tiene todo su interior contenido en D, es decir, si está formado por una sola pieza y no contiene "agujeros" (un punto cuenta como un agujero).

Teorema 9.3 (Campos conservativos).

Sea D simplemente conexo. Sea C una curva orientada y simple contenida en D y parametrizada por $\mathbf{r}$. Suponemos que C inicia en A y termina en B. Sea $\mathbf{F}$ un campo definido en D.

- $\mathbf{F}$ es conservativo $\iff$ existe φ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, sobre D.
- Si $\mathbf{F}$ es conservativo, existe φ de clase C^1 tal que $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$
- **(Independencia del camino)** Si $\mathbf{F}$ es conservativo, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde C' es cualquier curva, contenida en D, regular a trozos y que va de A a B.
- $\mathbf{F}$ es conservativo $\iff$ $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = 0$ para *cualquier* curva cerrada simple C contenida en D.

Observe que si $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = 0$ para *alguna* curva cerrada simple C, esto no significa que $\mathbf{F}$ sea conservativo. El la parte 3. del ejemplo 9.4 tenemos un campo con integral nula sobre una elipse pero que no es conservativo.

Ejemplo 9.22

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x\ln(yz) - 5ye^x)\ \hat{\mathbf{i}} + \left(\dfrac{x^2}{y} - 5e^x\right)\ \hat{\mathbf{j}} + \left(\dfrac{x^2}{z} + 2z\right)\ \hat{\mathbf{k}}$ y sea C una curva simple que une $A = (2,2,1)$ con $B = (3,1,e)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$.

Solución: $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en la región $D = \{(x,y,z):\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Esta región es simplemente conexa.

El campo es conservativo en esta región pues,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -5e^x + 2x/y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x/z = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Luego, podemos calcular la integral de línea usando un camino C' en D que una A con B o también podemos calcular una función potencial φ y usar el teorema fundamental para integrales de línea.

En este caso vamos a calcular la integral usando una función potencial φ. Como $\nabla\varphi = F$ entonces $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$.

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= 2x\ln(yz) - 5ye^x &&\Longrightarrow \quad \varphi(x,y,z) = \int 2x\ln(yz) - 5ye^x\,dx = x^2\ln(yz) - 5ye^x + K_1(y,z).\\
\varphi_y &= \frac{x^2}{y} - 5e^x &&\Longrightarrow \quad \varphi(x,y,z) = \int \frac{x^2}{y} - 5e^x\,dy \;=\; x^2\ln y - 5ye^x + K_2(x,z).\\
\varphi_z &= \frac{x^2}{z} + 2z &&\Longrightarrow \quad \varphi(x,y,z) = \int \frac{x^2}{z} + 2z\,dz \;=\; x^2\ln z + z^2 + K_3(x,y).
\end{aligned}$$

Observemos que $x^2\ln y + x^2\ln z = x^2\ln(yz)$. Recolectando primitivas podemos adivinar que

$$\varphi(x,y,z) = x^2\ln(yz) - 5ye^x + z^2 + K$$

lo cual podemos aceptar *después de verificar* que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$. Finalmente,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = -5e^3 + 11e^2 + 8 - 4\log(2) \approx -13.9207.$$

Ejemplo 9.23

Considere el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y,z) = 4xe^z\;\hat{\mathbf{i}} + \cos(y)\;\hat{\mathbf{j}} + 2x^2e^z\;\hat{\mathbf{k}}$. Sea C la curva de la figura. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{r}$.

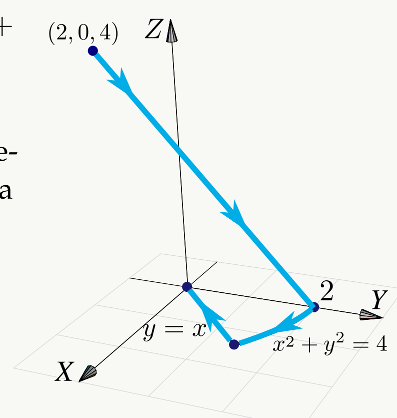


Figura 9.20: Curva C.

Solución: $\mathbf{F}$ es de clase C^1 sobre $D = \mathbb{R}^3$ que es simplemente conexa. Dichosamente no tenemos que integrar sobre la curva C pues $\mathbf{F}$ es conservativo. En efecto

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xe^z = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

En este ejemplo vamos a calcular la integral de dos maneras distintas: usando una función potencial y también usando un camino C'.

Primer Manera: Con un camino C' que inicia en $(2,0,4)$ y termina en $(0,0,0)$. El camino que hemos escogido se ve en la figura.

$$\begin{cases} -C_1 & : \quad \mathbf{r}_1(t) = (t,0,4) \quad \text{con} \quad t \in [0,2] \\ -C_2 & : \quad \mathbf{r}_2(t) = (0,0,t) \quad \text{con} \quad t \in [0,4] \end{cases}$$

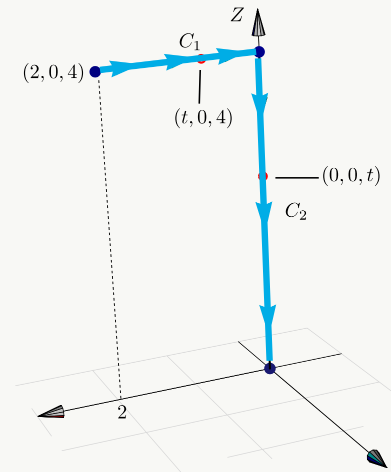


Figura 9.21: Curva $C' = C_1 \cup C_2$.

$$\begin{aligned} \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_0^2 \mathbf{F}(t,0,4) \cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt - \int_0^4 \mathbf{F}(0,0,t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt \\ &= -\int_0^2 (4e^4t, 1, 2e^4t^2) \cdot (1,0,0)\,dt - \int_0^4 (0,1,0) \cdot (0,0,1)\,dt \\ &= -\int_0^2 4te^4\,dt = -8e^4. \end{aligned}$$

Segunda Manera: Con una función potencial.

$$\begin{cases} \varphi_x = 4xe^z \implies \varphi(x,y,z) = \int 4xe^z\,dx = 2x^2e^z + K_1(y,z), \\ \varphi_y = \cos(y) \implies \varphi(x,y,z) = \int \cos y\,\,dy = \operatorname{sen} y + K_2(x,z), \\ \varphi_z = 2x^2e^z \implies \varphi(x,y,z) = \int 2x^2e^z\,dz = 2x^2e^z + K_3(x,y). \end{cases} \implies \varphi(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen} y + C$$

Finalmente, $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0,0,0) - \varphi(2,0,4) = -8e^4.$

N La condición *"simplemente conexo"* para que F sea conservativo. Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Se verifica que $P_y = Q_x$ pero

$$\int_C F \cdot dr = 2\pi \quad \text{si} \quad C \quad \text{es la circunferencia} \quad x^2+y^2 = 1,$$

lo cual indica que F no tiene función potencial.

Lo mismo pasa si consideramos $F(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ para $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

El problema en principio es que se requiere que F esté definido en una región simplemente conexa, *pero la explicación detallada de este fenomeno con el campo F es una cuestión topológica* que tiene que ver con homotopias. Un artículo sencillo de leer sobre esto, lo puede encontrar en V. Pati, "How Topology Governs Analysis" `http://www.isibang.ac.in/~statmath/stinc/database/notes/puncturedplane.pdf`

Ejercicios

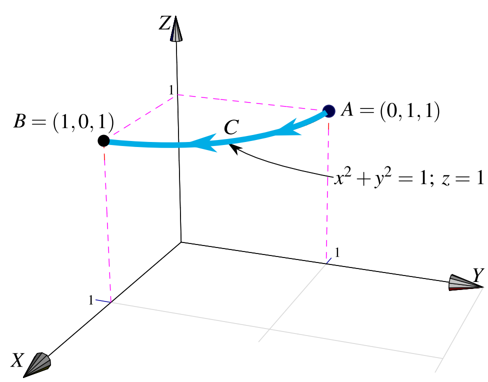
9.5.1 Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x,\ y,\ z) = (2xy + z^3)\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 3xz^2\ \mathbf{k}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.
b.) Hallar una función potencial de F.
c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(1,1,1)$ hasta $(1,1,2)$.

9.5.2 Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x,\ y,\ z) = (yz - y^2 + 2xz)\,\mathbf{i} + (xz - 2xy)\,\mathbf{j} + (xy + x^2)\ \mathbf{k}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.
b.) Hallar una función potencial de F.
c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(0,1,0)$ hasta $(-1,-1,0)$.

9.5.3 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x+5)\ \hat{\mathbf{\imath}} + (3y^2)\ \hat{\mathbf{\jmath}} + \dfrac{1}{z}\ \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{C}$ la trayectoria que va de $A = (0,1,1)$ hasta $B = (1,0,1)$ de acuerdo a la figura de la derecha.

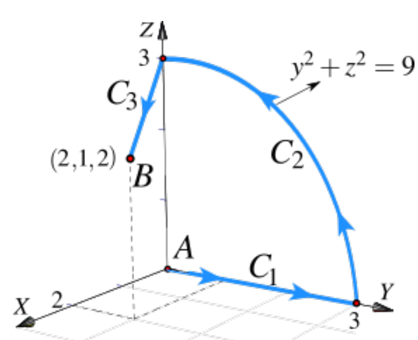


a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.
b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.
c.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$, ***sin usar*** una función potencial.

9.5.4 Sea $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz + y\cos(xy))\ \hat{\mathbf{\imath}} + (xz + x\cos(xy))\ \hat{\mathbf{\jmath}} + xy\ \hat{\mathbf{k}}$$

y $\mathbf{C}$ la trayectoria que va de A hasta B de acuerdo a la figura de la derecha.

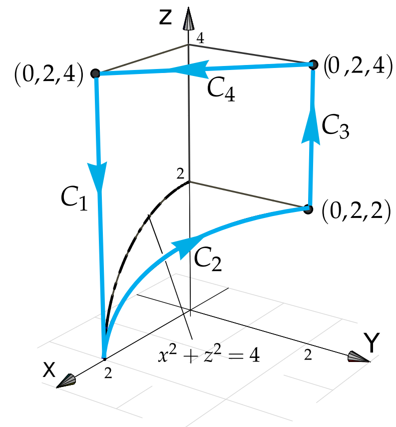


a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.
b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.
c.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ sin usar una función potencial.

9.5.5 Sea $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \hat{\mathbf{i}}\ -\ y\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}}$$

y $\mathbf{C} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ la curva que se muestra en la figura de la derecha.

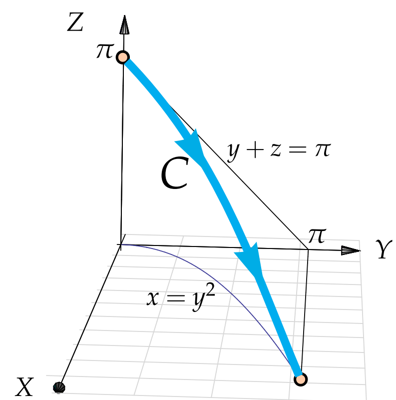


a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.

c.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ sin usar una función potencial.

9.5.6 Sea F un campo de fuerzas tal que

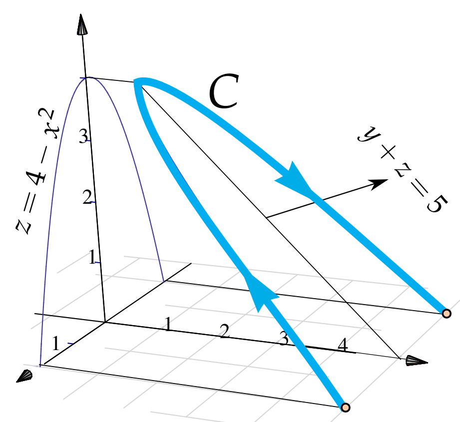


$$\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = \left(y\cos(xy) + \frac{1}{x+1},\ x\cos(xy),\ \frac{1}{z+1} \right).$$

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$

9.5.7 Sea F un campo de fuerzas tal que



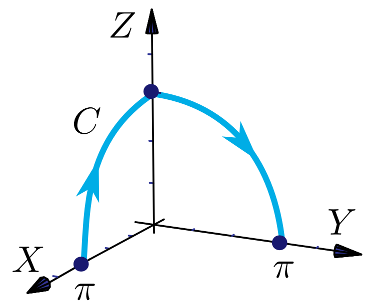
$$F(x,\ y,\ z) = -(2x+3x^2z^2)\,\mathbf{i} - (2y+3y^2z^4)\,\mathbf{j} - (2x^3z+4y^3z^3)\,\mathbf{k}$$

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$

9.5.8 Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^2 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\pi - y),\ xz^2 - \cos(\pi - y)\cos x,\ 2xyz)$ y sea C la curva que une los puntos $(\pi,0,0)$ con $(0,\pi,0)$, como se ve en la figura a.) Verifique que $\mathbf{F}$ es conservativo.

b.) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando una función potencial.



9.5.9 Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Verifique que $P_y = Q_x$ pero que sin embargo, $\int_C F \cdot dr = 2\pi$ si C es la circunferencia $x^2+y^2=1$.

9.5.10 Considere la curva orientada C y la superficie S tal y como se muestran en la figura a la derecha. La curva C es la unión de dos curvas: $C = C_1 + C_2$ y la superficie $S: \; y^2 = x - 1$ está limitada por el plano $S_1: \; y+z=2$.

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = \cos x \;\operatorname{sen} z \;\hat{\mathbf{\imath}} + 5\;\hat{\mathbf{\jmath}} + \cos z \;\operatorname{sen} x \;\hat{\mathbf{k}}$.

a.) Calcular la longitud de C_2

b.) Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$

c.) Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

d.) Calcule el área de la superficie S

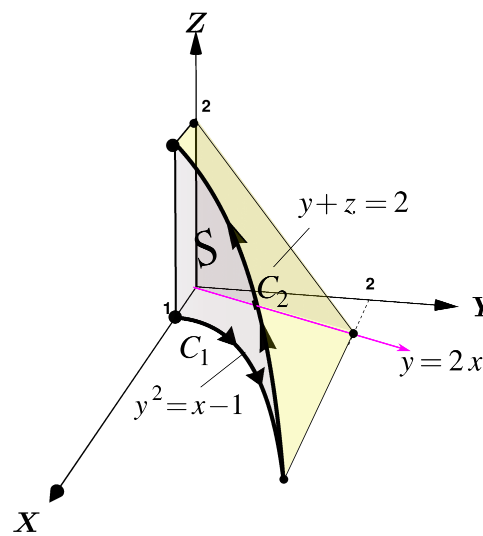


Figura 9.22: Curva $C = C_1 + C_2$ y superficie S

9.6 Teorema de Green (en el plano).

El siguiente teorema, llamado "Teorema de Green en el plano", aplica para regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, regulares a trozos. Una idea intuitiva, en términos de "circulación", se puede ver en la sección 9.8.

Teorema 9.4 (Teorema de Green en el plano).

Sean P y Q campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto S del plano XY. Sea C una curva simple cerrada regular a trozos y sea D la región encerrada por C (es decir, $C = \partial D$). Si D está contenida en S, se tiene la identidad

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

donde C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

• Intuitivamente, C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj si al caminar a lo largo de C la región D está siempre a la izquierda. Notar que $C = \partial D$ indica que C es la *frontera* de D.

Ejemplo 9.24

Calcular $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ si C es la curva de la figura.

Solución:

En este caso, $P(x,y) = y^2$ y $Q(x,y) = x^2$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green entonces,

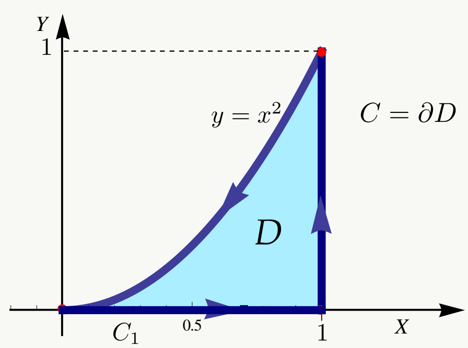
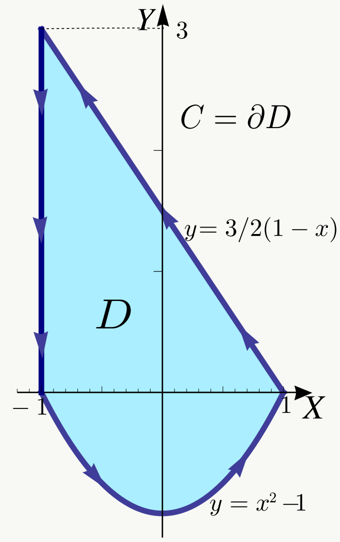


Figura 9.23: Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x - 2y\;dy\,dx \\
&= \int_0^1 2x^3 - x^4\,dx = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.25

Calcular $\int_C (x+y)\,dx + (3x+\arctan y)\,dy$ si C es la curva de la figura.

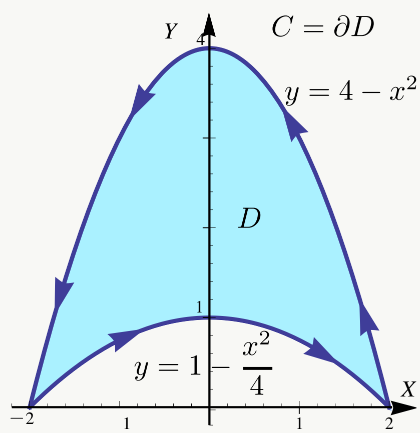


Solución: En este ejemplo, $P(x,y)=x+y$ y $Q(x,y)=3x+\arctan(y)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green, entonces

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)\,dx + (3x+\arctan y)\,dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} 3-1\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 5-3\,x-2\,x^2\,dx = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.26

Calcular $\int_C (x+\operatorname{arcsen} x)\,dx + (2x+\ln(y^2-3))\,dy$ si C es la curva de la figura.

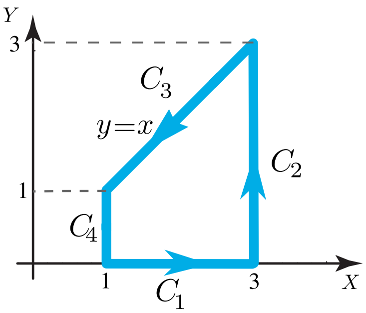


Solución: En este ejemplo, $P(x,y)=x+\operatorname{arcsen} x$ y $Q(x,y)=2x+\ln(y^2-3)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner

$$\begin{aligned}
\int_C (x+\operatorname{arcsen} x)\,dx + (2x+\ln(y^2-3))\,dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{1-x^2/4}^{4-x^2} 2\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} 6-\frac{3\,x^2}{2}\,dx = 16.
\end{aligned}$$

Ejercicios

9.6.1 Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\ \hat{\imath} - (x^2+y^2)\ \hat{\jmath}$. La curva C es la frontera del trapecio limitado por las curvas $y=0$, $x=1$, $x=3$ y $y=x$ como se muestra en la figura.



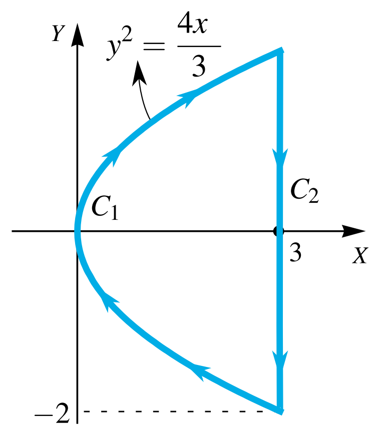
a.) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando el teorema de Green.

b.) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ **sin utilizar** el teorema de Green.

9.6.2 Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = x\ \hat{\imath} + (x+y^2)\,\hat{\jmath}.$$

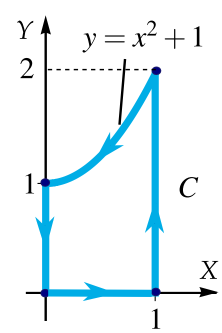
Calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



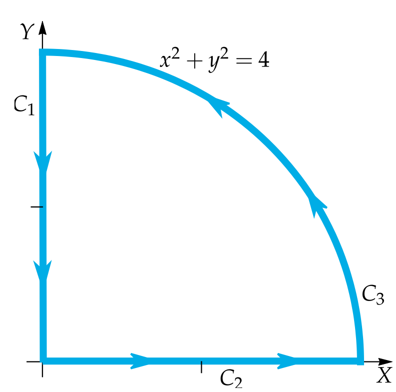
9.6.3 Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\ \hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$$

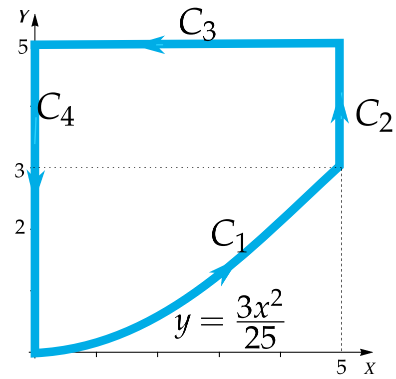
Calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{C}$ es la curva que se muestra en la figura a la derecha



9.6.4 Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, y y $F(x,\ y) = (xy^2 + \sqrt{2+\cos x})\,\mathbf{i} + (yx^2 - ye^{\operatorname{sen} y})\,\mathbf{j}$



9.6.5 Calcule $\int_C (4y + \arctan(x/5))\,dx + (x^2 + \ln(y+1))\,dy$ donde C es el camino representado en la figura a la derecha.



9.7 Área como una integral de línea.

Si $P(x,y) = 0$ y $Q(x,y) = x$ entonces $Q_x - P_y = 1$, aplicando el teorema de Green (si se cumplen las condiciones) obtenemos otra manera para calcular el área de A_D siendo la frontera de la región D una curva orientada contra-reloj.

$$\oint_C 0\,dx + x\,dy = \iint_D 1\,dA = A_D$$

Lo cual puede ser conveniente si la integral de línea no ofrece gran dificultad.

Teorema 9.5

Si D es una región plana limitada por una curva C, cerrada simple, regular a trozos y orientada contra-reloj, entonces el área de D viene dada por

$$A_D = \oint_C x\,dy$$

Ejemplo 9.27

Calcular el área de la región encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: Parametrizamos la elipse con $\mathbf{r}(t) = a\cos t\ \hat{\imath} + b\,\text{sen}\,t\ \hat{\jmath}$ con $t \in [0, 2\pi[$. Esta parametrización orienta la elipse contra-reloj. En este caso, $x = a\cos t$ mientras que $y = b\,\text{sen}\,t$ y $dy = b\cos t\,dt$,

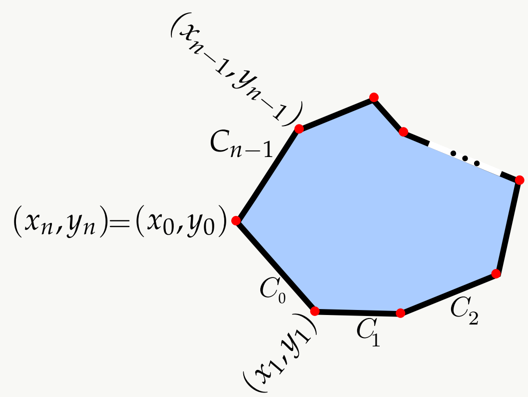
$$A_D = \int_C x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = \pi ab.$$

Ejemplo 9.28 (Área de un polígono simple).

Verifique que el área de un polígono simple de n vértices $\{(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ es

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

Asumimos que $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$.



Solución: El área del polígono es, por el teorema de Green en el plano,

$$A_P = \oint_C x\,dy \;=\; \iint_D 1\,dA$$

Aquí $C = C_1 + C_2 + ... + C_{n-1}$ y cada segmento C_i está parametrizado por

$$\mathbf{r}_i(t) = ((x_{k+1} - x_k)\,t + x_k\;,\;(y_{k+1} - y_k)\,t + y_k) \quad \text{con} \quad t \in [0,1],$$

entonces,

$$A_P = \oint_C x\,dy \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \oint_{C_i} (y_{k+1} - y_k)\,[(x_{k+1} - x_k)\,t + x_k]\;dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

9.8 Teorema de Stokes (Teorema de Green en el espacio).

Rotacional de un campo vectorial. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ entonces *el rotacional* de $\mathbf{F}$ es

$$\operatorname{Rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z,\, P_z - R_x,\, Q_x - P_y).$$

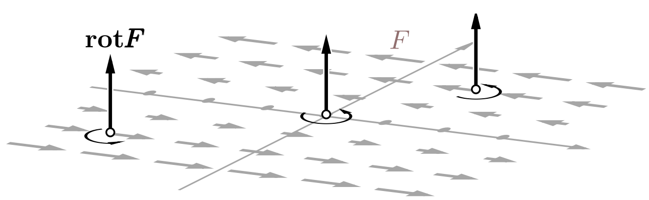
El gradiente, la divergencia y el rotacional se puede expresar en términos del *operador* "nabla",

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

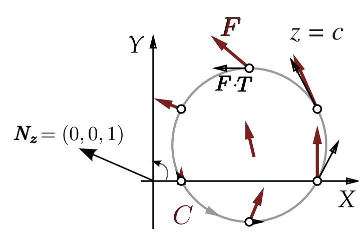
Este operador lo aplicamos como si fuera un vector. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f &&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
\nabla\cdot\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(P,Q,R) &&= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\\
\nabla\times\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\times(P,Q,R) &&= (R_y - Q_z,\, P_z - R_x,\, Q_x - P_y)
\end{aligned}$$

Circulación y vorticidad. La "vorticidad" es la tendencia de un fluido que se mueve a girar un objeto que es arrastrado por este fluido.



La "circulación" es el movimiento total del fluido a medida que viaja a lo largo de una curva. La circulación de un fluido sobre una circunferencia C en un plano $z = c$ se mide con la componente tangencial de $\mathbf{F}$, es decir, se mide con $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ donde $\mathbf{T} = \dfrac{r'(t)}{||r'(t)||}$.



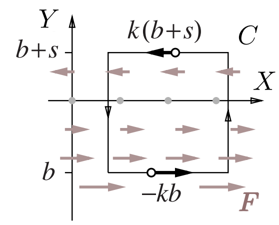
El "movimiento total" del fluido sobre C se obtiene integrando respecto a la longitud de arco,

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{r}$$

Si la circunferencia es $C:\ \mathbf{r}(t) = (a + r\cos t)\,\hat{\imath} + (a + r\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath} + c\,\hat{\mathbf{k}}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y si $\mathbf{F}(x,y,z) = (-ky, 0, 0)$, entonces $\operatorname{Rot}\mathbf{F} = (0,0,k)$ y

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{r} = k\pi r^2 = \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_z\, A_{\text{círculo}}$$

Sobre un cuadrado tenemos algo parecido. Sea C la frontera de un cuadrado, orientada contrareloj, en el plano $z = c$. Supongamos que cada uno de sus lados miden L y que estos lados son paralelos a los ejes. Como antes $\mathbf{F} = (-ky, 0, 0)$. En este caso, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ en loa lados paralelos al eje Y, En el lado de arriba ($y = b+L$) la velocidad tangencial es $k(b+L)$ y el lado de abajo ($y = b$) la velocidad tangencial es $-kb$; por lo tanto,



$$\text{circulación} \;=\; k(b+L)L - kbL = kL^2 \;=\; \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_z\, A_{\text{cuadrado}}$$

Con un (buen poco) de esfuerzo, podemos calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de rectángulos en los otros planos y generalizar este *comportamiento local* para llegar a la conclusión de que si S_1 es una superficie orientada, entonces

$$\begin{aligned} \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ a través de } \partial S_1 \;&=\; \text{Flujo de } \text{Rot}\,\mathbf{F} \text{ a través de } S_1 \\ \int_{\partial S_1} F\cdot\mathbf{T}\,ds \;&=\; \iint_{S_1} \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS \;=\; \iint_D \text{“circulación microscópica de } \mathbf{F}\text{” } dA \end{aligned}$$

Orientación positiva de $C = \partial S_1$ respecto a $\mathbf{N}$. El teorema de Stokes (o de Green el el espacio) requiere que la curva esté orientada “positivamente”, esto significa que la orientación de la curva debe ser tal que gire contra-reloj respecto al vector normal unitario $\mathbf{N}$.

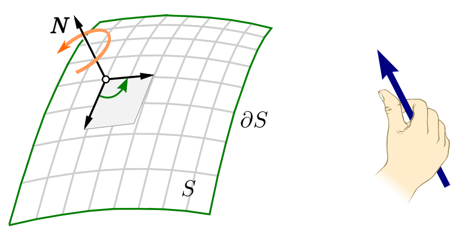


Figura 9.24: Orientación positiva de C respecto a $\mathbf{N}$.

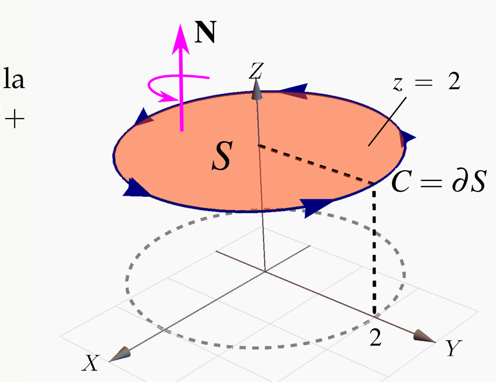
Teorema 9.6 (Teorema de Stokes).

Sea S_1 una superficie orientable, regular a trozos y limitada por una curva $C = \partial S_1$, cerrada y regular a trozos. Si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ es de clase C^1 sobre S_1 y si $\mathbf{N}$ (el vector normal unitario) es elegido de tal manera que C tiene orientación positiva, entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} \;=\; \iint_{S_1} \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

El teorema de Stokes se puede extender a dos o más curvas cerradas.

Ejemplo 9.29



Sea S la superficie de ecuación $z=2$ tal y como se muestra en la figura. La curva C es la frontera de S. Si $\mathbf{F}(x,y,z)=3y\ \hat{\mathbf{i}}-xz\ \hat{\mathbf{j}}+yz^2\,\hat{\mathbf{k}}$,

a.) Calcular $\int_C F\cdot\, d\mathbf{r}$ con la definición de integral de línea.

b.) Utilice el Teorema de Stokes para calcular $\int_C F\cdot\, d\mathbf{r}$.

Solución: Una parametrización para C es

$$\mathbf{r}(t)=\underbrace{2\cos t}_{x(t)}\ \hat{\mathbf{i}}+\underbrace{2\operatorname{sen} t}_{y(t)}\ \hat{\mathbf{j}}+\underbrace{2}_{z(t)}\ \hat{\mathbf{k}},\quad t\in[0,2\pi]$$

a.)

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot r'(t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}(3\cdot 2\operatorname{sen} t,-(2\cos t)(2),(2\operatorname{sen} t)(2)^2)\cdot(-2\operatorname{sen} t,2\cos t,0)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}-12\operatorname{sen}^2 t-8\cos^2 t\,dt=-20\pi
\end{aligned}$$

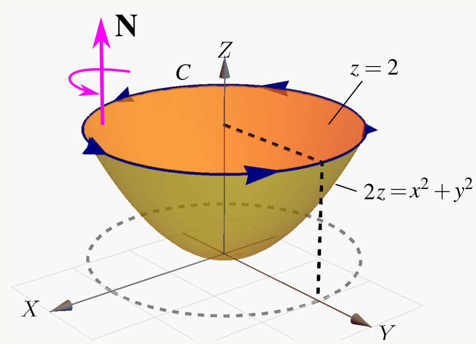
b.) La superficie es $S:\ z=2$ y la proyección es el círculo $x^2+y^2=4$. El vector $\mathbf{N}$ se debe tomar de acuerdo a la regla de la mano derecha: $\mathbf{N}=\dfrac{(-z_x,-z_y,1)}{||(-z_x,-z_y,1)||}=(0,0,1)$.

Luego, $\operatorname{Rot}\mathbf{F}=(x+z^2,\ 0,\ -3-z)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{R_{xy}}(x+z^2,0,-3-z)\cdot(0,0,1)\,dA = \iint_{R_{xy}}-3-z\,dA\\
&= \iint_{R_{xy}}-5\,dA,\quad \text{pues}\quad S:\ z=2\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -5r\,dr\,d\theta=-20\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.30

Utilice el teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = 3y\,\hat{\mathbf{i}} - xz\,\hat{\mathbf{j}} + yz^2\,\hat{\mathbf{k}}$ y C es la curva de intersección entre el paraboloide $2z = x^2+y^2$ y el plano $z=2$, tal y como se muestra en la figura.



Solución: La curva es borde de dos superficies, el plano $z=2$ y también del paraboloide $2z = x^2+y^2$. ¿Cuál superficie escoger, el paraboloide o el plano?.

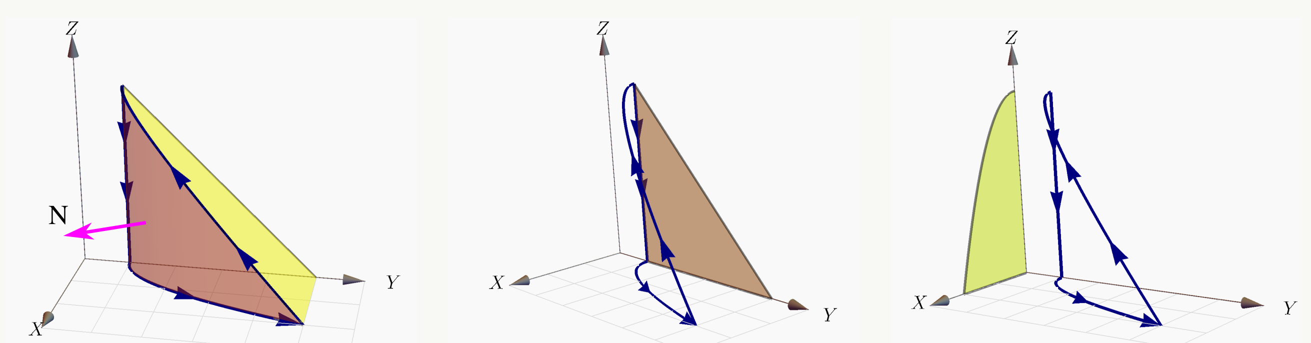
De acuerdo al Teorema de Stokes, se puede escoger cualquiera de las dos. La más simple es el plano $z=2$. Si $S: z-2=0$ entonces $\mathbf{N} = \pm(0,0,1)$. ¿Cuál signo se escoge?.

Las integrales $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y $\iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ tienen el mismo valor si $\mathbf{N}$ se escoge de acuerdo a la regla de la mano derecha (sino, difieren en el signo), en este caso particular y de acuerdo a la orientación de C, el que se debe escoger es $\mathbf{N} = (0,0,1)$.

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS \\
&= \iint_{\mathbf{r}_{xy}} (z^2+x,\ 0,\ -z-3)\cdot(0,0,1)\,dA, \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-z-3)r\,dr\,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2-3)r\,dr\,d\theta \;=\; -10\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} \;=\; -20\pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.31

Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, x, z^2)$. C es la frontera de la superficie $S_1: y = x^2+1$ limitada porlos planos $z = 5-y$ y $z=0$, como se ve en la figura.



Solución: Vamos a resolver el problema de dos maneras: Proyectando S_1 sobre XZ y proyectando S_1

sobre YZ.

Proyectando S_1 **sobre el plano** XZ. Como $S_1 : y = 1 + x^2$, un vector normal es $\mathbf{N}_1(x,y,z) = \pm(-y_x, 1, -y_z)$. El normal adecuado es $\mathbf{N}_1(x,y,z) = (y_x, -1, y_z) = (2x, -1, 0)$. En la figura aparece el vector $\mathbf{N}_1(1,2,2) = (2,-1,0)$. $\text{Rot}\,\mathbf{F} = (0, y, 1-z)$.

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS \\
&= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (0,y,1-z)\cdot(2x,-1,0)\,dzdx \\
&= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} -y\,dz\,dx = \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} -x^2-1\,dzdx = -48/5.
\end{aligned}
$$

Proyectando S_1 **sobre el plano** YZ. Como $S_1 : x = \sqrt{1-y}$, un vector normal es $\mathbf{N}_1(x,y,z) = \pm(1, -x_y, -x_z)$. El normal adecuado es $\mathbf{N}_1(x,y,z) = \left(1, \dfrac{-1}{2\sqrt{y-1}}, 0\right)$. $\text{Rot}\,\mathbf{F} = (0, y, 1-z)$.

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS \\
&= \int_1^5\int_0^{5-y} (0,y,1-z)\cdot\left(1, \frac{-1}{2\sqrt{y-1}}, 0\right)dzdy \\
&= \int_1^5\int_0^{5-y} -\frac{y}{2\sqrt{y-1}}dzdy = -48/5.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.32

Sea $S_1 : y = 4 - x^2 - z^2$ en el primer octante y $C = \partial S_1$. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, z, y)$

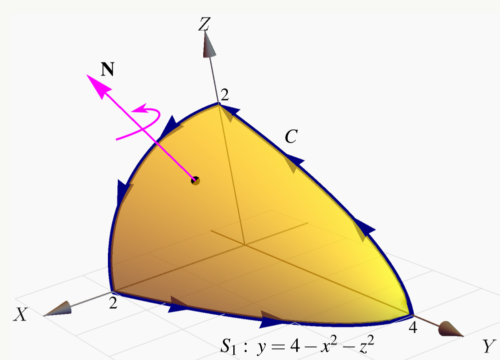


Figura 9.25: Curva C.

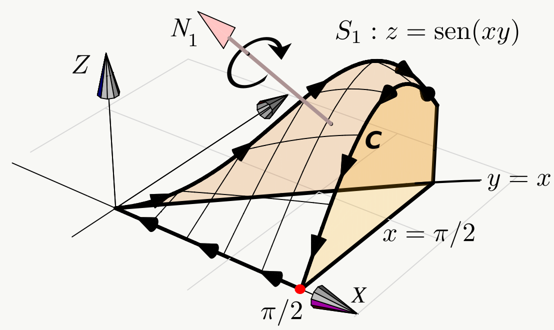
Solución: La ecuación de la superficie S_1 es $y = 4 - x^2 - z^2$. Vamos a proyectar sobre el plano XZ. El vector normal adecuado para que se cumpla la identidad del teorema de Stokes es $\mathbf{N}_1(x,y,z) = (-y_x, 1, -y_z) = (2x, 1, 2z)$. Para ver esto, tome un punto de la superficie S, digamos $(1,2,1)$. En este caso $N_1(1,2,1) = (2,1,2)$. Al trasladarlo a la superficie, vemos que es el vector adecuado.

- $\text{Rot}\,\mathbf{F} = (0, 0, -x)$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\; dS \\
&= \iint_D (0,0,-x)\cdot(2x,1,2z)\, dz\, dx \\
&= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} -2xz\, dz\, dx \;=\; -4.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.33

Sea Q el sólido limitado por las superficies $S_1\ :\ z=\operatorname{sen}(xy),\ S_2\ :\ x=\dfrac{\pi}{2}$ y $S_3\ :\ y=x$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ si $\mathbf{F}=(z,\ x,\ x)$ y C es la frontera de la superficie S_1.



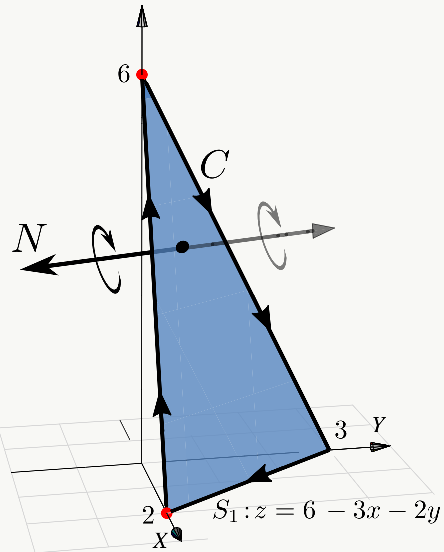
Solución: Como $S_1\ :\ z=\operatorname{sen}(xy)$, entonces $\mathbf{N}_1(x,y,z)=(-y\cos(xy),\ -x\cos(xy),\ 1)$. Tomamos un punto de la superficie, digamos $(1,1,\operatorname{sen}(1))$, en la figura de arriba se muestra la traslación del vector $\mathbf{N}_1(1,1,\operatorname{sen}(1))$; se nota que la curva C **no** está orientada positivamente, así que debemos tomar $\mathbf{N}_1=(y\cos(xy),\ x\cos(xy),\ -1)$.

Ahora, $\operatorname{Rot}\mathbf{F}=(0,0,1)$; proyectamos sobre el plano XY, la región de integración es el triángulo $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ y $0\leqslant y\leqslant x$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} (0,0,1)\cdot(y\cos(xy),\ x\cos(xy),\ -1)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} -1\, dy\, dx \;=\; \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.34

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y,\ 2x-z,\ y+z)$ y S_1 la porción del plano $3x+2y+z=6$ en el primer octante. Sea C la frontera de la superficie S_1. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.



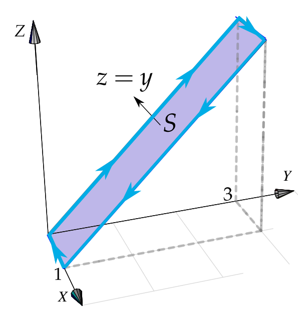
Solución: La ecuación de la superficie S_1 es $z = 6-3x-2y$. La curva está orientada a favor de reloj respecto al vector normal $N_1 = (-z_x, -z_y, 1) = (3,2,1)$, como se ve en la figura, por lo tanto debemos usar el vector $N_1 = (z_x, z_y, -1) = (-3,-2,-1)$. *Recordemos que no necesitamos hacerlo unitario por la cancelación de normas en la integral de superficie.*

- $\operatorname{Rot}\mathbf{F} = (2,0,1)$.

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS \\
&= \iint_D (2,0,1)\cdot(-3,-2,-1)\, dy\,dx \\
&= -\int_0^2\int_0^{3-3/2x} 7\, dy\,dx = -21.
\end{aligned}$$

Ejercicios

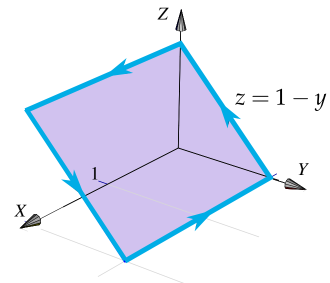
9.8.1 Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C es el camino que se representa en la figura a la derecha y además F es el campo de fuerzas: $F(x,\ y,\ z) = x^2\,\mathbf{i} + 4xy^3\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$.



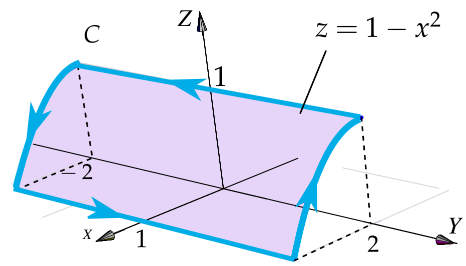
9.8.2 Considere el campo de fuerzas

$$F(x,\,y,\,z) = z^2 y\cos(xy)\,\mathbf{i} + z^2 x(1+\cos(xy))\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}(xy)\,\mathbf{k}.$$

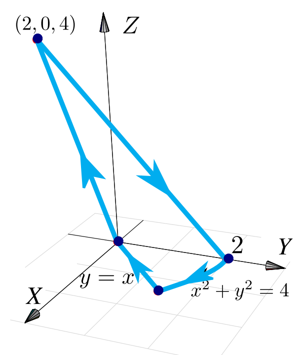
Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ si C es el camino que se indica en la figura a la derecha.



9.8.3 Usando el Teorema de Stokes calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde $F(x,\,y,\,z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$ y C es el camino indicado en la figura a la derecha.



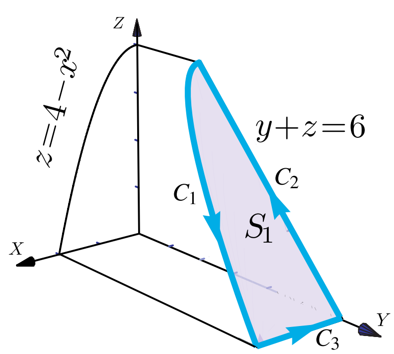
9.8.4 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = -y\ \hat{\mathbf{i}} + z\,\hat{\mathbf{j}} + (x+z)\ \hat{\mathbf{k}}$. Use el teorema de Stokes para calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde C es la curva de la figura que sigue.



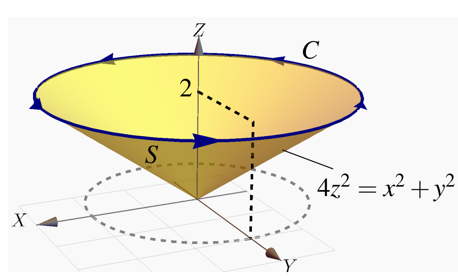
9.8.5 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = 2yz\ \hat{\mathbf{i}} - 4x\ \hat{\mathbf{j}} - 3z^2\ \hat{\mathbf{k}}$, y sea $C = C_1 + C_2 + C_3$ la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = 4 - x^2$ con el plano $y + z = 6$, tal y como se muestra en la figura.

a.) Calcular $\int_{\mathbf{C_1}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$

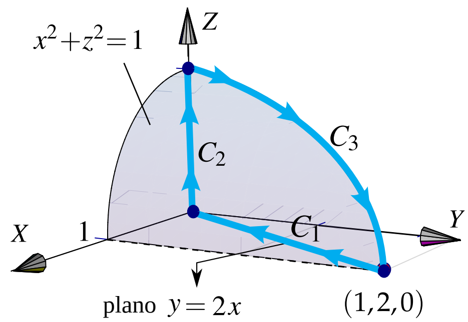
b.) Calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$



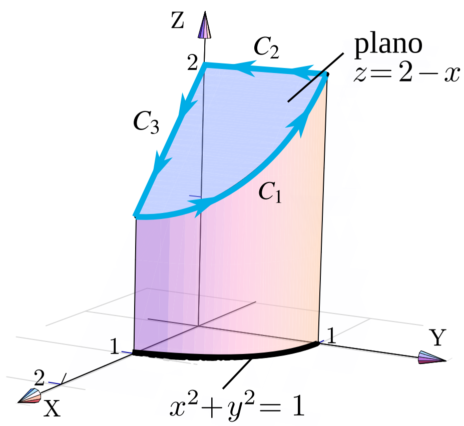
9.8.6 Plantee las integrales necesarias para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ si $F(x,\,y,\,z) = 3y\,\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$ y C es el camino indicado en la figura a la derecha.



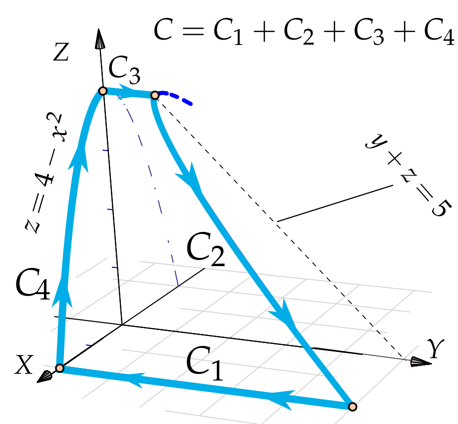
9.8.7 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2-y,\ yz-x,\ x+2y)$. Calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{C}$ es la curva que se muestra en la figura de la derecha.



9.8.8 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z,\ 2y,\ y-z)$. Calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$ tal y como se muestra en la figura de la derecha.



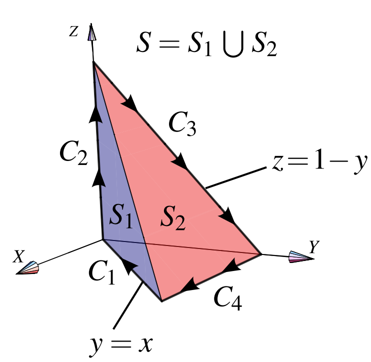
9.8.9 Calcule la integral $\int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (zx,\ zy,\ x)$ y además $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la curva que se muestra en la figura.

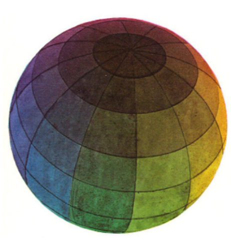


9.8.10 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\ \hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + x\,\hat{\mathbf{k}}$. Consideremos la superficie de la figura, $S = S_1 \bigcup S_2$ y la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ el borde de la superficie S.

a.) Calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando la definición de integral de línea.

b.) Calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando el Teorema de Stokes





Revisado: Agosto, 2020
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/

Bibliografía

[1] James J. Callahan. *Advanced Calculus. A Geometric View.* Springer. 1st Edition. 2010.

[2] Serge Lang. *Calculus of Several Variables.* Addison-Wesley. 1973.

[3] Klaus Weltner, Wolfgang J. Weber, Jean Grosjean y Peter Schuster. *Mathematics for Physicists and Engineers.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.

[4] Wilfred Kaplan. *Advanced Calculus.* Pearson; 5 edition. 2002.

[5] Sadri Hassani. *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields.* Springer. 2009.

[6] Susan J. Colley. *Vector Calculus.* Pearson Education, Inc., 4ta ed. 2012.

[7] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry.* 2nd edition. Springer-Verlag London Limited. 2010.

[8] B. Kusse.; E. Westwing. *Mathematical Physics. Applied Mathematics for Scientists and Engineers.* 2nd Edition. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2006.

[9] Claudio Pita R. *Cálculo Vectorial.* Prentice-Hall. 1995.

[10] Louis Brand. *Advanced Calculus. An Introduction to Classical Analysis.* Wiley & Sons, Inc. 1995.

[11] Tom Apostol. *Calculus.* Wiley. 1967

[12] J.M. Aarts. "*Plane and Solid Geometry.*" Springer. 2007.

[13] A. Chiang. "*Métodos Fundamentales de Economía Matemática*". McGraw-Hill. 1987

[14] J. L. Coolidge. "*A history of the conic sections and quadric surfaces*". Dover publications, Inc. 1968.

[15] E. Dowling. "*Matemáticas Para Economistas*". McGraw-Hill. 1982

[16] Eric W. Weisstein, "Quadratic Surface. "From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html`

[17] H. Eves. "*An introduction to the history of mathematics*". Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1969.

[18] Jerrold Marsden, Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial.* Addison-Wesley, 2004.

[19] M. Minoux. "*Mathematical Programing*". Wiley & Sons. New York. 1986

[20] Walter Mora F. "Gráficos 3D interactivos con Mathematica y LiveGraphics3D ". Revista digital Matemática, Educación e Intenet (`https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/`). Volumen 6, número 2. 2005.

[21] Marco Gutiérrez M. y Walter A. Mora F. *Vizualización interactiva. Vectores Rectas y Planos*. [2018] Revista digital Matemática, Educación e Intenet (`https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/`). Cartago, Costa Rica

[22] Jorge Poltronieri. *Cálculo Integral: Integración Múltiple.* Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.

[23] Jorge Poltronieri. *"Cálculo Integral: Integración de Línea y Superficie".* Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.

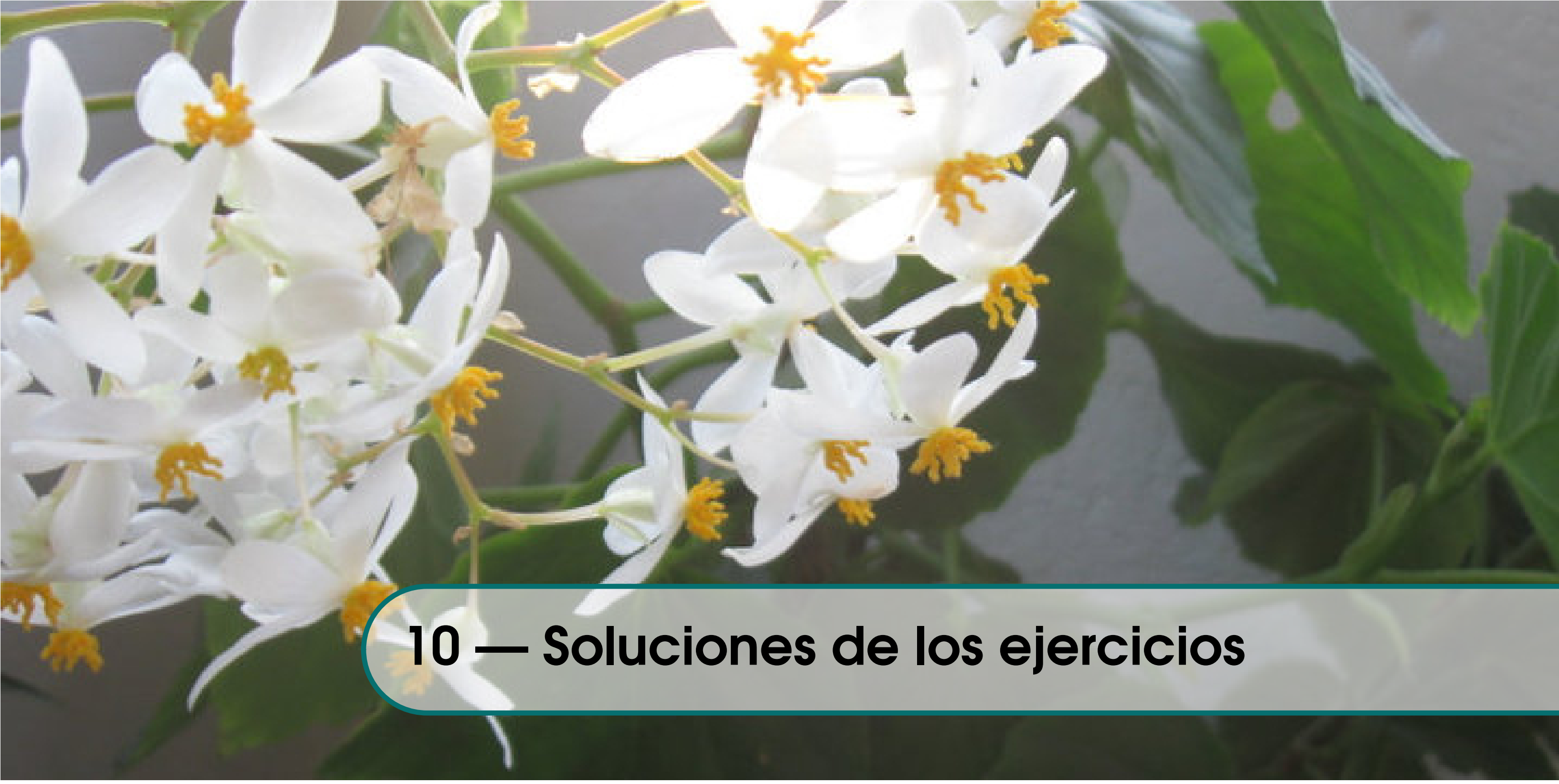
[24] Sherman Stein. *"Cálculo con Geometría Analítica"*. McGraw-Hill. 1984.

[25] Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye. *"A Course in Multivariable Calculus and Analysis"*. Springer. 2009

[26] Susan Colley. *"Vector Calculus"*. Pearson. 4ta ed. 2006.

[27] Rangarajan K. Sundaram. *A First Course in Optimization Theory.* Cambridge University Press. 1996.

[28] J. Vergara, "*Programación Matemática y Cálculo Económico*". Ed. Vicens-vives. España. 1975.



10 — Soluciones de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.7.1 1.

1.7.2 $\dfrac{1}{\sqrt{15}}(2,-1,1,3).$

1.7.3 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

1.7.4

1.7.5 $A=\frac{1}{2}\sqrt{738}\,(\mathrm{ul})^2$

1.7.6

1.7.7 0

1.7.8

1.7.9 $\frac{2\pi}{3}$

1.7.10 $\theta=\dfrac{\pi}{3}.$

1.7.11 $(-1,0,0)$

1.7.12 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

1.9.1

1.9.2

1.9.3 $\dfrac{x-1}{11}=\dfrac{y+2}{-10}=\dfrac{z-4}{3}$

1.9.4 $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{45}}$

1.9.5
Una solución general para los tres ítemes puede ser: $L_2(t)=(1,1,1)+t\,\mathbf{v}$ y $L_3(t)=(1,1,1)+t\,\mathbf{w}$. Los vectores $\mathbf{v}=(v_1,v_2,0)$ y $\mathbf{w}=(w_1,w_2,0)$ son una solución particular del sistema $\left\{\begin{array}{rcl}\mathbf{v}\cdot(1,-1,1)&=&0\\ \mathbf{w}\cdot(1,-1,1)&=&0\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}&=&0\end{array}\right.$

1.13.1
a.)
b.)
c.)

1.13.2

1.13.3

1.13.4

1.13.5

1.14.1 Se omite
a.) $(-1,0)$
b.) $(1,0)$
c.) $(1,\sqrt{3})$
d.) $(-1,-\sqrt{3})$
a.) $(5,-\pi/2)$
b.) $(5,\pi)$
c.) $(\sqrt{6},5\pi/4)$
d.) $(\sqrt{6},-\pi/4)$
e.) $(\sqrt{5},\arctan(\sqrt{3/2}))$

1.14.4 $r=2$

1.14.5 $r=4\cos\theta$

1.14.6 $r=4\,\text{sen}\,\theta+2\cos\theta$

1.14.7 $r=4\,\text{sen}\,\theta$

1.14.8 $r=\cos\theta$

1.14.9 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

1.14.10 $r=-2\cos\theta$

1.14.11 $r=2+\cos\theta$

1.14.12

a.)
b.)
c.)
d.)
e.)
f.)
g.)
h.)

Soluciones del Capítulo 2

2.2.1

a.) $2x^2-4x+1=y \;\Rightarrow\; 2(x-1)^2=y+1 \;\Rightarrow\; (x-1)^2=\dfrac{1}{2}(y+1).$

b.) $y^2=-\dfrac{8}{9}(x+\dfrac{3}{8})$

c.) $(y+1)^2=4(x+2)$

d.) $(x+1)^2=2(y-2)$

e.) $x^2=(y-2)$

2.2.2 El vértice es $(h,k)=(1,3)$. Por la posición del foco se deduce que el eje es paralelo al eje X y la parábola abre hacia la derecha. Entonces la ecuación canónica es $(y-3)^2=4p(x-1)$. Como $p=||(2,3)-(1,3)||=1$, la ecuación canónica es $(y-3)^2=4(x-1)$.

2.2.3 La ecuación canónica es de la forma $(y-k)^2=4p(x-h)$. Como contiene los tres puntos, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl}(0-k)^2&=&4p(0-h)\\(2-k)^2&=&4p(-1-h)\\(-2-k)^2&=&4p(-2-h)\end{array}\right. \implies h=\frac{1}{24},\; p=-\frac{2}{3} \;\text{ y }\; k=\frac{1}{3}$$

Por tanto, la parábola es $\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=4\cdot-\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{1}{24}\right)$

2.2.4 Como $(h,k)=(-1,1)$ y $p=1$, entonces $(x+1)^2=4(y-1)$.

2.2.5 La ecuación es $(y-k)^2=4p(x-h)$ y abre a la izquierda. El vértice es $(h,k)=(5,4)$ y $p=-2$. Entonces la ecuación canónica es $(y-4)^2=-8(x-5)$.

2.2.6 $(x-2)^2=2(y-3)$.

2.2.7 De acuerdo a **d.)** la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Por la posición del vértice y el punto $(8,b)$, solo podría abrir hacia arriba. El vértice es $(h,k)=(2,0)$ por lo que lo que la ecuación de la parábola es $(x-2)^2=4p(y-0)$; $p>0$.

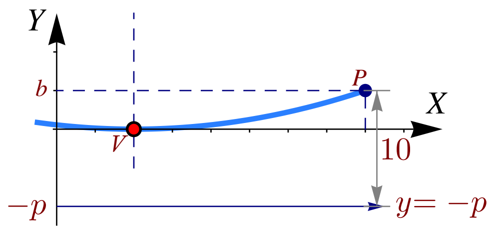
La directriz es $y=k-p=-p$. Para determinar p y b tenemos dos datos

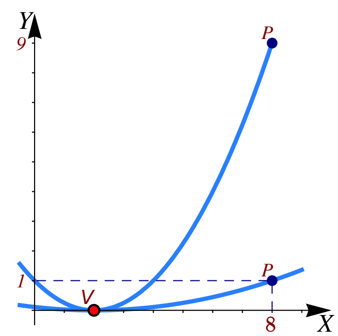
- La distancia de $(8,b)$ a la directriz es $10,$ es decir $b+p=10$

- El punto $(8,b)$ está en la parábola, es decir, $(8-2)^2=4p(b)$

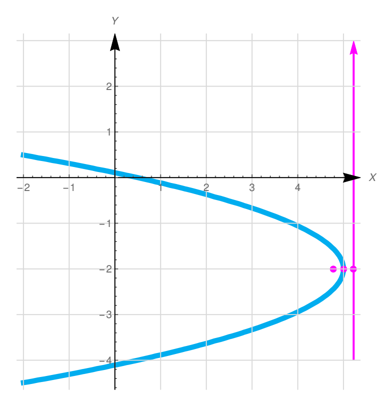
$$\begin{array}{rcl} b & = & 10-p \\ 36 & = & 4pb \implies 36=4p(10-p) \implies 36-40p+4p^2=0 \end{array}$$

Con lo que $p=1$ o $p=9$. Por lo tanto, las parábolas que cumplen estas condiciones son $(x-2)^2=4y$ (cuando $b=1$) o $(x-2)^2=36y$ (cuando $b=9$). Ambas parábolas se muestran en la figura que sigue.





2.2.8 $(y+2)^2=4\cdot-\frac{2}{9}(x-5)$



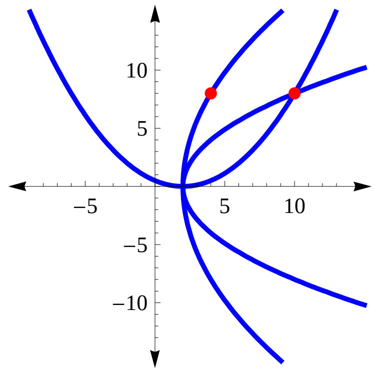
2.2.9 El vértice es $(h,k)=(2,0)$. Como $b>2,$ la parábola solo podría abrir hacia arriba o hacia la derecha.

- Si abre hacia arriba, la ecuación canónica es $(x-2)^2=4py$. En este caso, como $8+p=10 \implies p=2$ y entonces $b=10$. En este caso tenemos la pará]bola $(x-2)^2=8y$.

- Si abre hacia la derecha, la ecuación canónica es $y^2=4p(x-2)$. En este caso, como la directriz tiene ecuación $x=2-p,$ tenemos

$$\begin{cases} b-(2-p) & = & 10 \\ 64 & = & 4p(b-2) \end{cases} \implies p=8;\ \ b=4 \ \ \text{o} \ \ p=2;\ \ b=10.$$

Las tres parábolas son $(x-2)^2=8y;\ \ y^2=32(x-2)$ y $y^2=8(x-2)$.



2.2.10 Si el foco está en la directriz tendríamos una recta (una cónica degenerada).

2.2.11 Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c-y &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c-y \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}-y \;=\; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}-y \quad \text{si} \quad \Delta=b^2-4ac. \end{aligned}$$

Entonces, $ax^2+bx+c-y=0 \implies \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y+\frac{\Delta}{4a}\right)$ y el vértice es $\left(-\frac{b}{2a},\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

2.2.12 Se trata de una parábola con foco en $(2,3)$ y directriz con ecuación $x=4$. Por lo tanto, la parábola tiene vértice en $(3,3)$ y abre hacia la izquierda. Su ecuación es $(y-3)^2=-4(x-3)$.

2.3.1 $\dfrac{(x+1)^2}{1/4}+\dfrac{(y-5/4)^2}{1}=1.$

2.3.2

a.) $\dfrac{(y-1)^2}{4}+\dfrac{(x+2)^2}{\frac{6}{5}}=1$

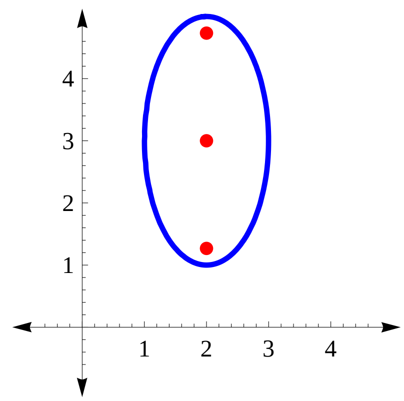
b.) $\dfrac{(x+4)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

c.) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1$

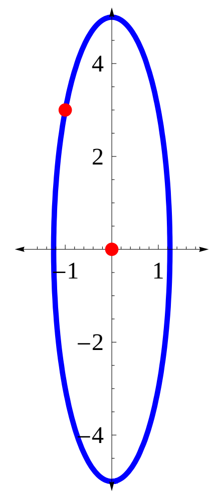
d.) $x^2+\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$

2.3.3 La ecuación canónica la obtenemos completando cuadrados.

- Ecuación canónica: $\dfrac{(y-3)^2}{4}+\dfrac{(x-2)^2}{1}=1.$
- Centro: $(h,k)=(2,3)$
- $a^2=4,\ b^2=1$ y $c=\sqrt{3}$
- Focos: $(2,\ 3\pm\sqrt{3})$
- No hay intersección con ejes.



2.3.4 Los datos los podemos representar en la figura de la derecha.



Como el centro es $(h,k)=(0,0)$, entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Esto es así pues el vértice $(0,5)$ nos indica que el eje mayor está (en este caso) sobre el eje Y.

Ahora, como $(0,5)$ es un vértice y el centro está en $(0,0)$, se sigue que $a=5$ y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{25}=1$$

Por otra parte, como $(-1,3)$ está en la elipse

$$\frac{(-1)^2}{b^2}+\frac{3^2}{25}=1$$

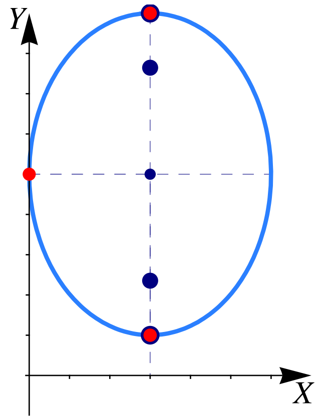
de aquí, despejando, obtenemos $b^2=\dfrac{25}{16}$. Finalmente, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}}+\frac{y^2}{25}=1$$

2.3.5 El eje mayor de la elipse es paralelo al eje Y. Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces $b=3$. Como los vértices están en $(3,1)$ y $(3,9)$, entonces el centro es $(h,k)=(3,5)$ y por tanto $a=4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

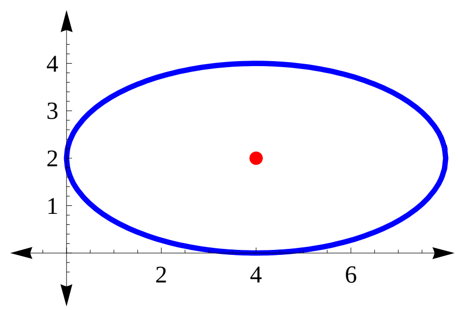
La gráfica de la elipse se muestra en la figura de la derecha. Solo hay una intersección con el eje Y en $y=5$.



2.3.6 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.

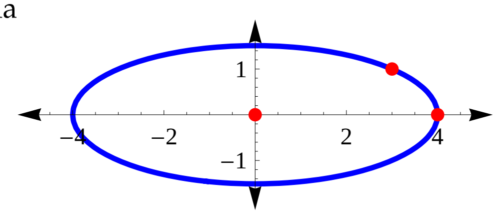
Como la elipse es tangente a los ejes en el primer cuadrante, el otro vértice debe ser $(0,2)$ (su eje mayor no puede ser paralelo al eje Y pues su semieje menor sería de 8 unidades y el mayor de 1 unidad!). Luego, $(h,k) = (4,2)$, $a = 4$ y $b = 2$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$



2.3.7 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.
Según los datos, $(h,k) = (0,0)$ y $(4,0)$ es el vértice de la derecha, entonces $a = 4$ y $(3,1)$ satisface la ecuación de la elipse:
$\frac{3^2}{16} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \implies b^2 = \frac{16}{7}$. La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{7}} = 1.$$

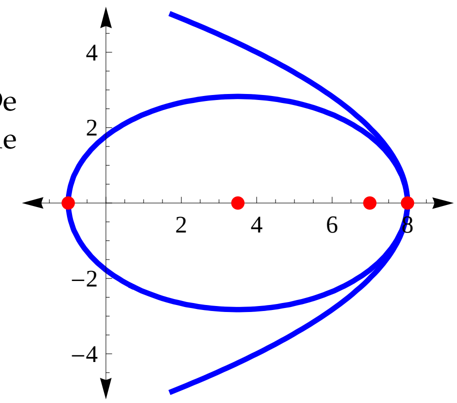


- Centro: $(h,k) = (0,0)$,
- $c = \sqrt{\frac{96}{7}}$,
- focos: $(0 \pm \sqrt{\frac{96}{7}}, 0)$,
- vértices: $(4,0)$ y $(-4,0)$.

2.3.8 $$(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

- Centro: $(h,k) = (2,1)$,
- $c = \sqrt{8}$,
- focos: $(2, 1 \pm \sqrt{8})$
- vértices: $(2, 1 \pm 3)$.

2.3.9 La elipse se puede ver en la figura de la derecha.



La ecuación canónica de la parábola es $y^2 = -4(x-8)$. De esta ecuación se obtiene el otro foco y un vértice derecho de la elipse. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3.5)^2}{4.5^2} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

- Centro: $(h,k) = (3.5, 0)$,
- $c = 3.5$,
- focos: $(0,0)$ y $(7,0)$,
- vértices: $(-1,0)$ y $(8,0)$.

2.3.10 La ecuación canónica es $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{55} = 1$.

- Centro: $(h,k) = (0,0)$,
- $c = 3$,
- focos: $(\pm 3, 0)$,
- vértices: $(\pm 8, 0)$.

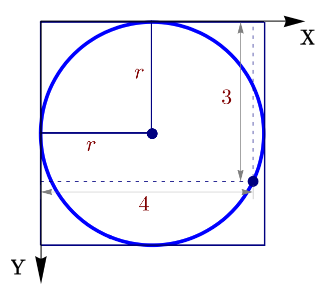
2.3.11 La ecuación canónica es $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$. Por lo tanto es una elipse.

- Centro: $(h,k) = (2,-3)$,
- $c = \sqrt{7}$,
- focos: $(2, -3 \pm \sqrt{7})$,
- vértices: $(2, -3 \pm 4)$.

2.3.12 Si consideramos los lados del cuadrado como ejes coordenados, el círculo inscrito es un círculo con centro en (r,r) y $(x,y) = (3,4)$ es un punto en la circunferencia.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2, \\ (3-r)^2 + (4-r)^2 &= r^2, \\ r &= 7 - 2\sqrt{6} \approx 2.1 \\ r &= 7 + 2\sqrt{6} \approx 11.8 \end{aligned}$$



Como $r < 4$ entonces $r = 7 - 2\sqrt{6}$.

2.3.13

a.) **C** es una parábola de ecuación canónica

$$(x-2)^2 = -8(y+1).$$

b.) Centro de la elipse $(2,-1)$

c.) $d(F_1, F_2) = 4 \implies 2c = 4 \implies c = 2$

d.) $d(F_1, V_1) = 3 \implies a - c = 3 \implies a = 5$

e.) $b^2 = 21$

f.) Ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{21} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

g.) Vértices $(2,4)$, $(2,-6)$.

h.) Focos $(2,1)$, $(2,-3)$.

2.3.14

De la información que nos dan deducimos:

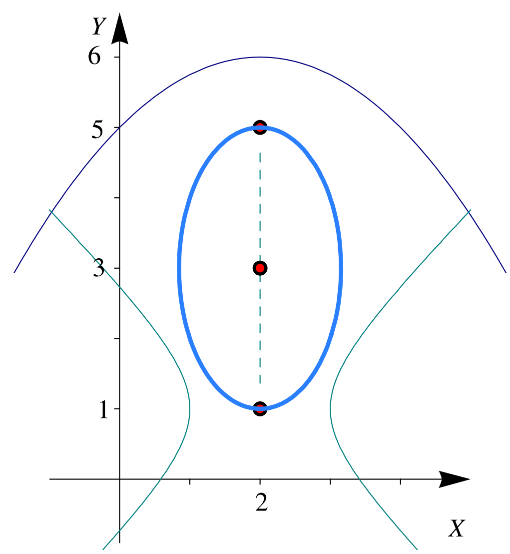
- El foco de la parábola $(x-2)^2 = -4(y-6)$ es $V_1 = (2,\ 6-1) = (2,5)$ pues $p = -1$.
- El centro de la hipérbola $(x-2)^2 - (y-1)^2 = 1$ es $V_2 = (2,1)$.
- Los vértices nos indican que la elipse tiene centro en $(h,k) = (2,3)$ y su ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

- Como la elipse contiene el punto $(1,2)$,

$$\frac{(1-2)^2}{b^2} + \frac{(2-3)^2}{2^2} = 1 \implies b^2 = \frac{4}{3}.$$

La ecuación canónica de la elipse es $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{4}{3}} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$



2.3.15

2.4.1

a.) La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Como $c = 10$, los focos son $(\pm 10, 0)$ y los vértices son $(\pm 8, 0)$. La ecuación de las asíntotas es $3x - 4y = 0$ y $3x + 4y = 0$.

b.) La ecuación canónica es

$$(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

c.) La ecuación canónica es

$$(x+1)^2 - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

d.) La ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{3/4} - \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

2.4.2 La ecuación canónica es $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{7} = 1.$

2.4.3 El centro es $(-4,1)$. $a=6$ y $b=4$. La ecuación canónica es $\dfrac{(x+4)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1.$

2.4.4 La ecuación canónica es $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$. Vértices en $(-3,2)$, $(5,-2)$ y focos en $(-4,-2),(6,-2)$. Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{4}(x-1)-2$.

2.4.5 La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Como $c=\sqrt{13}$, los focos son $(3\pm\sqrt{13},2)$ y los vértices son $(3\pm 3,2)$.

2.4.6 Como $\sqrt{3}\cdot 4 > 6$, la asíntota $y=\sqrt{3}\,x$ va por arriba del punto $(4,6)$. Esto nos dice que la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Como $(4,6)$ está en la hipérbola y como $b^2 = 3a^2$, entonces $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{36}{3a^2} = 1 \implies a = 4$. Así, la ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

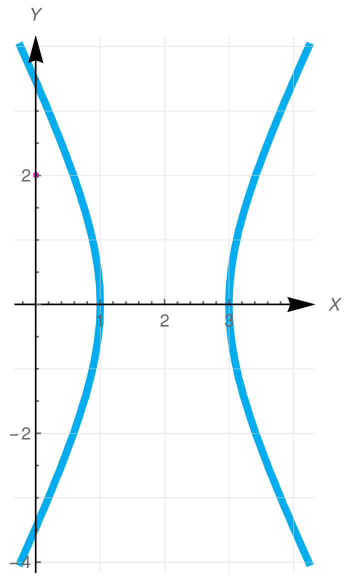
2.4.7 La opción que sirve es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Evaluando los puntos se obtiene que la ecuación canónica es $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

La opción $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ se descarta pues se evaluando los puntos se obtiene $a^2 = -6$.

2.4.8 Según los datos, la ecuación de la cónica es

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como una asíntota es $y = 2x - 4 \implies \dfrac{b}{a} = 2$, entonces tenemos



$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{b}{a} & = & 2 \\ 5 & = & a^2+b^2 \end{array}\right. \implies a=1 \;\wedge\; b=2$$

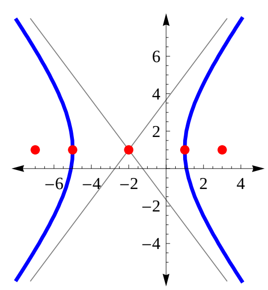
$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$

2.4.9 La parábola tiene ecuación canónica $(y-1)^2 = -8(x+2)$, por tanto el centro de la hipérbola es $(-2,1)$.

Como un foco esta en $(3,1)$ y un vértice esta en $(1,1)$, el eje transversal es paralelo al eje X, $a=3$, $c=5$ y $b=4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Sus focos son $(3,1)$, $(-7,1)$ y sus vértices $(1,1)$, $(-5,1)$. Las asíntotas son $y = \pm\frac{4}{3}(x+2)+1$. La hipérbola interseca al eje X en $x \approx -5.093$ y $x \approx 1.0933$.



2.4.10

a.) Como $k>0$ y $k-16>0$, se trata de una elipse.

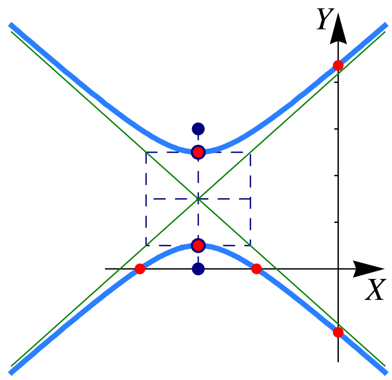
b.) Como $k>0$ y $k-16<0$, se trata de una hipérbola.

c.) Como $k<0$ y $k-16<0$, la ecuación no tiene solución, es decir, no es la ecuación de una curva.

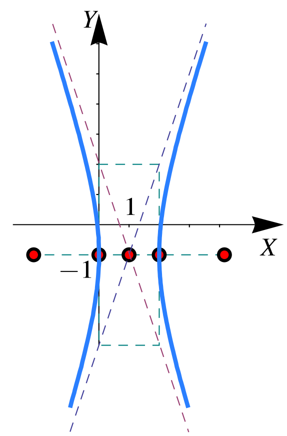
2.4.11 Se trata de un hipérbola con focos A y B y por tanto $c = 1.5$ y el centro es $(h,k) = (-3,\ 3/2)$. Como $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$ entonces $a = 1$. y entonces $b^2 = 5/4$. Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} - \frac{(x+3)^2}{5/4} = 1$$

Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5/4}}(x+3)+3/2$. La intersección con los ejes son $y \approx -1.363$, $y \approx 4.363$, $x \approx -4.25$ y $x \approx -1.75$,



2.4.12 Se trata de una hipérbola.



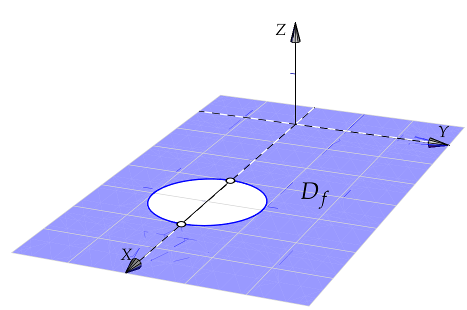
La ecuación canónica es $(x-1)^2 - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1.$

- Centro $(1,-1)$,
- $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$,
- $c^2 = 1+9 \implies c = \sqrt{10}$,
- Focos $(1\pm\sqrt{10},\ -1)$.
- Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{1}(x-1)-1$.

2.4.13

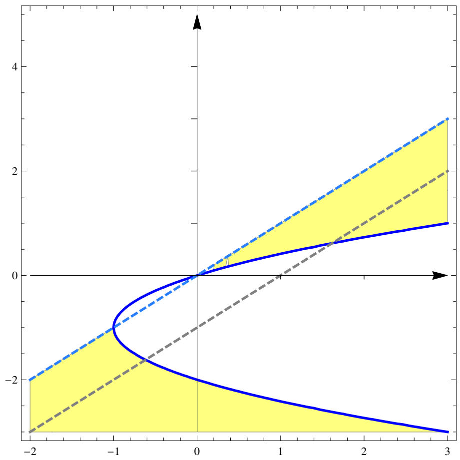
Soluciones del Capítulo 3

3.2.1 $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad (x-4)^2+y^2 \geqslant 1 \quad \text{y} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad y \neq 0.\}$ Este dominio corresponde al exterior de la elipse (incluye el borde) y se debe excluir los ejes X y Y (líneas punteadas).



3.2.2 Como $\log(1) = 0$ debemos excluir los puntos para los cuales $x-y=1$.

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad (y+1)^2 \geqslant x+1 \quad \text{y} \quad y \neq x-1 \quad \text{y} \quad y < x\}$

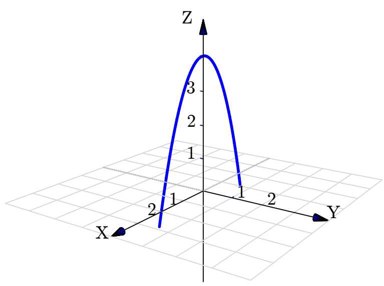


3.2.3 Se omite

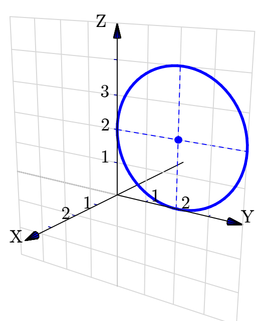
3.2.4 Se omite

3.3.1

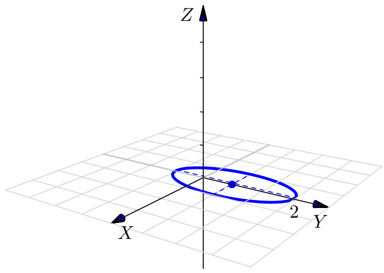
a.) $z = 4 - x^2;\ y = 0.$



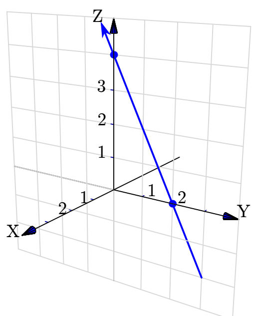
b.) $(z-2)^2 + (y-2)^2 = 4;\ x = 0.$



c.) $\dfrac{(y-1)^2}{4} + x^2 = 1;\ z = 0$



d.) $z+2y=4;\ x=0$

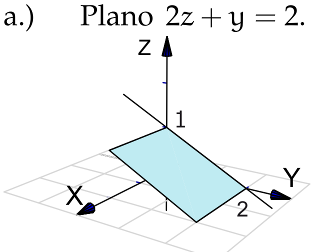


e.)
f.)
g.)

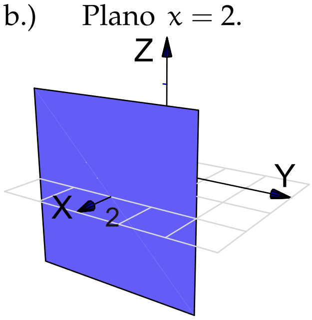
3.3.2 Es un punto, $P=(1,-2,0)$

3.3.3

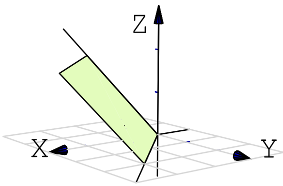
a.) Plano $2z+y=2$.



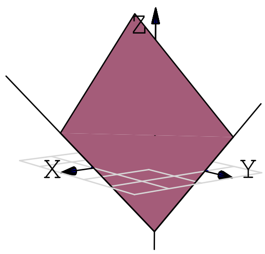
b.) Plano $x=2$.



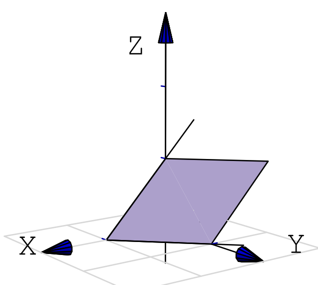
c.) Plano $x-y-z=0$. Podemos usar las rectas $y=x$ y $z=x$.



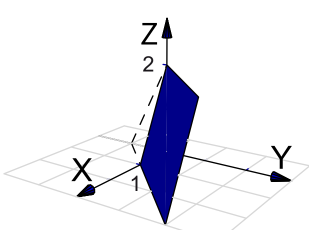
d.) Plano $x+y-z=2$. Podemos usar las intersecciones con los ejes: $x=2$; $y=2$; $z=-1$.



e.) Plano $2x+2y+2z=2$. Podemos usar las intersecciones con los ejes: $x=1$; $y=1$; $z=1$.

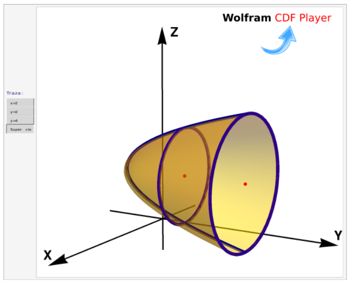


3.3.4 Plano $4x-4y+2z=4$ en el primer octante. En este caso el plano lo dibujamos desde el segmento que va de $x=1$ hasta $z=2$.

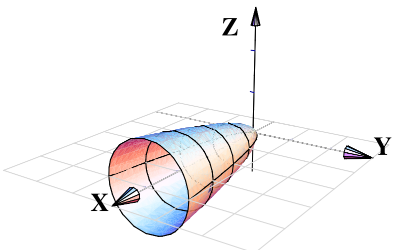


3.4.1

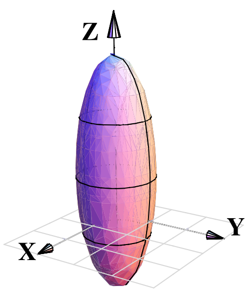
a.) $y=(x-2)^2+(z-2)^2$



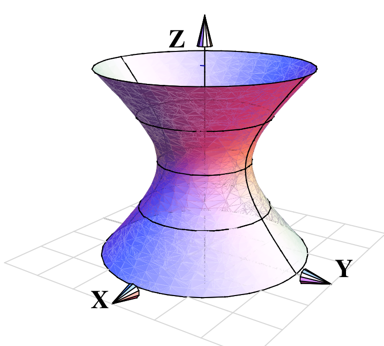
b.) $z^2 + y^2 = x/4$



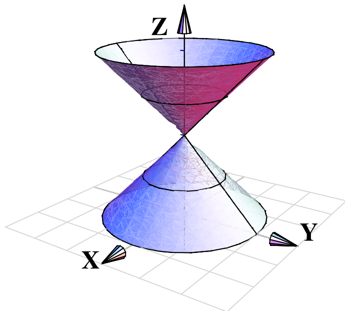
c.) $x^2 + y^2 + (z-1)^2/9 = 1$



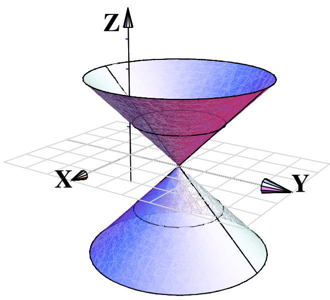
d.) $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$



e.) $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$

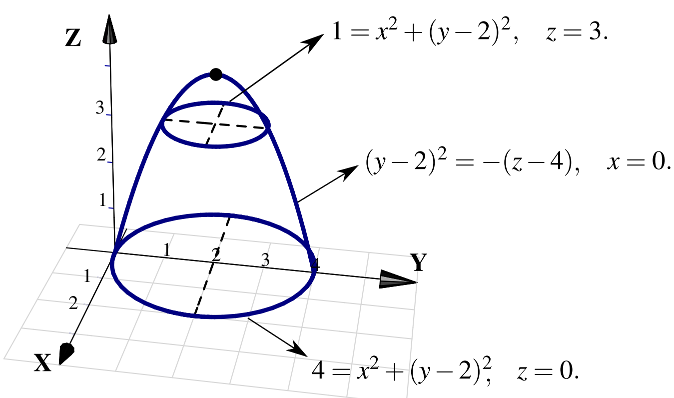


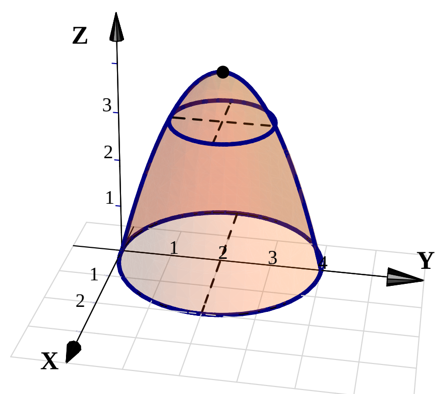
f.) $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$



3.4.2 Se trata del paraboloide $4 - z = x^2 + (y-2)^2$. El vértice es $(0,2,4)$.

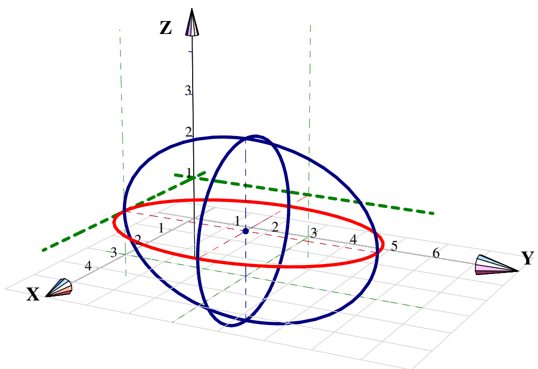
a.) Si $x = 0$ entonces $4 - z = (y-2)^2$. Por tanto la traza es $(y-2)^2 = -(z-4), \quad x = 0.$
b.) Si $z = 3$ obtenemos la traza $1 = x^2 + (y-2)^2, \quad z = 3.$
c.) Si $z = 0$ obtenemos la traza $4 = x^2 + (y-2)^2, \quad z = 0.$

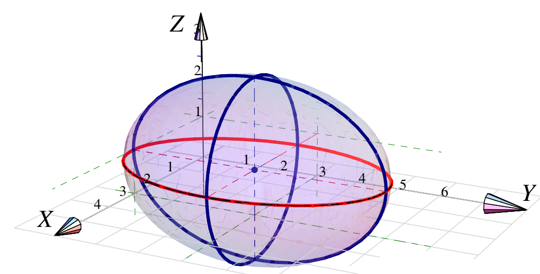




3.4.3 Se trata de un elipsoide con centro en $(3,3,1)$. Una estrategia de dibujo es la siguiente: Los elipsoides se puede dibujar con tres elipses (trazas). En este caso, se pueden usar $x = 3$; $y = 3$ y $z = 1$ (estos valores corresponden al centro de la cuádrica).

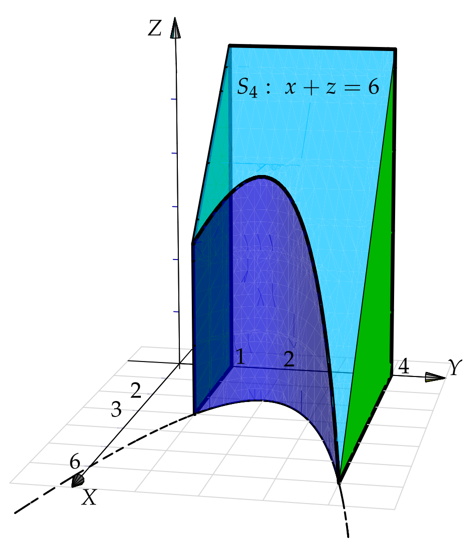
- La traza $x = 3$ corresponde a la elipse $\dfrac{(y-3)^2}{9} + \dfrac{(z-1)^2}{4} = 1,\ x = 3;$ que se dibuja en el plano $x = 3$.
- Si $y = 3$ obtenemos la elipse (circunferencia) $(x-3)^2 + (z-1)^2 = 4,\quad y = 3;$ que se dibuja en el plano $y = 3$.
- Si $z = 1$ obtenemos la elipse $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1,\ z = 1;$ que se dibuja en el plano $z = 1$.



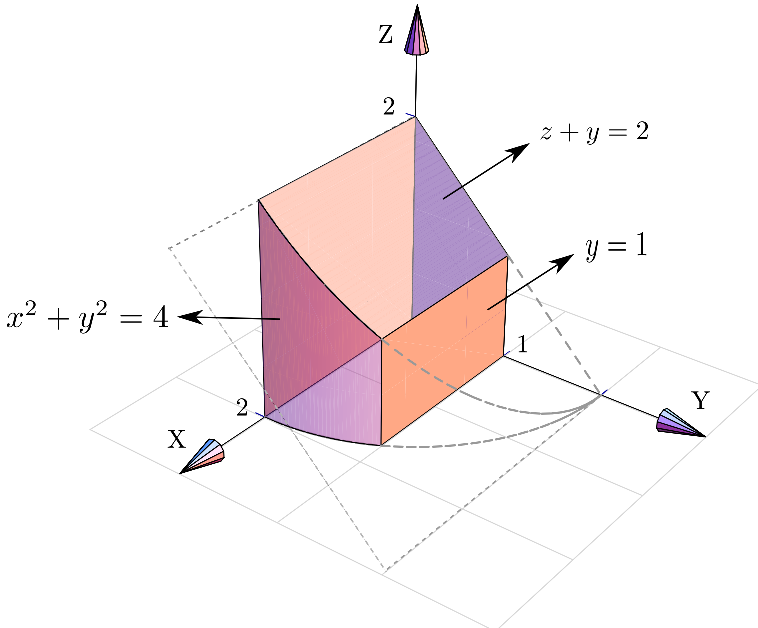


3.4.4 Se omite.

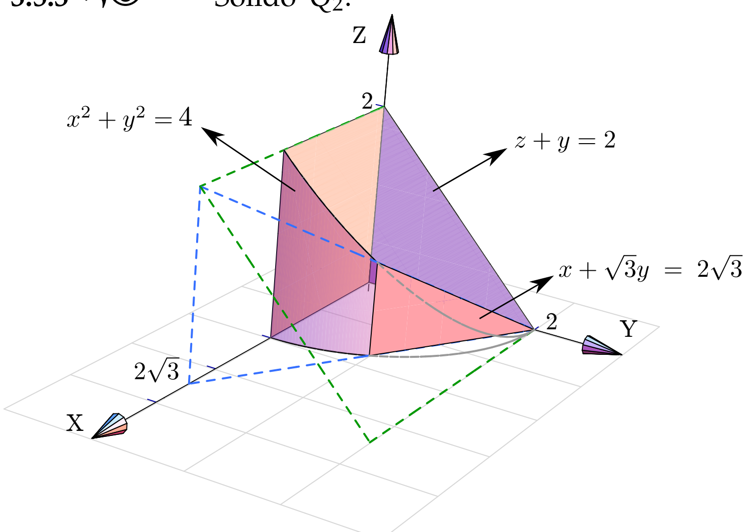
3.5.1

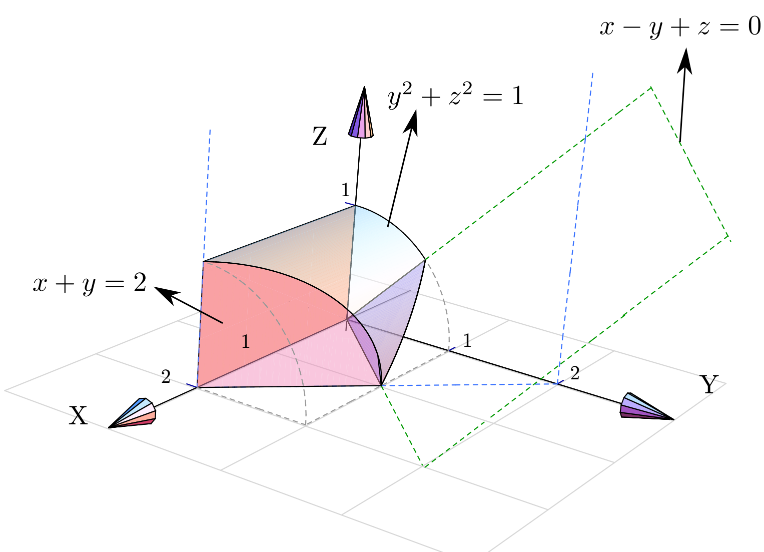


3.5.2 Sólido Q_1



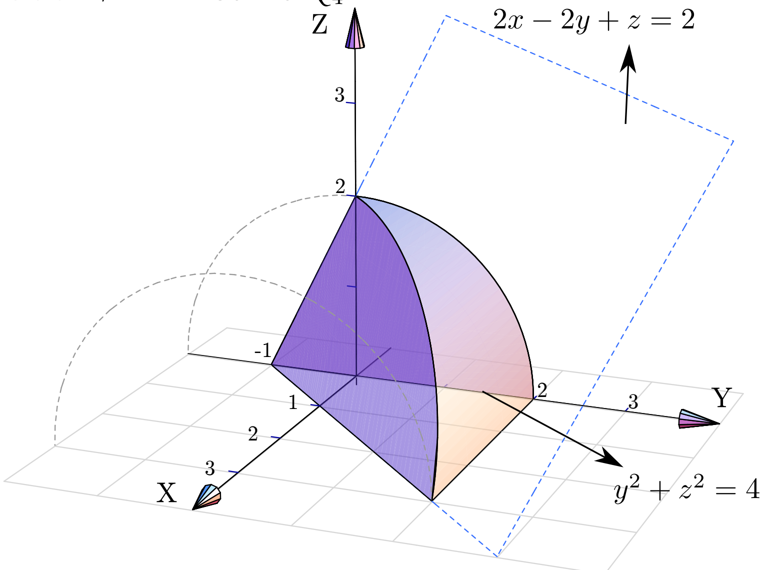
3.5.3 Sólido Q_2.



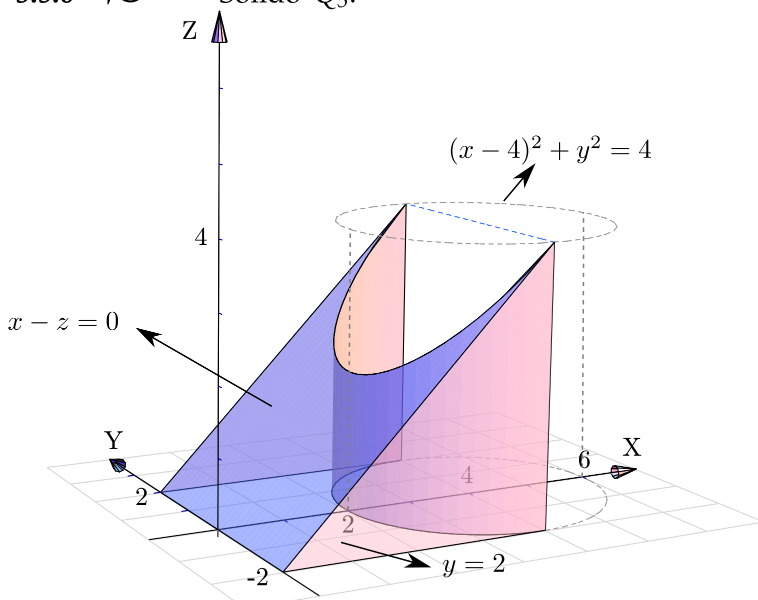


3.5.4 Sólido Q_3.

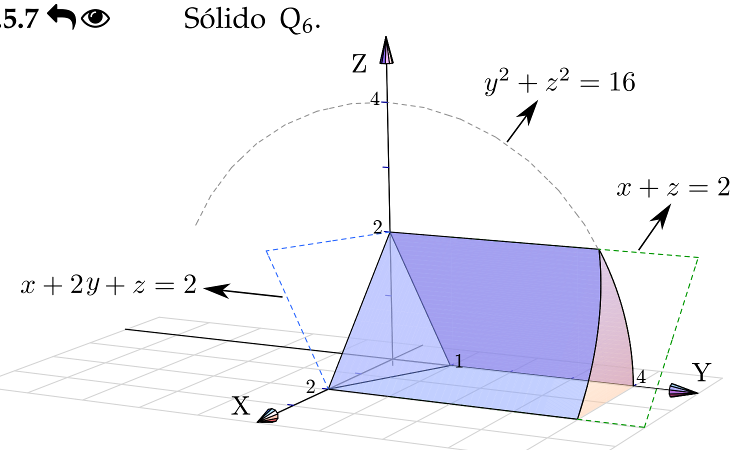
3.5.5 Sólido Q_4.



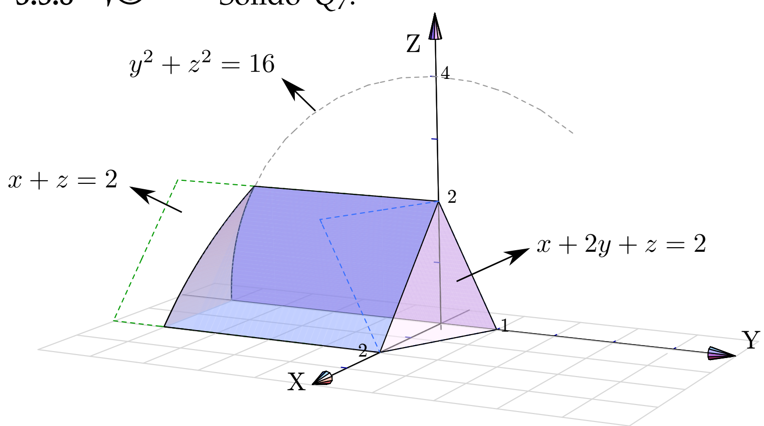
3.5.6 Sólido Q_5.



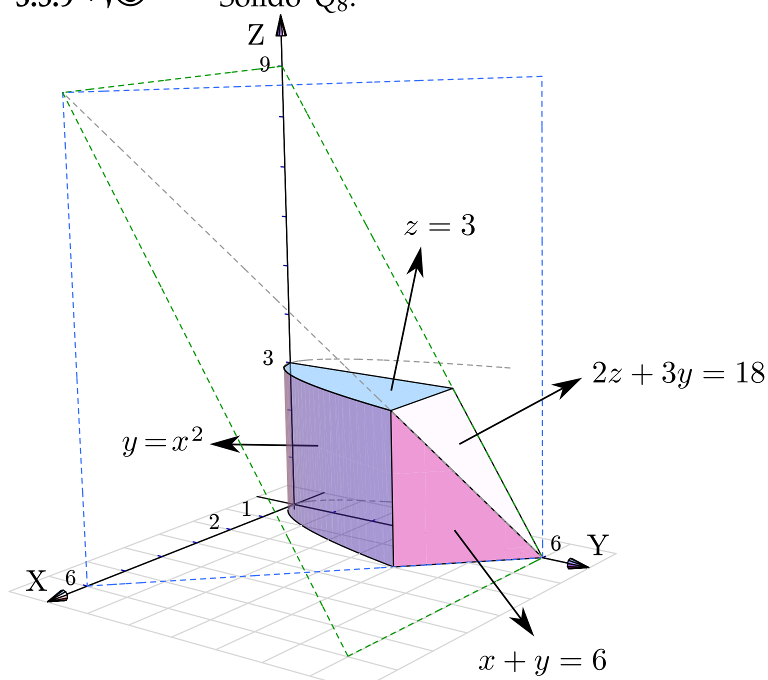
3.5.7 Sólido Q_6.



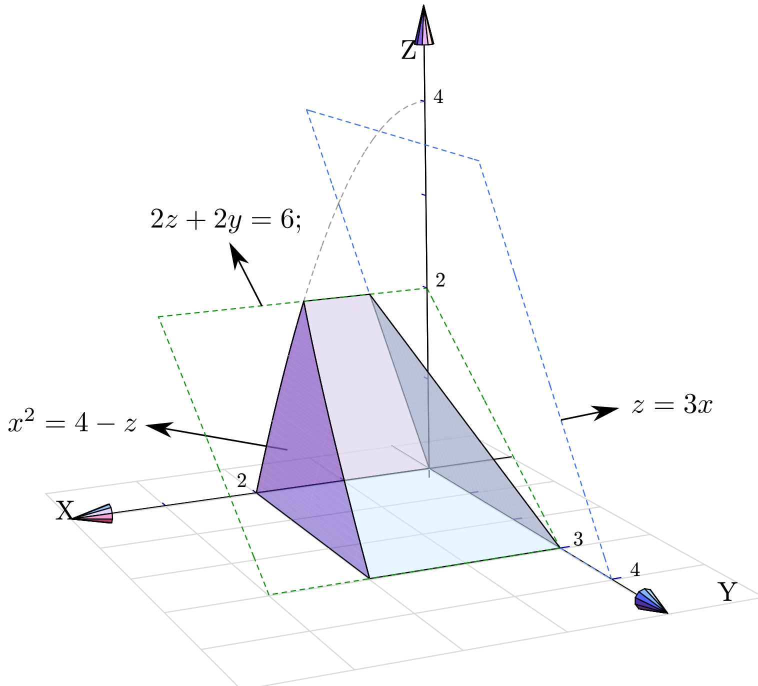
3.5.8 Sólido Q_7.



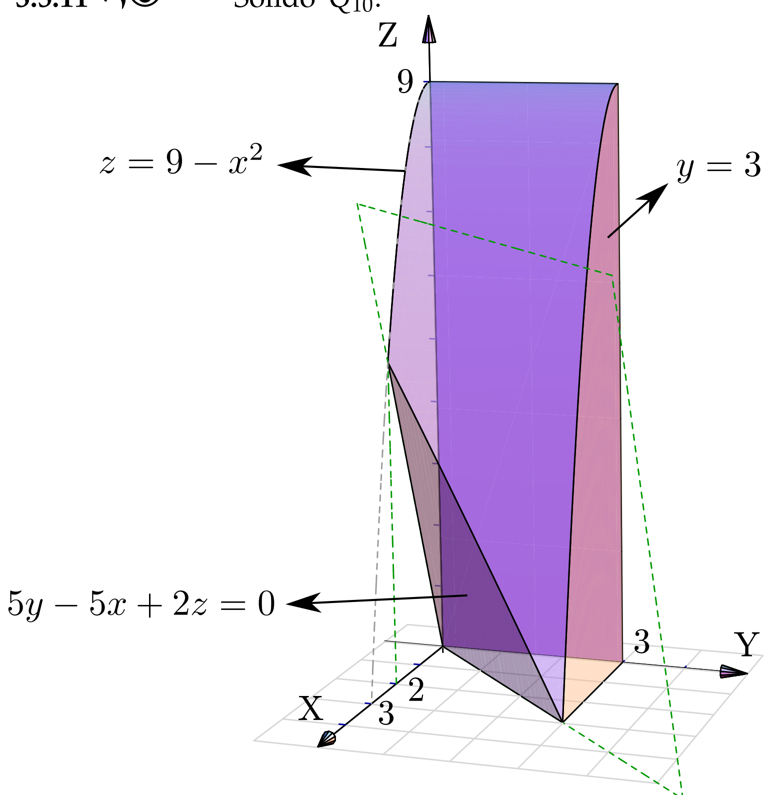
3.5.9 Sólido Q_8.



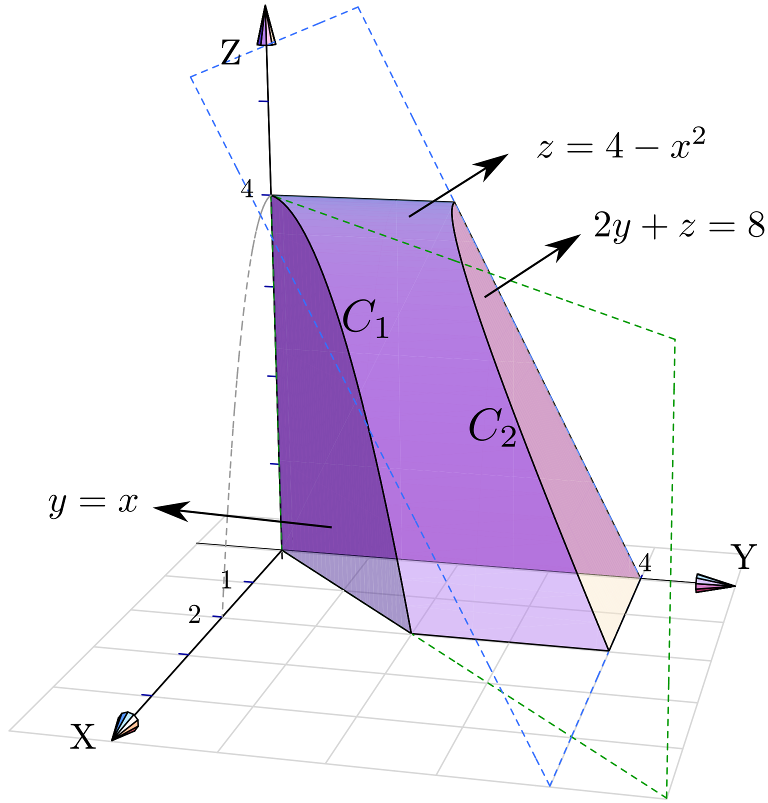
3.5.10 Sólido Q_9.



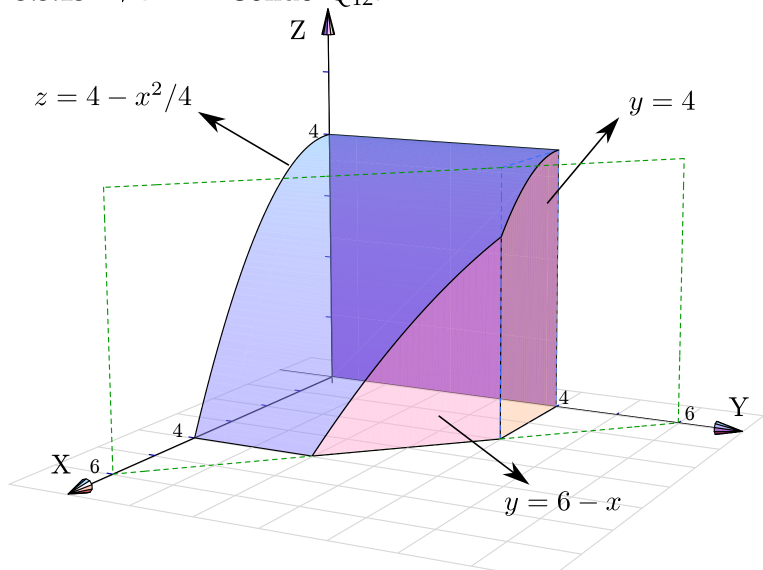
3.5.11 Sólido Q_{10}.



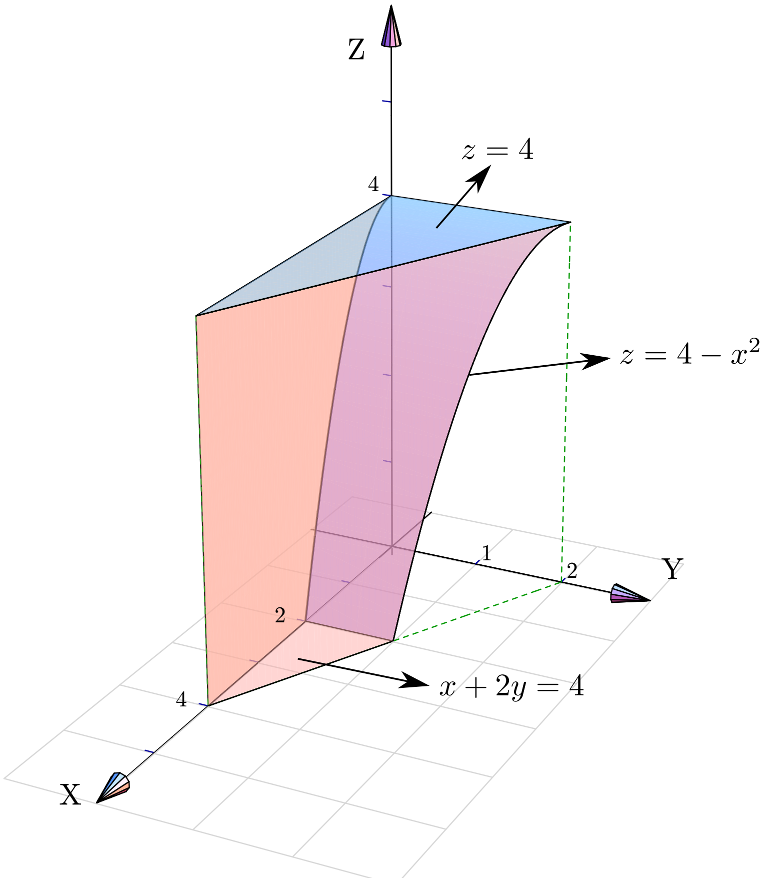
3.5.12 Sólido Q_{11}.



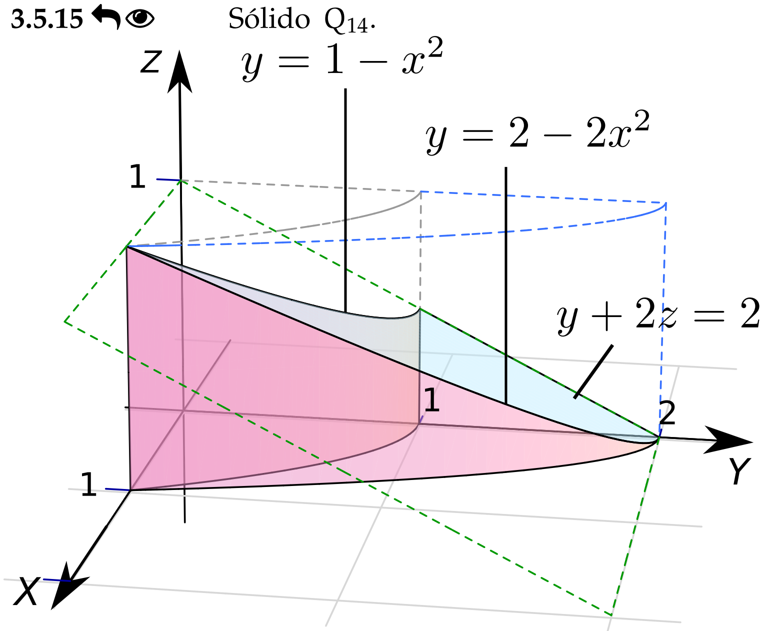
3.5.13 Sólido Q_{12}.



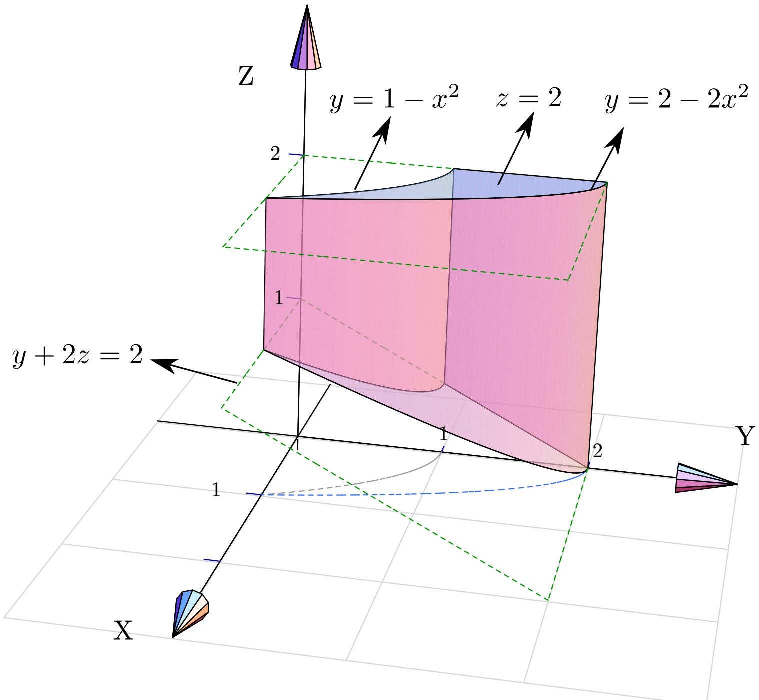
3.5.14 Sólido Q_{13}.



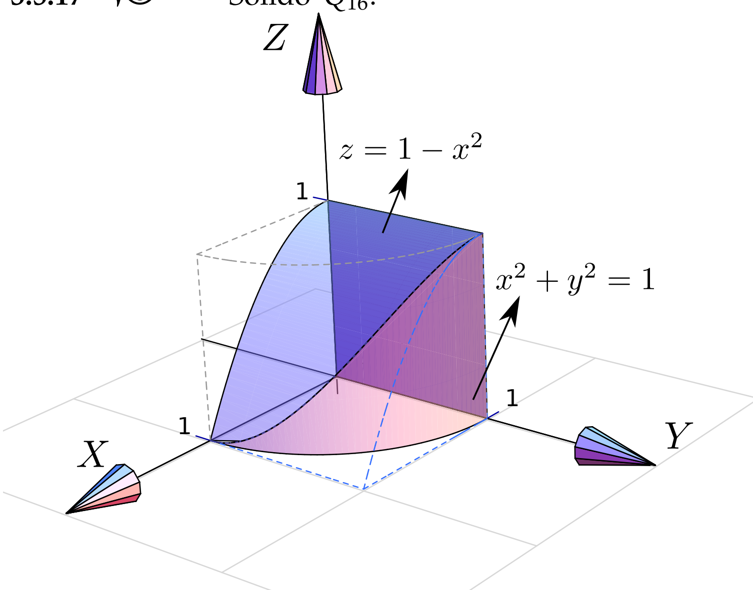
3.5.15 Sólido Q_{14}.



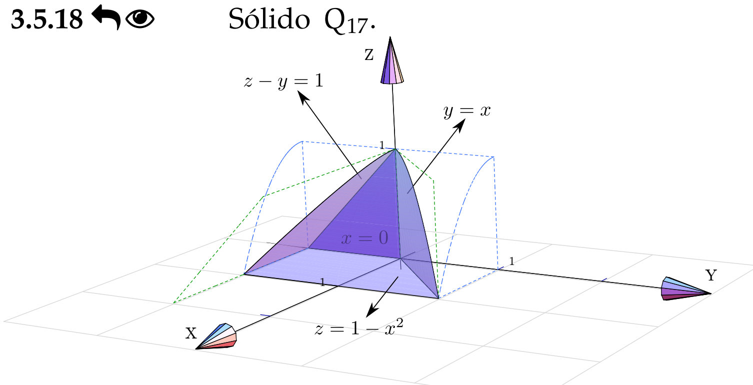
3.5.16 Sólido Q_{15}.



3.5.17 Sólido Q_{16}.

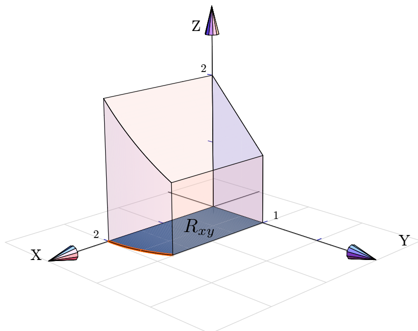


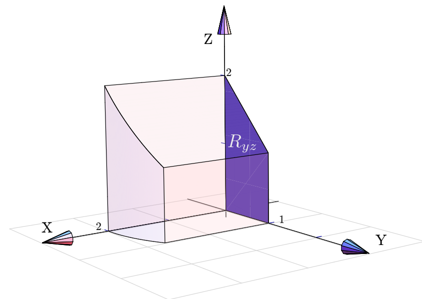
3.5.18 Sólido Q_{17}.

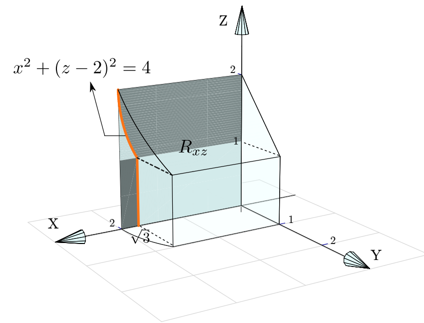


3.6.1 ↰ 👁 Proyecciones de Q.

Proyección sobre XY	Proyección sobre YZ	Proyección sobre XZ

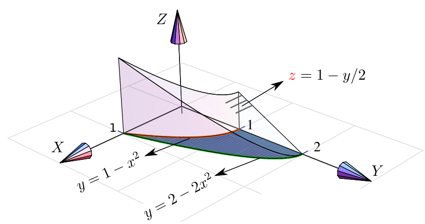


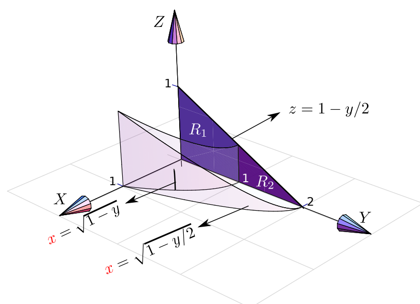


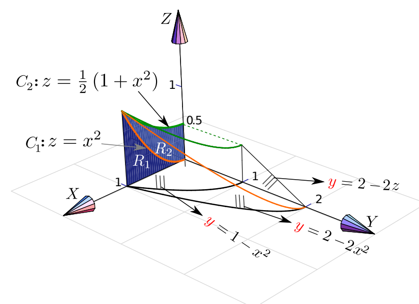


3.6.2 ↰ 👁 Proyecciones de Q.

Proyección sobre XY	Proyección sobre YZ	Proyección sobre XZ

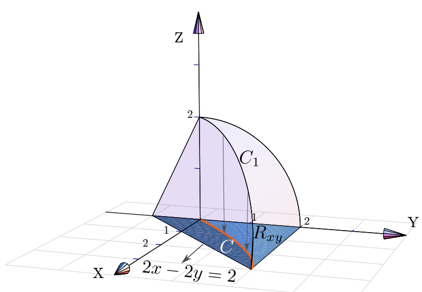






3.6.3 ↰ 👁 Proyecciones de Q.

Proyección sobre XY

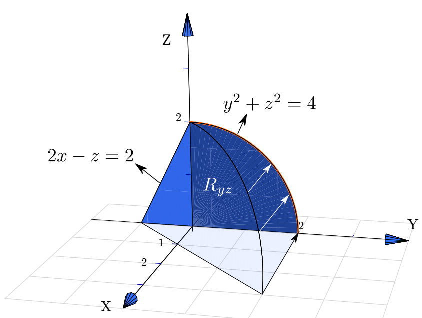


La curva C_1 se proyecta en la curva C en el plano XY. La curva C_1 es la intersección de las superficies $y^2 + z^2 = 4$ y $2x - 2y + z = 2$; para calcular su ecuación eliminamos z,

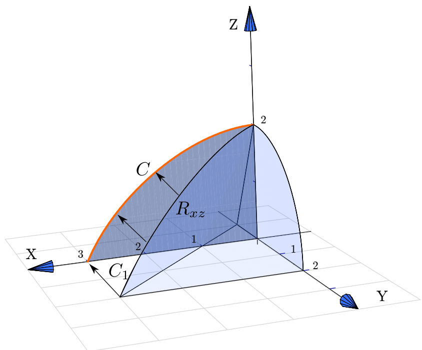
$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2 + z^2 & = & 1 \\ 2x - 2y + z & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow y^2 + (2 - 2x + 2y)^2 = 4.$$

(una elipse con ro

Proyección sobre YZ



Proyección sobre XZ



La curva C_1 se proyecta en la curva C en el plano XZ. La curva C_1 es la intersección de las superficies $y^2+z^2=1$ y $2x-2y+z=2$,

$$\begin{cases} y^2+z^2 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad \Longrightarrow (-1+\frac{z}{2}+x)^2+z^2=1. \\ 2x-2y+z = 2 \end{cases}$$

(una elipse con r

Soluciones del Capítulo 4

4.2.1

a.) Parametrización de la curva $C_=C_1+C_2 = \begin{cases} -C_1:\ r_1(t)=(t,\ 2t-t^2),\ t\in[0,2] \\ -C_2:\ r_2(t)=(3+\cos t,\ \operatorname{sen} t),\ t\in[\pi,\ 3\pi/2] \end{cases}$

b.)

c.)

d.)

e.) Parametrización de la curva $C_=C_1+C_2+C_3$

- $-C_1:\ r_1(t)=(t,2t,0)$ con $t\in[0,1]$.
  Observe que $r_1(0)=(0,0,0)$ y $r_1(1)=(1,2,0)$.

- $C_2:\ r_2(t)=(0,0,t)$ con $t\in[0,1]$.
  Observe que $r_2(0)=(0,0,0)$ y $r_2(1)=(0,0,1)$.

- $-C_3:\ r_3(t)=(\cos t, 2\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $\in[0,\pi/2]$.
  Observe que $r_3(0)=(1,2,0)$ y $r_3(\pi/2)=(0,0,1)$.

f.) Parametrización de la curva $C_=C_1+C_2+C_3+C_4$

- $C_1:\ r_1(t)=(2\cos t, 0, 2\operatorname{sen} t)$ con $t\in[0,\pi/2]$.
  Observe que $r_1(0)=(2,0,0)$ y $r_1(\pi/2)=(0,0,2)$.

- $C_2:\ r_2(t)=(2\cos t,\ 4-2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t)$ con $t\in[0,\pi/2]$.
  Observe que $r_2(0)=(2,2,0)$ y $r_2(\pi/2)=(0,4,2)$.

- $-C_3:\ r_3(t)=(t,4-t,0)$ con $t\in[0,2]$.
  Observe que $r_3(0)=(0,4,0)$ y $r_3(2)=(2,2,0)$.

- $-C_4:\ r_4(t)=(\cos t, 4-\cos t, 1+\operatorname{sen} t)$ con $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.
  Observe que $r_4(-\pi/2)=(0,4,0)$ y $r_4(\pi/2)=(0,4,2)$.

g.)

4.2.2

a.) Una parametrización de C es $\mathbf{r}(t) = (-t^2 - 2 + t,\ t,\ 2 - t)$. Como $P = \mathbf{r}(0)$, entonces una ecuación vectorial de la recta tangente a C en P es $\mathbf{L}(t) = (-2, 0, 2) + t \cdot (1, 1, -1)$

b.) Una parametrización de C es $\mathbf{r}(t) = (t,\ 1 - t,\ -t^2 + t)$. Como $P = \mathbf{r}(2)$, entonces una ecuación vectorial de la recta tangente a C en P es $\mathbf{L}(t) = (2, -1, -2) + t \cdot (1, -1, -3)$

Soluciones del Capítulo 5

5.2.1 Un cálculo directo nos da $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{3x - y + z}{xy + z^2} = 1$

5.2.2 Un cálculo directo nos da $\dfrac{9}{-1} = -9.$

5.5.1 Usando la regla para la derivada del cociente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[xy] \cdot (x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - y^2\right] \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\
&= \frac{x \cdot (x^2 - y^2) + 2y \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}[xy] \cdot (x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - y^2\right] \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\
&= \frac{y \cdot (x^2 - y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2}
\end{aligned}$$

$f_y(2, 1) = \dfrac{10}{9}$.

5.5.2 Se debe usar la regla de la cadena para funciones de una variable,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 5\ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x^y + x^2 + 2^y)\right] \\
&= 5\ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{1}{x^y + x^2 + 2^y} \cdot (x^y \ln x + 2^y \ln 2) \\
&= \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5\ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(x^y + x^2 + 2^y)\right] \\
&= 5\ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{1}{x^y + x^2 + 2^y} \cdot (y \cdot x^{y-1} + 2x)
\end{aligned}$$

5.5.3

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4a^2 - 2$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4b^2 - 2$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(a^2+b^2) - 4 = 0. \;\checkmark$

5.5.4 Sea $u = \dfrac{x^2}{y}$, entonces $z = f(u)$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot \dfrac{2x}{y}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot \dfrac{-x^2}{y^2}$
- $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\left[\dfrac{2x^2}{y} - \dfrac{2x^2}{y}\right] = 0 \;\checkmark$

5.5.5

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y - \dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z}$
- Ahora sustituimos,

$$\begin{aligned} zx\frac{\partial z}{\partial x} + zy\frac{\partial z}{\partial y} &= zx\,\frac{y - \dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z} + zy\,\frac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z} \\ &= \frac{2xy - \dfrac{xy}{x^2+y^2} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}}{2} = xy \end{aligned}$$

5.5.6 Pongamos $C(x,t) = \dfrac{e^{-x^2/kt}}{\sqrt{t}}$.

- $\dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{\left(\sqrt{t}\,\dfrac{-2x}{kt} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-x^2/kt}}{t} = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{x^2}{kt^{5/2}} - \dfrac{1}{2t^{3/2}}\right)$
- $\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\dfrac{-2x}{kt}\,e^{-x^2/kt}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-x^2/kt}\,\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^2} - \dfrac{2}{kt}\right) = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^{5/2}} - \dfrac{2}{kt^{3/2}}\right)$
- Luego, multiplicando $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ por $\dfrac{k}{4}$ se obtiene la identidad.

5.5.7

z es una función de dos variables pero f es una función de un solo argumento y como tal, se deriva de la manera ordinaria. Aquí es conveniente hacer el cambio de variable $u = x^2y + y$ de tal manera que $z = f(u)\cdot\sqrt{x+y^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u)\cdot\frac{\partial}{\partial y}[u]\cdot\sqrt{x+y^2} \;+\; f(u)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x+y^2}\right]\\
&= f'(u)\cdot(x^2+1)\cdot\sqrt{x+y^2} \;+\; f(u)\cdot\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}\\
&=\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}[u]\cdot\sqrt{x+y^2} \;+\; f(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x+y^2}\right]\\
&= f'(u)\cdot(2xy)\cdot\sqrt{x+y^2} \;+\; f(u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}
\end{aligned}$$

5.5.8

- $u_x = e^y \cos x$
- $u_y = e^y \operatorname{sen} x$
- $u_{xx} = -e^y \operatorname{sen} x$
- $u_{yy} = e^y \operatorname{sen} x$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0 \quad \surd$

5.5.9

- $u_t = -a\cos(x-at)+\dfrac{a}{x+at}$
- $u_{tt} = -a^2\operatorname{sen}(x-at)-\dfrac{a^2}{(x+at)^2}$
- $u_x = \cos(x-at)+\dfrac{1}{x+at}$
- $u_{xx} = -\operatorname{sen}(x-at)-\dfrac{1}{(x+at)^2}$
- $u_{tt} = -a^2\operatorname{sen}(x-at)-\dfrac{a^2}{(x+at)^2} = a^2\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-at)-\dfrac{1}{(x+at)^2}\right) = a^2\cdot u_{xx}. \quad \surd$

5.5.10 Sea $A = x-at$ y $B = x+at$, entonces $u(x,t) = f(A)+f(B)$.

- $u_t = -af'(A)+ag'(B)$
- $u_{tt} = a^2f''(A)+a^2g''(B)$
- $u_x = f'(A)+g'(B)$
- $u_{xx} = f''(A)+g''(B)$
- $u_{tt} = a^2f''(A)+a^2g''(B) = a^2\cdot u_{xx}. \quad \surd$

5.5.11 Satisface $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

- $z_x = \dfrac{e^x}{e^x+e^y}$
- $z_y = \dfrac{e^y}{e^x+e^y}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^x}{e^x+e^y}+\dfrac{e^y}{e^x+e^y} = 1 \quad \surd$

Satisface $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0.$

- $z_{xx} = \dfrac{e^x\cdot(e^x+e^y)-e^x\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}$
- $z_{yy} = \dfrac{e^y\cdot(e^x+e^y)-e^y\cdot e^y}{(e^x+e^y)^2}$

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{e^y}{e^x+e^y}\right] = \dfrac{-e^y \cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}.$
- $$\begin{aligned}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 &= \dfrac{e^x\cdot(e^x+e^y) - e^x\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}\cdot\dfrac{e^y\cdot(e^x+e^y)-e^y\cdot e^y}{(e^x+e^y)^2} - \left(\dfrac{-e^y\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}\right)^2 \\ &= \dfrac{e^x\cdot e^y}{(e^x+e^y)^2}\cdot\dfrac{e^y\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2} - \left(\dfrac{-e^y\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}\right)^2 = 0 \,\surd\end{aligned}$$

5.5.12

Sea $u = y\,\text{sen}(x)$, entonces $w = f(u)$.

- $w_x = f'(u)\cdot y\cos(x)$
- $w_y = f'(u)\cdot \text{sen}(x)$
- $\cos(x)w_x + y\,\text{sen}(x)w_y = \cos^2(x)\cdot y\cdot f'(u) + \text{sen}^2(x)\cdot y\cdot f'(u) = \left(\cos^2 x + \text{sen}^2 x\right)\, y\, f'(u) = y\, f'(u)$

5.5.13

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x\,\text{sen}(3x-2y)+3x^2\cos(3x-2y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -2x^2\cos(3x-2y)$ y $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -4x\cos(3x-2y)-6x^2\,\text{sen}(3x-2y)$.
La identidad se verifica de manera directa.

5.5.14 Derivamos a ambos lados respecto a R_1,

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]$$

$$\frac{-1\cdot\dfrac{\partial R}{\partial R_1}}{R^2} = \frac{-1}{R_1^2} \implies \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}.$$

5.5.15

- $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{P}{V}$
- $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{mR}{P}$
- $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{mR}$
- $\dfrac{\partial P}{\partial V}\,\dfrac{\partial V}{\partial T}\,\dfrac{\partial T}{\partial P} = -\dfrac{P}{V}\,\dfrac{mR}{P}\,\dfrac{V}{mR} = -1. \,\surd$

5.5.16 $\dfrac{\partial K}{\partial m}\,\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}v^2\cdot m = K. \,\surd$

5.5.17

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f'(u)\cdot 2x\cdot g(y)$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2g(y)\cdot[f''(u)\cdot 2x^2 + f'(u)]$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2x[f''(u)\cdot 2y\cdot g(y) + g'(y)\cdot f'(u)]$
- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f'(u)\cdot 2y\cdot g(y) + g'(y)\cdot f(u)$

5.5.18

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f'(u)\cdot\dfrac{1}{y} + g'(v)\cdot\dfrac{-y}{x^2}$

- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot \dfrac{-x}{y^2} \cdot \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2} \cdot f'(u) + g''(v) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-y}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} \cdot g'(v).$

5.5.19 Sea $u = x^2 - 4y^2$,

- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = -e^{3x} f'(u) \cdot 8y$
- $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 8y \left[-3e^{3x} f'(u) - e^{3x} f''(u) \cdot 2x\right]$

5.5.20 $\dfrac{\partial u}{\partial rr} = n(n-1) r^{n-2} \cos(n\theta)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \theta\theta} = -n^2 r^n \cos(n\theta)$. Sustituyendo y simplificando se verifica la ecuación.

5.7.1

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (y^2+1) \cdot \cos t + 2xy \cdot \sec^2 t \end{aligned}$$

5.7.2 $\dfrac{dw}{dt} = 2t + 2t \operatorname{sen} 2t + 2t^2 \cos 2t$

5.7.3

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left[\sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}}\right] \cdot y + \left[\frac{uv}{\sqrt{u+v^2}}\right] \cdot \frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left[\sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}}\right] \cdot x + \left[\frac{uv}{\sqrt{u+v^2}}\right] \cdot \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

5.7.4

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(y) \cdot \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$

b.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(y) \cdot f(x,y) + g(y) \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]$

c.)

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = g'(y) \cdot 3t^2 \cdot f(x,y) + g(y) \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 2t + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 3t^2\right]$

$\dfrac{\partial z}{\partial u} = g'(y) \cdot 2u \cdot f(x,y) + g(y) \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 2u\right]$

5.7.5

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v}$
- Aplicamos regla del producto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot y\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right] \\ &= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x\right] \end{aligned}$$

5.7.6

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\ln^2(xy) \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v}$
- Aplicamos regla del producto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 6\ln(xy) \cdot \frac{1}{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot y\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right] \\ &= 6\ln(xy) \cdot \frac{1}{xy} + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x\right] \end{aligned}$$

5.7.7 Primero hacemos un cambio de variable: $z = f(U, V)$ con $U = x\,\text{sen}(y)$ $V = g(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial U} \cdot U_y + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot V_y \\ &= \frac{\partial f}{\partial U} \cdot x\cos y + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(U,V)}{\partial U} \cdot x\cos y\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2} \cdot U_x + \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial U} \cdot V_x\right) x\cos y \;+\; \cos y\,\frac{\partial f}{\partial U} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2} \cdot \text{sen}\, y + \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial U} \cdot g'(x)\right) x\cos y \;+\; \cos y\,\frac{\partial f}{\partial U} \end{aligned}$$

5.7.8 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 2e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x)$

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} = -6e^{-3x}\cos(2t-3x) + 6e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x)$

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = -3e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x) - 3e^{-3x}\cos(2t-3x)$

$K = 24.$

5.7.9

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(y) + yg'(x)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(y) + g(x)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y) + g'(x)$

Si $K = 2$, entonces

$$2xy(f'(y) + g'(x)) - 2x(f(y) + yg'(x)) - 2y(xf'(y) + g(x)) + 2z$$

$$= 2xyf'(y) + 2xyg'(x) - 2xf(y) - 2xyg'(x) - 2yxf'(y) - 2yg(x) + 2z$$

$$= -2xf(y) - 2yg(x) + 2z \;=\; 0 \;\checkmark \qquad \text{pues} \quad 2z = 2xf(y) + 2yg(x)$$

5.7.10

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot 1 \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot 2v \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 2v \end{aligned}$$

5.7.11 $\quad \dfrac{\partial w}{\partial \theta} = -g'(x)\cdot r\,\text{sen}\,\theta \;-\; \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot r\,\text{sen}\,\theta \;+\; \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\theta$

5.7.12

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial f}{\partial u} + y\dfrac{\partial f}{\partial v}$
- Aplicamos la regla del producto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\frac{\partial f}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[y\frac{\partial f}{\partial v}\right] \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right] \;+\; y\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \end{aligned}$$

- Simplificando se obtiene el resultado.

5.7.13 Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea $z = f(u,v) - g(w)$. Entonces,

$z_y = f_u \cdot -\text{sen}\,y \;-\; g(w)\cdot 6xy.$

$z_{xy} = -\text{sen}\,y(f_{uu}\cdot 2x + f_{uv}\cdot 2x) - g''(w)\cdot 3y^2\cdot 6xy + 6y\cdot g'(w)$

5.7.14 Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea $z = x^2 f^4(u,v)$. Entonces,

$z_x = 2xf^4(u,v) + x^2(4f^3(u,v)\cdot(f_u\cdot y + f_v\cdot 0))$

$z_y = x^2(4f^3(u,v)\cdot(f_u\cdot x + f_v\cdot 2y))$

5.7.15

Sea $u = \frac{y}{x}$, $v = e^{3x} + 3x$ y $w = x^2y^2$. Entonces $z = x\cdot f(u,v) + h(w)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= x\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\\
&= x\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\\
&= x\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) + h'(w)\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\\
&= x\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0\right) + h'(w)\cdot 2x^2y\\
&= \frac{\partial f}{\partial u} + h'(w)\cdot 2x^2y
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u} + h'(w)\cdot 2x^2y\right)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + h''(w)\frac{\partial w}{\partial x}\cdot 2x^2y + h'(w)\cdot 4xy\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\left(3e^{3x}+3\right) + h''(w)\cdot 2xy^2\cdot 2x^2y + h'(w)\cdot 4xy\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\left(3e^{3x}+3\right) + h''(w)\cdot 4x^3y^3 + h'(w)\cdot 4xy
\end{aligned}$$

5.7.16 Cambio de variable: $z = f(u,v) + g(w)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot(2x^2-1) - x\cdot\dfrac{dg}{dw}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4x\dfrac{\partial f}{\partial u} + (2x^2-1)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}4xy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}2x\right) - g'(w) - x\cdot g''(w)\cdot(2x-y)$

5.7.17 Las derivadas parciales que se piden aparecen cuando calculamos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. La idea es despejar a partir de estos dos cálculos.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot y\\[2ex]
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s}\cdot -1 + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot x
\end{aligned}\right. \implies \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{y+2x^2}\left[\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

De manera análoga, $\dfrac{\partial f}{\partial s}=\dfrac{1}{y+2x^2}\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]$

5.7.18 Sea $u=xy$. Con un cálculo directo obtenemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf(u)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf'(u)$ Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene el resultado.

5.7.19 Observe que

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(r^2\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) \implies 2r\dfrac{\partial r}{\partial x}=2x$, es decir, $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$. De manera análoga,

$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$

$\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$

Entonces

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot f'(r)\cdot\frac{x}{r}+y\cdot f'(r)\cdot\frac{y}{r}+z\cdot f'(r)\frac{z}{r} = f'(r)\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r}=rf'(r)$$

5.7.20

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{x^2}\cdot f_v+3xf_{vu}$$

5.7.21

Al aplicar el cambio de variable, z es una función de u y v, es decir, $z=z(u,v)$. Por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}u_x+\frac{\partial z}{\partial v}v_y = y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $x=\sqrt{uv}$ y $y=\sqrt{u/v}$ en $(*)$, nos queda

$$\frac{\partial z}{\partial u}=v\ \operatorname{sen} u$$

5.8.1

Sea $F(x,y,z)=x^2y^2+\operatorname{sen}(xyz)+z^2-4$. Si las derivadas parciales z_x y z_y existen en todo el dominio en el que $F_z\neq 0$, entonces

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{2xy^2+yz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz)+2z}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{2x^2y+xz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz)+2z}$
- La identidad se obtiene sustituyendo y simplificando.

5.8.2 Sea $F=z-f(u)$ con $u=z/xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-f'(u)\cdot\dfrac{-z}{x^2y}}{1-f'(u)\cdot\dfrac{1}{xy}}=-\frac{z}{x}\cdot\frac{f'(u)}{xy-f'(u)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-f'(u)\cdot\dfrac{-z}{xy^2}}{1-f'(u)\cdot\dfrac{1}{xy}}=-\frac{z}{y}\cdot\frac{f'(u)}{xy-f'(u)}.$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-x\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{f'(u)}{xy-f'(u)}-y\cdot-\frac{z}{y}\cdot\frac{f'(u)}{xy-f'(u)}=0\ \surd$$

5.8.3 En este caso, $F=g\left(\frac{xy}{z},\ x^2+y^2\right)$.

- $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{g_x}{g_z}=-\frac{g_u\cdot\dfrac{y}{z}+g_v\cdot 2x}{-g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}$$
- $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{g_y}{g_z}=-\frac{g_u\cdot\dfrac{x}{z}+g_v\cdot 2y}{-g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}$$
- $$y\cdot\frac{g_u\cdot\dfrac{y}{z}+g_v\cdot 2x}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}-x\cdot\frac{g_u\cdot\dfrac{x}{z}+g_v\cdot 2y}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}=-\frac{g_u\left(\dfrac{x^2-y^2}{z}\right)}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}=-\frac{z(x^2-y^2)}{xy}\ \surd$$

5.8.4

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}\left(\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 0+\dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 1\right)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^2}\right)=\dfrac{3y^4\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}-2y\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^4}\end{cases}$$

5.8.5 La primera derivada se hace derivando implícitamente; las segundas derivadas son derivadas ordinarias.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{z\ln(yz)}{x-z}\right]=-\frac{\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\ln(yz)+z\cdot\dfrac{y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{yz}\right](x-z)-\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot z\ln(yz)}{(x-z)^2}$$

$$=-\frac{\left[-\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}\cdot\ln(yz)+z\cdot\dfrac{y\cdot-\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}}{yz}\right](x-z)-\left(1+\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot z\ln(yz)}{(x-z)^2}$$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz}{y(x-z)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xz}{y(x-z)}\right] = -\frac{x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot y(x-z) - \left(x-z-y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$= \frac{x\cdot\dfrac{xz}{y(x-z)}\cdot y(x-z) - \left(x-z-y\cdot\dfrac{xz}{y(x-z)}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{xz}{y(x-z)}\right] = -\frac{\left(z+x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot y(x-z) - \left(y-y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$= -\frac{\left(z+x\cdot-\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot y(x-z) - \left(y-y\cdot-\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

5.8.6 ↰ 👁

5.8.7 ↰ 👁

5.8.8 ↰ 👁

5.8.9 ↰ 👁

5.8.10 ↰ 👁

5.8.11 ↰ 👁 Tenemos $F(u,v)=0$ con $u=f(A)$, $v=f(B)$ y $A=xy$ y $B=z^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot y + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 0}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot x + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 0}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 2z}$$

5.8.12 ↰ 👁

5.8.13 ↰ 👁 $K=-1$

5.8.14 ↰ 👁

5.8.15 $F(x,y,z) = y - g(u) - f(v,w)$ con $u = z^2,\ v = y^2,\ w = x^2.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\dfrac{\partial f}{\partial w}}{-2zg'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2y\dfrac{\partial f}{\partial v}}{2zg'(u)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\left(-2\dfrac{\partial f}{\partial v} - 4y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(2zg'(u)) - \left(2\dfrac{\partial z}{\partial y}g'(u) + 4z^2g''(u)\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(1-2y\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{[2zg'(u)]^2}\end{aligned}$$

5.8.16

5.12.1

a.) $\nabla \mathbf{f} = (-2x, -2y)$

$D_{\mathbf{u}}f(R) = \nabla \mathbf{f}(R)\cdot \dfrac{u}{||u||} = (-2,\,2)\cdot\dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

b.)

$$\begin{aligned}D_u f(P) &= (-2a,-2b)\cdot(-2,1)/\sqrt{5} = \sqrt{2} \implies 4a-2b = \sqrt{10}\\ D_v f(P) &= (-2a,-2b)\cdot(1,1)/\sqrt{2} = \sqrt{5} \implies -2a-2b = \sqrt{10}\end{aligned}$$

Entonces, $a = 0$ y $b = -\sqrt{5/2}$. $P = (0, -\sqrt{5/2}, 3/2)$.

c.) $D_u f(R)$ es máxima si $\mathbf{u} = \nabla \mathbf{f}(R) = (-2,2)$. En este caso, $D_{\nabla \mathbf{f}(R)}f(R) = ||\nabla \mathbf{f}(R)|| = \sqrt{8}$.

5.12.2

a.) $\nabla \mathbf{f} = \left(-\dfrac{2x+yz}{xy+3z^2},\ \dfrac{-xz}{xy+3z^2}\right)$

$D_{\mathbf{u}}f(Q) = \nabla \mathbf{z}(Q)\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = (-1\,,0)\cdot\dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b.)

$D_{\mathbf{v}}z(P) = (-2/b\,,0)\cdot(-2,1)/\sqrt{5} = \sqrt{2} \implies b = 4/\sqrt{10}$

c.) $D_u z(R)$ es mínima si $\mathbf{u} = -\nabla \mathbf{z}(R) = (1/2, 1/2)$. En este caso, $D_{\nabla \mathbf{z}(R)}z(R) = -||\nabla \mathbf{z}(R)|| = -\sqrt{1/2}$.

5.12.3

a.) $z = z(x,y)$ está definida de manera implícita. Sea $F(x,y,z) = z^3 + xz + y - 1$.

$$\nabla \mathbf{z} = \left(-\frac{F_x}{F_z},\ -\frac{F_y}{F_z},\right) = \left(-\frac{z}{3z^2+x},\ -\frac{1}{3z^2+x}\right);$$

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}z(P) &= \nabla \mathbf{z}(P)\cdot\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}\\ &= (0,-1)\cdot\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} = 2/\sqrt{5} \approx 0.894427.\end{aligned}$$

b.) El máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en P es $||\nabla \mathbf{z}(P)|| = 1$ cuando $\mathbf{v} = \nabla \mathbf{z}(P) = (0,-1)$.

5.12.4

a.) $z = z(x,y)$ está definida de manera implícita. Sea $F(x,y,z) = xyz^2 - 8z$.

$$\nabla \mathbf{z} = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z},\right) = \left(-\frac{yz^2}{2zxy-8}, -\frac{xz^2}{2zxy-8}\right);$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}z(P) &= \nabla \mathbf{z}(P) \cdot \frac{(-5,\sqrt{2})}{\sqrt{27}} \\ &= (-8,-8) \cdot \frac{(-5,\sqrt{2})}{\sqrt{27}} = \frac{40-8\sqrt{2}}{\sqrt{27}} \approx 5.52068 \end{aligned}$$

b.)

5.12.5 $D_{\mathbf{u}}z(P) = (1,1) \cdot \dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

5.12.6 z está definida de manera implícita. Sea $G(x,y,z) = x^2 + xz^3 + y^2z$

$$\nabla \mathbf{z} = \left(-\frac{G_x}{G_z}, -\frac{G_y}{G_z},\right) = \left(-\frac{2x+z^3}{y^2+3xz^2}, -\frac{2yz}{y^2+3xz^2}\right)$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}z(P) &= \nabla \mathbf{z}(P) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3},0\right) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

5.13.1

a.) $\mathbf{L}_X(t) = R + t \cdot (1,0,-2)$

b.) $\mathbf{L}_Y(t) = R + t \cdot (0,1,2)$

c.) $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(t) = R + t \cdot (-2,1,6)$

d.) Si $G(x,y,z) = z - 4 + x^2 + y^2 = 0 \implies N = \nabla \mathbf{G}(R) = (2,-2,1)$

e.) La superficie S tiene ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$. Si $G = z - 4 + x^2 + y^2$ entonces un vector normal al plano es $N = \nabla \mathbf{G}(R) = (2,-2,1)$. Luego la ecuación cartesiana es $2x - 2y + z = 6$.

f.) $D_{\mathbf{u}}f(R)$ es máxima si $\mathbf{u} = \nabla \mathbf{f}(R) = (-2,2)$. En este caso, $D_{\nabla \mathbf{f}(R)}f(R) = ||\nabla \mathbf{f}(R)|| = \sqrt{8}$.

5.13.2 La superficie S tiene ecuación $G(x,y,z) = x^2 + xyz + z^3 - 1$, entonces $\nabla \mathbf{G} = (2x + yz, xz, xy + 3z^2)$. Un vector normal al plano es $N = \nabla \mathbf{G}(R) = (1,1,2)$. Luego la ecuación cartesiana es $x + y + 2z = 2$.

5.13.3

a.) $F(x,y,z) = xyz + \ln(xyz) - z = 0$

$$\nabla F(P) = (F_x, F_y, F_z)|_P = \left(yz + \frac{1}{x},\ xz + \frac{1}{y},\ xy + \frac{1}{z} - 1\right)\Big|_P = (2,2,1)$$

$\pi: \;\nabla F(P)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$

$\pi: \;2x+2y+z=5$

b.)

$$z_x(P) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \;=\; -\frac{2}{1} \;=\; -2$$

$\ell:(x,y,z)=P+t\,(1,0,z_x(P))\,; \;\; t\in\mathbb{R}$

$\ell:(x,y,z)=(1,1,1)+t\,(1,0,-2); \;\; t\in\mathbb{R}$

c.)

$$\nabla z(P) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right) \;=\; (-2,-2)$$

$\ell:(x,y,z)=P+t\,(v_1,v_2,\nabla z(P)\cdot(v_1,v_2))\,; \;\; t\in\mathbb{R}$

$\nabla z(P)\cdot(v_1,v_2)=(-2,-2)\cdot(2,3)=-10$

$\ell:(x,y,z)=(1,1,1)+t\,(1,3,-10); \;\; t\in\mathbb{R}$

d.)

Si $Q=(a,b,c)\in S \implies abc+\ln(abc)-c=0,$ es decir, $abc>0.$

El plano tangente tiene ecuación $x+y+z=0 \implies \nabla F(Q)=\alpha(1,1,1)$ ($\nabla F(Q)$ tiene la misma dirección que $(1,1,1)$) y $\nabla F(Q)\cdot Q=0,$ entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q & \in & S\\ \nabla F(Q) & = & \alpha(1,1,1)\\ F(Q)\cdot Q & = & 0\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} abc+\ln(abc)-c & = & 0\\ bc+\dfrac{1}{a} & = & \alpha\;\;(E2)\\ ac+\dfrac{1}{b} & = & \alpha\;\;(E3)\\ ab+\dfrac{1}{c}-1 & = & \alpha\;\;(E4)\\ 3abc+3 & = & c\;\;(E5)\end{array}\right.$$

Este sistema no tiene solución. Hay varias maneras de verlo, por ejemplo, multiplicando (E2) por a, (E3) por b, (E4) por c, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} abc+\ln(abc)-c &=& 0 \\ abc+1 &=& \alpha\, a \quad (E2) \\ abc+1 &=& \alpha\, b \quad (E3) \\ abc+1-c &=& \alpha\, c \quad (E4) \\ abc+1 &=& \dfrac{c}{3} \quad (E5) \end{array}\right.$$

- Restando (E4) y (E5) se obtiene $\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)c=0 \implies \alpha=-2/3$ (pues $c\neq 0$.)
- De (E2), (E3) y (E4) se despeja $-2a=c$ y $-2b=c$.
- Sustituyendo en (E5) queda $c^3/4-c/3+1=0$, resolviendo se obtiene $c\approx-1.86 \implies abc<0$

Pero la presencia de $\ln(abc)$ en la ecuación de S no permite que $abc<0$. Por tanto no existe $Q\in S$.

5.13.4

a.) Sea $G(x,y,z)=z-x^2-y^2$. $P=(a,b,c)\in S \implies c=a^2+b^2$.

El plano tangente tiene ecuación $2x+2y+z=0 \implies \nabla G(P)=\lambda(2,2,1)$, y además, $(2,2,1)\cdot P=0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a &=& 2\lambda \\ -2b &=& 2\lambda \\ 1 &=& \lambda \end{array}\right. \implies a=-1,\ b=-1 \quad \text{y como} \quad P\in S \implies z=2$$

Pero si $P=(-1,-1,2) \implies (-1,-1,2)\cdot(2,2,1)=-2\neq 0$. Por tanto no hay 'un tal P con lo requerido.

b.) Sea $Q=(a,b,c)\in S \implies c=a^2+b^2$. Además $\nabla z(Q)=(2a,\,2b)$ De los datos tenemos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla z(Q)\cdot(1,1) &=& 5 \\ \nabla z(Q)\cdot(-1,1) &=& 4 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} 2a+2b &=& 5 \\ -2a+2b &=& 4 \end{array}\right. \implies a=\frac{1}{4}\wedge b=\frac{9}{4}$$

Entonces $Q=\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{41}{8}\right)$

5.13.5 Como la superficie S tiene ecuación $G(x,y,z)=z^3+xz+y-1$, la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $\nabla\mathbf{G}(P)\cdot(x,y,z)=\nabla\mathbf{G}(P)\cdot P$.

- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z)=(z\,,1\,,3z^2+x)$
- $N=\nabla\mathbf{G}(1,1,0)=(0\,,1\,,1)$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $y+z=1$.

5.13.6 La recta normal L pasa por P y va en la dirección de un vector normal a la superficie S e P. Podemos tomar $N=\nabla\mathbf{G}(P)=(1,1,2/\sqrt{2})$, así una ecuación vectorial de la recta es $L:\ (x,y,z)=P+t\,(1,1,2/\sqrt{2}),\ \ t\in\mathbb{R}$.

5.13.7

a.) $\mathbf{L}_X(t) = P + t \cdot (1,0,1)$

b.) $\mathbf{L}_Y(t) = P + t \cdot (0,1,1)$

c.) $\mathbf{L}_{\mathbf{v}}(t) = P + t \cdot (2,-4,-2)$

d.) $-x - y - z = -1$

5.13.8 Como $G(x,y,z) = x^2 + xz^3 + y^2 z$, la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $\nabla\mathbf{G}(P)\cdot(x,y,z) = \nabla\mathbf{G}(P)\cdot P$

- $\nabla\mathbf{G}(x,y,z) = (2x + z^3\ ,\ 2yz\ ,\ y^2 + 3xz^2)$

- $N = \nabla\mathbf{G}(1,0,-1) = (1\ ,\ 0\ ,\ 3)$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto P es $x + 3z = -2$.

5.13.9 Se omite

Soluciones del Capítulo 6

6.3.1 $f_y = -3x^2 + 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \lor x = y^2$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $P = \left(\frac{4}{25}, \frac{2}{5}\right)$. En $(0,0)$ el criterio no decide, en $\left(\frac{4}{25}, \frac{2}{5}, f(\mathbf{p})\right)$ es punto de silla.

6.3.2 **Puntos críticos.**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \implies y = x^3, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \implies x(x^8 - 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Clasificación. $D_2(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12x^2 \cdot 12y^2 - 16$.

$\mathbf{p}$	$f_{xx}(\mathbf{p})$	$f_{yy}(\mathbf{p})$	$(f_{xy}(\mathbf{p}))^2$	$D_2(\mathbf{p})$	Clasificación
$(0,0)$	0	0	16	-16	$(0,0,1)$ es punto de silla.
$(1,1)$	12	12	16	128	$(1,1,-1)$ es mínimo local.
$(-1,-1)$	12	12	16	128	$(-1,-1,-1)$ es mínimo local

6.3.3 Puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2+3y^2-6x & = & 0 & (E1) \\ f_y = 6xy-6y & = & 0 & (E2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x^2+y^2-2x) & = & 0 \\ 6y(x-1) & = & 0 \Longrightarrow y=0 \ \text{ o } \ x=1. \end{cases}$$

• Si $y=0$, sustituyendo en $(E1)$ queda

$$3(x^2-2x)=0 \Longrightarrow x=0, \ \ x=2.$$

• Si $x=1$, sustituyendo en $(E1)$ queda

$$3(y^2-1)=0 \Longrightarrow y=1, \ \ y=-1.$$

Finalmente, tenemos cuatro puntos críticos: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ y $(1,-1)$.

Clasificación.

$$D_2(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2.$$

- En $(0,0)$ f alcanza un máximo relativo, pues $D_2(0,0)=36>0$ y $f_{xx}(0,0)=-6<0$.
- En $(2,0)$ f alcanza un mínimo relativo pues $D_2(2,0)=36>0$ y $f_{xx}(2,0)=6>0$.
- En $(1,1)$ f no alcanza un extremo pues $D_2(1,1)=-36<0$ (punto de silla).
- En $(1,-1)$ f no alcanza un extremo pues $D_2(1,-1)=-36<0$ (punto de silla).

6.3.4 Como $P=(1,2)$ es punto crítico, las derivadas parciales de z se anulan en P, es decir

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} & = & 0 \\ \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left.\left(y-\dfrac{a}{x^2}\right)\right|_{(1,2)} & = & 0 \\ \\ \left.\left(x-\dfrac{b}{y^2}\right)\right|_{(1,2)} & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2-\dfrac{a}{1^2} & = & 0 \\ \\ 1-\dfrac{b}{2^2} & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow a=2 \ \text{ y } \ b=4$$

Ahora, $D_2(x,y) = \left(\dfrac{2a}{x^3}\right)\left(\dfrac{2b}{y^3}\right) - 1^2 = \left(\dfrac{4}{x^3}\right)\left(\dfrac{8}{y^3}\right) - 1.$

• $D_2(1,2)=3$ y $z_{xx}(1,2)=4>0$. Luego, en el punto $P=(2,1)$ z alcanza un mínimo relativo.

6.3.5

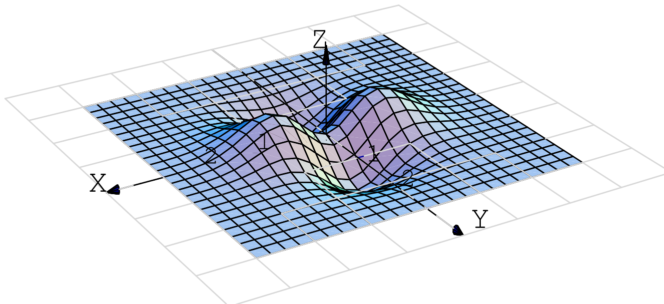
• Puntos críticos: Resolvemos el sistema,

$$\begin{cases} z_x = & 8x-y & = & 0 & \Longrightarrow 8x=y \\ \\ z_y = & -x+2y & = & 0 & \Longrightarrow 2y=x \end{cases} \Longrightarrow 16y=y \ \Longrightarrow y=0$$

así, el único punto crítico es $(0,0)$.

• Test: $D_2(x,y) = 8\cdot 2\cdot -(-1)^2 = 15$ (es constante) y puesto que $z_{xx}=8>0$, entonces $=(0,0,0)$ es un mínimo relativo.

6.3.6 La gráfica de f es,



• Puntos críticos: El sistema es $\begin{cases} z_x = & 2xe^{-x^2-y^2} - 2xe^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) & = & 0 \\ z_y = & -2ye^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$

Simplificando queda $\begin{cases} e^{-x^2-y^2}2x(1-x^2+y^2) & = & 0 \\ -e^{-x^2-y^2}2y(1+x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$

como $e^{-x^2-y^2} > 0$ entonces nos queda el sistema

$$\begin{cases} 2x(1-x^2+y^2) & = & 0 \\ -2y(1+x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$$

Tenemos 4 casos:

• CASO 1.) $2x = 0$ y $2y = 0$. Entonces $x = 0$ y $y = 0$.

• CASO 2.) $2x = 0$ y $(1+x^2-y^2) = 0$. Entonces $x = 0$ y $y = \pm 1$

• CASO 3.) $-2y = 0$ y $(1-x^2+y^2) = 0$. Entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$

• CASO 4.) $(1-x^2+y^2) = 0$ y $(1+x^2-y^2) = 0$. Este caso es inconsistente pues quedaría

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 = -1$$

• Test: Calculamos H y evaluamos cada uno de los cinco puntos.

$z_{xx} = 2e^{-x^2-y^2}(2x^4 - x^2(2y^2+5) + y^2 + 1)$

$z_{yy} = 2e^{-x^2-y^2}(x^2(2y^2-1) - 2y^4 + 5y^2 - 1)$

$z_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)$

Luego tenemos:

- Para $P=(0,0,0)$, $D_2(\mathbf{p})=-4$. P es un punto de silla.
- Para $(0,1,-1/e)$, $D_2(\mathbf{p})=2.165>0$ $\;z_{xx}=1.47<0$. Se trata de un mínimo relativo.
- Para $(0,-1,-1/e)$, $D_2(\mathbf{p})=2.165>0$ $\;z_{xx}=1.47<0$. Se trata de un mínimo relativo.
- Para $(1,0,1/e)$, $D_2(\mathbf{p})=2.165>0$ $\;z_{xx}=-1.47<0$. Se trata de un máximo relativo.
- Para $(-1,0,-1/e)$, $D_2(\mathbf{p})=2.165>0$ $\;z_{xx}=-1.47<0$. Se trata de un máximo relativo.

6.3.7 ↰👁 La distancia del punto al paraboloide es $d(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(x^2+y^2)^2}$.

Puntos críticos: Debemos resolver el sistema

$$\begin{array}{rcl} x-2+2x(x^2+y^2) & = & 0 \\ y-2+2y(y^2+y^2) & = & 0 \end{array}$$

Como $x=0$, $y=0$ no es solución del sistema, podemos asumir que $x\neq 0$ y $y\neq 0$. Luego, despejando $x^2+y^2=\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{2-y}{2y} \quad\Longrightarrow\quad x=y.$

Ahora, sustiyendo $x=y$ en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos $x-2+4x^3=0$. La calculadora nos da las soluciones $x=0.68939835...,y=0.68939835....$

Clasificación. $D_2(x,y) = [(1+4x^2+2(x^2+y^2)]\cdot[1+4y^2+2(x^2+y^2)]-16x^2y^2$. Evaluamos $D_2(0.68939835...,0.68939835...) = 19.4466... > 0$ y $f_{xx}(0.68939835...,0.68939835...) > 0$, es decir, el punto en el paraboloide dónde se alcanza la distancia mínima al punto $(2,2,2)$ es $(0.68939835...,0.68939835...,z(0.68939835...,0.68939835...))$.

6.3.8 ↰👁 Los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$

6.3.9 ↰👁 Suponga que las dimensiones de la caja son x cm de ancho, y cms de largo y z cms de alto, entonces su volumen es :

$$10 = xyz \Longrightarrow z=\frac{10}{xy}$$

Por otro lado, el costo total esta dado por $c(x,y,z) = 20xz+20yz+40xy$

De donde obtenemos que

$$c(x,y) = \frac{200}{x}+\frac{200}{y}+40xy$$

Calculando las derivadas parciales, formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial x} &= 40y - \dfrac{200}{x^2} &= 0 & \text{(E1)} \\ \dfrac{\partial c}{\partial y} &= 40x - \dfrac{200}{y^2} &= 0 & \text{(E2)} \end{cases}$$

Multiplicando por (E1) por x a ambos lados y (E2) por y ambos lados, obtenemos $x = y$. Sustituyendo en (E1) obtenemos $x = y = \sqrt[3]{5}$

$D_2(x,y) = \dfrac{160000}{x^3y^3} - 1600$ y al evaluar en el punto $P = (\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$, tenemos que $((\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, 120\sqrt[3]{5})$ es un mínimo local.

Respuesta: Las dimensiones de la caja con costo mínimo son $x = \sqrt[3]{5}$, $y = \sqrt[3]{5}$ y $z = 10/\sqrt[3]{25}$.

6.3.10

$$\begin{cases} z_x = x^2 - x - \dfrac{3y^2}{2} &= 0 \quad \text{(E1)} \\ z_y = 3y^2 - 3xy &= 0 \implies 3y(y-x) = 0 \implies y = 0 \vee y = x \end{cases}$$

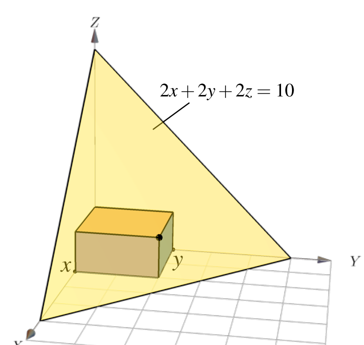
Sustituyendo $y = 0$ en (E1) se obtienen los puntos críticos $(0,0)$ y $(1,0)$

Sustituyendo $y = x$ en (E1) se obtiene otro punto crítico, $(-2,-2)$

$$D_2(x,y) = (2x-1)(6y-3x) - 9y^2 \implies \begin{cases} D_2(0,0) &= 0 & \therefore & \text{el criterio no decide} \\ D_2(1,0) &= -3, & \therefore & (1,0,-1/6) \quad \text{es punto de silla} \\ D_2(-2,-2) &= -6 & \therefore & (-2,-2,-2/3) \quad \text{es punto de silla} \end{cases}$$

6.3.11 El volumnes es $V = xyz$.

$V = xyz = xy(5-x-y)$ con $x > 0$ y $y > 0$. El volumen es máximo si $x = y = \dfrac{5}{3}$, es decir, el volumen máximo es $V = \dfrac{125}{27}$



6.3.12 $V = xyz = xy(c\left(-\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + 1\right))$ con x, y, a, b, c todos positivos. El volumen es máximo si $x = \dfrac{a}{3}$, $y = \dfrac{b}{3}$, es decir, el volumen máximo es $V = \dfrac{abc}{27}$

6.3.13 El área de la superficie es $S(x,y,h) = 2xh + 2yh + 2xy = 64$. Despejando h obtenemos que le volumen es $V = xy\dfrac{32-xy}{x+y}$. Resolviendo $\nabla V = (0,0)$ obtenemos $x = y = \sqrt{32/3}$.

6.3.14 Puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,-1/2e)$. El punto $(0,0,0)$ es punto de silla y en $(1,-1/2e)$ la función alcanza un mínimo local.

6.4.1 $$\begin{cases} 4y-4x &= 0\\ 4x-6y &= 0\\ 2z &= 0\end{cases}$$

- Solo un punto crítico $\mathbf{p}=(0,0,0)$
- $\{D_3(\mathbf{p}),\ D_2(\mathbf{p}),\ D_1(\mathbf{p})\}=\{16,\ 8\ -4\}$
- $(0,0,0,f(\mathbf{p}))$ es punto de silla

6.4.2 $$\begin{cases} 2x-1 &= 0\\ 2y-z &= 0\\ 3z^2-y &= 0\end{cases}$$

- Puntos críticos: $\mathbf{p}=(1/2,0,0)$ $\mathbf{q}=(1/2,1/12,1/6)$
- En $\mathbf{p}$ la función f alcanza un punto de silla y en $\mathbf{q}$ un mínimo local.

6.4.3

6.4.4

6.4.5 $$\begin{cases} 2x-y+z^2+1 &= 0\\ 2y-x &= 0\\ 2xz-2z &= 0 \implies 2z(x-1)=0\end{cases}$$

- Solo un punto crítico $\mathbf{p}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0)$
- $\{D_3(\mathbf{p}),\ D_2(\mathbf{p}),\ D_1(\mathbf{p})\}=\{-10,\ 3\ 2\}$
- $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,f(\mathbf{p}))$ es punto de silla

6.6.1 $$L(x,y,\lambda)=x^2+y^3+1-\lambda(x^2-y^2+1) \implies \begin{cases} 2x(1-\lambda) &= 0 \implies x=0\vee\lambda=1\\ 3y^2+2\lambda y=0 &= 0\quad (E2)\\ x^2-y^2+1 &= 0\quad (E3)\end{cases}$$

- $x=0$ en (E2) nos da $y=\pm 1$ y sustituyendo en (E2) nos da $\lambda=\pm 3/2$, así que $(0,\pm 1)$ son dos puntos críticos.
- $\lambda=1$ en (E2) nos da $y=0$ y $y=-2/3$ pero al sustituir en (E3) no nos da solución.

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$. Máximo local $(0,1,2)$ y mínimo local $(0,-1,0)$

6.6.2
La distancia de $Q=(x,y,z)\in\Pi$ al origen es $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Este problema se puede resolver como

Minimizar $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sujeto a $Ax+By+z+D=0$

O también, dado que $z=-Ax-By-D$,

Minimizar $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+(-Ax-By-D)^2}$.

Lo haremos de la segunda manera. Como $\sqrt{f}$ y f tienen los mismos extremos locales, podemos ahorrar un poco de cálculos resolviendo:

"Minimizar $d(x,y)=x^2+y^2+(-Ax-By-D)^2$"

Puntos críticos.

$$\nabla d=0 \implies \begin{cases} \left(A^2+1\right)x+ABy &= -AD \\ ABx+\left(B^2+1\right)y &= -BD \end{cases} \implies x=-\frac{AD}{1+A^2+B^2} \wedge y=-\frac{BD}{1+A^2+B^2}$$

Clasificación. D_2 y d_{xx} son constantes positivas.

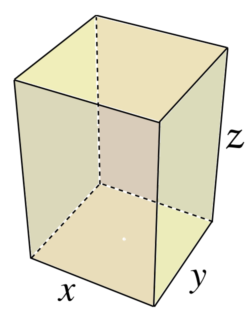
$D_2=4A^2+4B^2+4>0 \wedge d_{xx}=2+2A^2>0.$

Por tanto la distancia es mínima en $Q=-\dfrac{D}{1+A^2+B^2}(A,B,1)$ y la distancia mínima es $d=||Q||=-\dfrac{D}{1+A^2+B^2}$

6.6.3 En este caso $x>0,\ y>0$ y $z>0$, por ser dimensiones.

Puntos críticos. $L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(4x+4y+4z-120)$

$$\begin{cases} yz-4\lambda &= 0 \\ xz-4\lambda &= 0 \\ xy-4\lambda &= 0 \\ 4x+4y+4z-120 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} yz &= xz \\ xz &= xy \end{cases} \implies x=y=z$$



$4x+4y+4z-120=0 \implies 16x=0 \implies x=y=z=10 \wedge 4\lambda=yz \implies \lambda=25$

Para determinar si estas dimensiones son las buscadas, usamo el criterio de clasificación.

Clasificación. El punto crítico es $P=(10,10,10)$ con $\lambda=25$.

$$\overline{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & z \\ 4 & z & 0 \end{bmatrix} \implies \overline{D}_2(P) = 320 > 0$$

$$\overline{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & z & y \\ 4 & z & 0 & x \\ 4 & y & x & 0 \end{bmatrix} \implies \overline{D}_3(P) = -4800 < 0$$

Entonces con dimensiones $x = y = z = 10$ tenemos volumen máximo.

6.6.4 $\quad L(x, y, \lambda) = x^2 - (x-1)^2 + y + (y-1)^2 - \lambda(y - (x-1)^2)$

Puntos críticos.

$$\nabla L = 0 \implies \begin{cases} 2x - 2(x-1) + 2\lambda(x-1) &= 0 \implies 2 + 4(x-1)^3 - 2(x-1) = 0 \implies x = 0 \\ 2(y-1) + 1 - \lambda &= 0 \implies \lambda = 2(x-1)^2 - 1 \\ y - (x-1)^2 &= 0 \implies y = (x-1)^2 \end{cases}$$

Entonces $x = 0$, $y = 1$ y $\lambda = 1$.

Clasificación. El punto crítico es $P = (0, 1)$ con $\lambda = 1$.

$$\overline{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2(x-1) & 1 \\ -2(x-1) & 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \overline{D}_2(0, 1, 1) = -10 < 0$$

Entonces $(0, 1, f(1, 0))$ es un mínimo local del problema

6.6.5 $\quad$ Puntos críticos: $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Los máximo locales son $(1, 0, 2)$ y $(-1, 0, 2)$ y los mínimos locales son $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$

6.6.6 $\quad L(x, y, z, \lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} - \lambda(x - 2y + 4z - 4)$

$$\Delta L = 0 \implies \begin{cases} x &= \dfrac{20}{21} \\ y &= \dfrac{2}{21} \\ z &= \dfrac{17}{21} \\ \lambda &= \dfrac{-1}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

$P = \left(\frac{20}{21}, \frac{2}{21}, \frac{17}{21}\right) \in \Pi$ y $d(Q,\Pi) = ||Q-P|| = \frac{1}{\sqrt{21}}$

6.6.7 $L(x,y,\lambda) = x^2+y^3+1-\lambda(x^2-y^2+1) \implies \begin{cases} 2x(1-\lambda) &= 0 \implies x=0 \vee \lambda = 1 \\ 3y^2+2\lambda y = 0 &= 0 \quad \text{(E2)} \\ x^2-y^2+1 &= 0 \quad \text{(E3)} \end{cases}$

- $x=0$ en (E2) nos da $y=\pm 1$ y sustituyendo en (E2) nos da $\lambda = \pm 3/2$, así que $(0,\pm 1)$ son dos puntos críticos.

- $\lambda = 1$ en (E2) nos da $y=0$ y $y=-2/3$ pero al sustituir en (E3) no nos da solución.

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$. Máximo local $(0,1,2)$ y mínimo local $(0,-1,0)$

6.6.8 Puntos críticos: $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$, $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Los máximo locales son $(1,0,2)$ y $(-1,0,2)$ y los mínimos locales son $\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{13}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{58}{27}\right)$

6.6.9 $L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2} - \lambda(x-2y+4z-4)$

$$\Delta L = 0 \implies \begin{cases} x &= \frac{20}{21} \\ y &= \frac{2}{21} \\ z &= \frac{17}{21} \\ \lambda &= \frac{-1}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

$P = \left(\frac{20}{21}, \frac{2}{21}, \frac{17}{21}\right) \in \Pi$ y $d(Q,\Pi) = ||Q-P|| = \frac{1}{\sqrt{21}}$

6.6.10 $L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{x^2+(y-2)^2+(z-2)^2} - \lambda(z-x^2-y^2)$

$\Delta L = 0 \implies x = 0,$ y $2y^3-3y-2=0$. La solución de la cúbica se puede hacer con la calculadora. De este modo:

$P \approx (0,\ 1.47569,\ 2.17765)$ y $d(Q,\Pi) = ||Q-P|| \approx 0.553592$

6.6.11
a.) Como $xy^2z = 32$ entonces x, y ni z puede ser nulos (sino el producto sería 0).
b.) Problema: "Minimizar $d(Q,O)$ sujeto a la restricción $xy^2z = 32$."

"Minimizar $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sujeto a la restricción $xy^2z = 32$."

Sea $L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \lambda(xy^2z-32) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \lambda xy^2z - 32\lambda)$.

- Puntos críticos.

$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \lambda y^2 z &= 0 \quad (E1) \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2\lambda xyz &= 0 \quad (E2) \\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \lambda xy^2 &= 0 \quad (E3) \\ xy^2z - 32 &= 0 \quad (E4) \end{cases}$$

Como x, y y z son no nulos, podemos despejar λ en las ecuaciones (E1), (E2) y (E3),

$$\lambda = \overbrace{\frac{x}{y^2 z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{2xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}^{2x^2=y^2} = \frac{z}{xy^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

de donde obtenemos $2x^2 = y^2$ y $y^2 = 2z^2$, es decir $x = \pm z$ y $y^2 = 2z^2$. Sustituyendo en la ecuación (E4) nos queda $z \cdot 2z^2 \cdot z = 2z^4 = 32$, es decir $z = \pm 2$.

Finalmente, como $y^2 > 0$ y como $xy^2z = 32$ entonces x y z *deben tener el mismo signo*, es decir, $x = z$ y $y = \pm\sqrt{2}\,z$. Tenemos solo cuatro posibles soluciones,

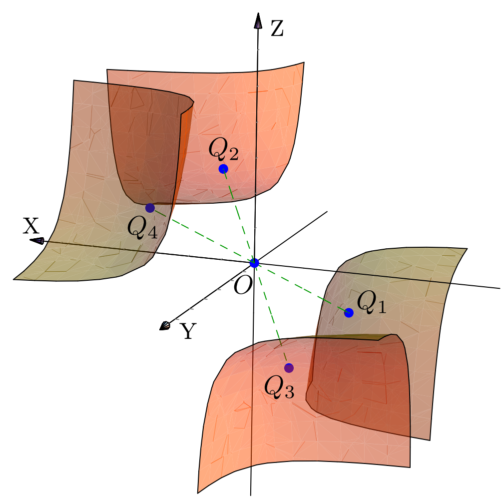
$Q_1 = (2,\ -2\sqrt{2},\ 2); \quad \lambda = 1/8,$

$Q_2 = (2,\ -2\sqrt{2},\ 2); \quad \lambda = 1/8,$

$Q_3 = (-2,\ 2\sqrt{2},\ -2); \quad \lambda = 1/8,$

$Q_4 = (-2,\ 2\sqrt{2},\ -2); \quad \lambda = 1/8.$

Como $d(Q_1, O) = d(Q_2, O) = d(Q_3, O) = d(Q_4, O)$, los cuatro puntos son los puntos de S más cercanos al origen.



6.6.12 Problema: "Maximizar $\rho = 2 + xz + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$".

Sea $L(x, y, z, \lambda) = 2 + xz + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$. Factorizando en la ecuación $L_y = 0$ obtenemos los casos $y = 0$ y $\lambda = 1$, y con las ecuaciones $L_x = 0$ y $L_z = 0$ obtenemos los casos $z = 0$ y $\lambda = \pm 1/2$. Resolviedo para estos casos se obtienen los cuatro puntos críticos: $(0, \pm 2, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$.

Aplicando nuestro criterio de clasificación obtenemos que ρ es máximo en los puntos $(0, \pm 2, 0)$ y mínimo en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$.

6.6.13 $(0, -1, 2)$.

6.6.14 ↩ 👁 $x = 3/2,\;\; y = 3/2,\;\; \lambda = -3.$

6.6.15 ↩ 👁 $L(r,h,\lambda) = +2kr^2 + 5hkr - \lambda\left(hkr^2 - 1000\right)$

$r \approx \dfrac{10.7722}{\sqrt[3]{k}},\; h \approx \dfrac{8.61774}{\sqrt[3]{k}}, \lambda \approx 0.464159\sqrt[3]{k}$

6.6.16 ↩ 👁 $\lambda = 0,\; x = -1,\; y = 0,$
$\lambda = 0,\; x = 1,\; y = 0,$
$\lambda = 0,\; y = -1,\; x = 0,$
$\lambda = 0,\; y = 1,\; x = 0,$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\; x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\; y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\; x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\; y = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\; x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\; y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},$
$\lambda = \dfrac{1}{2},\; x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\; y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
El valos mínimo es 0 y el valor máximo $\dfrac{1}{4}$.

6.6.17 ↩ 👁 $(\pm\sqrt{2},1)$ y $\lambda = 1$. Observe que $x = 0$ no satisface la restricción.

6.6.18 ↩ 👁 Si las dimensiones son $x,\; y$ para la base y z para la altura, el problema consiste en minimizar $C(x,y,z) = 2xy + 2\cdot 2xz + 4\cdot 2yz$ sujeto a la restricción $V = xyz = 8000$ (entonces $x,\; y,\; z\; > 0$). Aquí suponemos que las carascon costo \$4 cm^2 son las de lados y y z.

Si lo resolvemos por Lagrange,

$L(x,y,z,\lambda) = 2xy + 4xz + 8yz - \lambda(xyz - 8000)$

Resolvemos $\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{cases} \implies x = 40,\; y = 20,\; z = 10 \quad (\text{y } \;\lambda = 2/5)$

6.6.19 ↩ 👁 Problema: “Maximizar $V(r,h) = \pi r^2 h$ sujeto a $48\pi = 2\pi r\,h + \pi r^2$.”

- $L(r,h,\lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2r\,h + r^2 - 48).$
- $\begin{cases} L_r = 2\pi r h - \lambda(2h + 2r) &= 0 \quad (1) \\ L_h = \pi r^2 - \lambda 2r &= 0 \quad (2) \\ L_\lambda = 2r\,h + r^2 &= 48 \quad (3) \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda &= \dfrac{\pi r h}{h+r}, \quad \text{pues} \quad h > 0 \;\; \text{y} \;\; r > 0. \\ \lambda &= \pi r/2 \\ 2r\,h + r^2 &= 48 \end{cases}$

Ahora, $\lambda = \lambda \implies \dfrac{\pi r h}{h+r} = \dfrac{\pi}{2} r \implies \mathbf{r}(h - r) = 0 \implies r = h \quad (r > 0).$

Luego, sustituimos $r = h$ en la ecuación (3) :

$2r\,h + r^2 = 48 \implies 2h^2 + h^2 = 48 \implies h = \pm 4.$

$\therefore$ Las dimensiones son $h = 4$ y $r = 4$.

6.6.20 Problema: "Minimizar $A = 3\pi r^2 + 2\pi r h$ sujeto a la restricción $V = \pi r^2 h + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = 400$"

La altura total es $h + r \approx 8.49$m y el diámetro es $d \approx 8.49$m

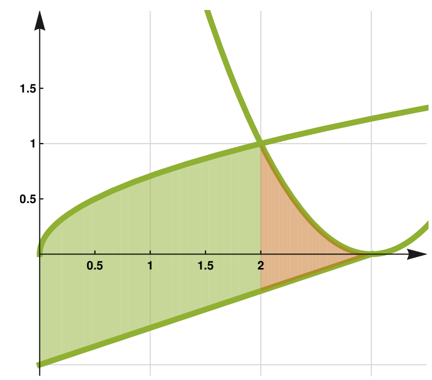
6.6.21 (*) Se omite

6.6.22 (*) Se omite

Soluciones del Capítulo 7

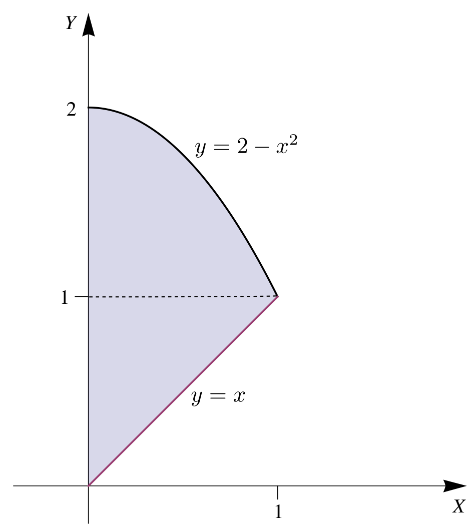
7.5.1

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_{\frac{x}{3}-1}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \mathbf{36}\, dy\, dx + \int_2^3 \int_{\frac{x}{3}-1}^{(x-3)^2} \mathbf{36}\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(-12x + 18\sqrt{2x} + 36\right)\, dx + \int_2^3 \left(36x^2 - 228x + 360\right)\, dx \\ &= 144 \end{aligned}$$

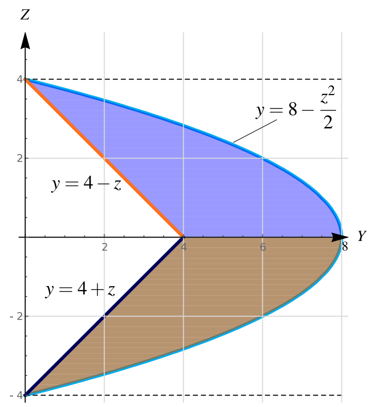


7.5.2

$$A_R = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} dy\, dx = 7/6$$



7.5.3 $$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{16-2y}}^{y-4} xy\; dzdy + \int_0^4 \int_{4-y}^{\sqrt{16-2y}} xy\; dzdy + \int_4^8 \int_{-\sqrt{16-2y}}^{\sqrt{16-2y}} xy\; dzdy$$



7.5.4

$$\int_0^1\int_0^{(x-1)^2+1} x^2\cos(y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^x x^2\cos(y)\,dy\,dx\approx 2.54045$$

7.5.5

1. $I = \displaystyle\int_0^2\int_{-2+\sqrt{2-y}}^{2-y} f(x,y)\cdot dx\,dy$
2. $I = \displaystyle\int_{-2}^{-2+\sqrt{2}}\int_{2-(x+2)^2}^{2} f(x,y)\cdot dy\,dx + \int_{-2+\sqrt{2}}^{0}\int_0^2 f(x,y)\cdot dy\,dx + \int_0^2\int_0^{2-x} f(x,y)\cdot dy\,dx$

7.5.6 Cuidado, debe escoger la rama correcta en cada parábola.

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_0^2\int_{-2+\sqrt{2-y}}^{3-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{-2}^{-2+\sqrt{2}}\int_{2-(x+2)^2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{-2+\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}}\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx+\int_{3-\sqrt{2}}^{3}\int_0^{(x-3)^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

7.5.7 $A=\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\cdot dy\,dx=a^2\pi$

7.7.1 Masa $M=86$

$$\overline{x}=\frac{17}{10}$$

$$\overline{y}=\frac{322}{215}$$

7.7.2 Masa $M=\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}(x^2+y^3)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^x(x^2+y^3)\,dy\,dx=\frac{109}{15}.$

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x} x\left(x^2+y^3\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^x x\left(x^2+y^3\right)dy\,dx}{M} \approx 1.3211$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x} y\left(x^2+y^3\right)dy\,dx + \int_1^2\int_0^x y\left(x^2+y^3\right)dy\,dx}{M} \approx 1.04128$$

Centro de masa $(\overline{x},\overline{y}) \approx (1.3211, 1.04128)$

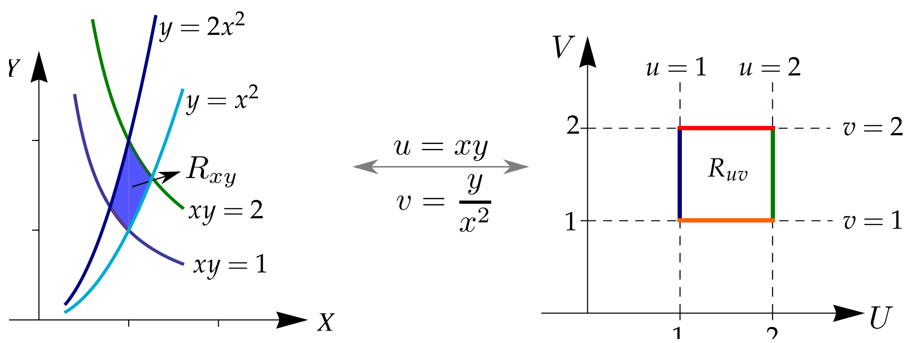
7.7.3 Se omite.

7.7.4 Se omite.

7.7.5 Se omite.

7.9.1 Para calcular $\displaystyle\iint_{R_C} 1\cdot dA$ debemos dibujar la nueva región de integración R_{uv} en el plano UV a partir de la región R_{xy} dada y el cambio de variable que se indica. Como la inversa del cambio de variable es continua si $v>0$, esto se puede hacer aplicando el cambio de variable a las curvas frontera de la región R_{xy} y calculando las respectivas curvas en el plano UV.

Nueva región. Como $u=xy$, Las curvas $xy=1$ y $xy=2$ corresponden a las curvas $u=1$ y $u=2$ en el plano UV. Como $v=\dfrac{y}{x^2}$, las curvas $y=x^2$ y $y=2x^2$ corresponden a las curvas $v=1$ y $v=2$ en el plano UV.



El cambio de variable es invertible: El cambio de variable 'mapea' la región R_{uv} en la región R_{xy} pues el cambio de variable es invertible y la inversa es continua si $v>0$. En efecto, como $x>0$ y $y>0$ entonces $u>0$ y $v>0$. Luego como $y=vx^2 \implies u=x^3v$, de donde $x=\sqrt[3]{\dfrac{u}{v}}$ y $y=v\cdot\sqrt[3]{\dfrac{u^2}{v^2}}$.

Calcular el Jacobiano. Ahora, $J(x,y) = \textbf{Det}\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{bmatrix} = \textbf{Det}\begin{bmatrix} y & x \\ -2y/x^3 & 1/x^2\end{bmatrix} = 3y/x^2>0$, pues $x,\ y>0$. Como las derivadas parciales de x e y son continuas y el jacobiano es no nulo, entonces por el teorema de la función inversa,

- $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)} = \dfrac{1}{3y/x^2} = \dfrac{1}{3v} > 0$ pues $v>0$.

Calcular el área. El área de la región es

$$\begin{aligned} A_{R_{xy}} &= \int_1^2\int_1^2 1\cdot |J(u,v)|\cdot\, du\, dv \\ &= \int_1^2\int_1^2 1\cdot \frac{1}{3v}\cdot\, du\, dv \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3v}\, dv \;=\; \frac{1}{3}\ln(v)\Big|_1^2 \;=\; \frac{1}{3}\ln(2). \end{aligned}$$

$$\iint_{R_D} \left(\frac{y}{x^2}e^{xy}\right) dA = ...$$

7.9.2

Aplicamos el cambio de variable

$$x = ar\cos t \quad y \quad y = br\,\text{sen}\,t; \quad \text{el Jacobiano es} \quad J = r\,a\,b$$

La nueva región es $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leqslant 1\}$. Ahora use coordenadas polares.

7.9.3 Transformamos la región R es un círculo con el cambio de variable,

$$u = \frac{(x-1)}{3},\; v = \frac{y}{5}. \quad \text{El Jacobiano es} \quad J = \frac{1}{15}.$$

La nueva región es $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leqslant 1\}$. Ahora use coordenadas polares.

7.9.4 Se omite.

7.9.5 $I = 3/4(e-e^{-1})$.

7.9.6 Se omite.

7.9.7 Se omite.

7.10.1 ↶ 👁

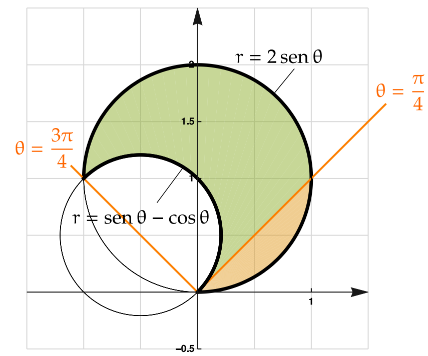
• **Intersección:**

$$\operatorname{sen}\theta-\cos\theta=2\operatorname{sen}\theta \implies \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=-1 \implies \tan\theta=-1 \implies \theta=\frac{3\pi}{4}$$

• **Tangentes al polo de interés:**

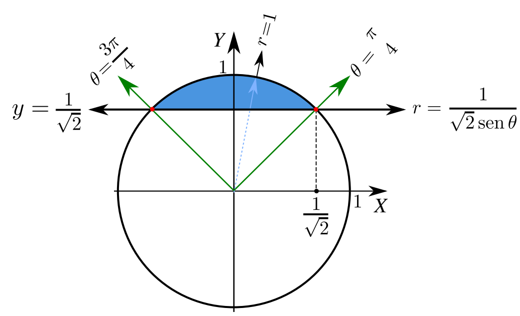
$$\operatorname{sen}\theta-\cos\theta=0 \implies \tan\theta=1 \implies \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\theta=0 \implies \theta=0$$



$$A_R=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sin(t)} r\,dr dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{\sin(t)-\cos(t)}^{2\sin(t)} r\,dr dt\approx 2.0708$$

7.10.2 ↶ 👁 **Solución:** Debemos hacer el cambio de variable $x=r\cos(\theta)$ y $y=r\operatorname{sen}(\theta)$.



Observe que

- La recta $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se transforma en $r\operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \implies r=\dfrac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}$.
- La circunferencia $x^2+y^2=1$ se transforma en $r=1$.
- La recta $y=x$ se transforma en $\theta=\pi/4$. En efecto, $y=x \implies \cos\theta=\operatorname{sen}(\theta) \implies \theta=\pi/4$. Esto, por supuesto, también lo podemos establecer de manera geométrica.

$$\begin{aligned}A_R &= \iint_R 1\cdot dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}}^{1} r\,dr\,d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}}^{1} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\csc^2(\theta)\,d\theta = \left.\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\cot(\theta)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{4}\end{aligned}$$

7.10.3 ↶ 👁

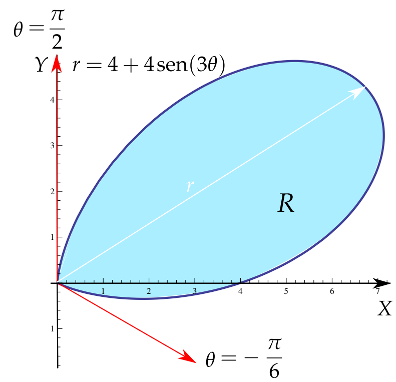
7.10.4 ↶ 👁 Los límites de integración son $\theta=-\pi/6$ y $\theta=7\pi/6$. Ahora calcule la integral que da el área.

7.10.5 La ecuación de la curva es $r = 4 + 4\,\text{sen}\,3\theta$.

Tangentes al polo: $4 + 4\,\text{sen}\,3\theta = 0 \Longrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\dfrac{\pi}{3}$.

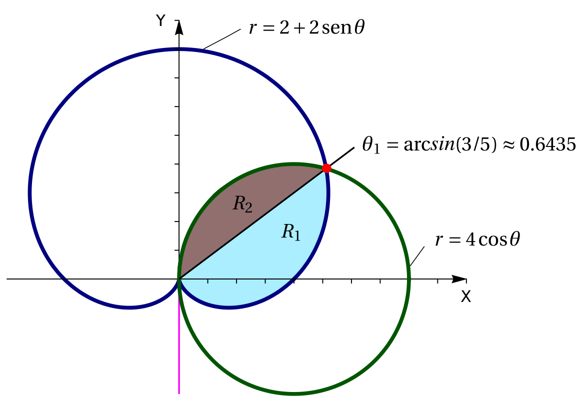
Observando la figura tenemos que los límites de integración adecuados son $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$A_R = \iint_R 1 \cdot r\,dr d\theta \;=\; \int_{-\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{4+4\,\text{sen}\,\theta} 1 \cdot r\,dr d\theta \;=\; 8\pi$$



7.10.6 **Solución:**

a.)



a.) **Tangentes al polo:**

$$2 + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$
$$4\cos\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

b.) **Intersección**

$$2 + 2\,\text{sen}\,\theta = 4\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad -12 + 8\,\text{sen}\,\theta + 20\,\text{sen}^2\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta = \text{arc sen}(3/5) \approx 0.6435$$

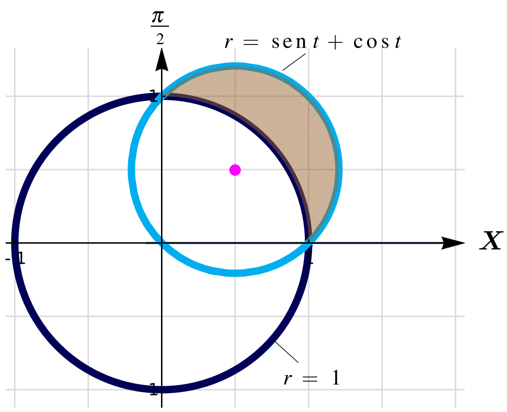
c.) **Área:** $A_R = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\text{arc sen}\left(\frac{3}{5}\right)}\int_0^{2+2\,\text{sen}(\theta)} r dr d\theta + \int_{\text{arc sen}\left(\frac{3}{5}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos(\theta)} r dr d\theta \;=\; -\frac{28}{5} + \frac{7\pi}{2} - \text{arc sen}\left(\frac{3}{5}\right)$

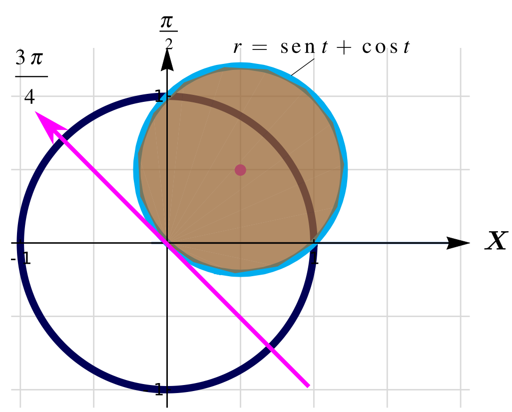
d.) $r = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2 + 2\,\text{sen}(3\theta) = 0 \;\; \theta_1 = \dfrac{7\pi}{6}$ y $\theta_2 = \dfrac{11\pi}{6}$.

$$\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \int_0^{2\sin(3\theta)+2} 1 r dr d\theta \;=\; 2\pi$$

Nota: El intervalo $[-7\pi/6, -\pi/6]$ no es correcto, agrega un trozo adicional de curva y el resultado daría, en valor absoluto, 3π. Use Wolfram Alpha (Internet) para graficar **`+ 2 Sin[3t]PolarPlot[2, t, -7 Pi/6, -Pi/6]`**

7.10.7 Note que la curva celeste tiene ecuación $r = \operatorname{sen} t + \cos t$ con $t \in [-\pi/4,\ 3\pi/4]$. La región sombreada requiere diferentes intervalos para cada curva. Mejor es calcular el área del círculo con circunferencia celeste y restar el área de la región que va de la circunferencia azul a la circunferencia celeste, esa regón si está entre 0 y $\pi/2$ para ambas curvas.



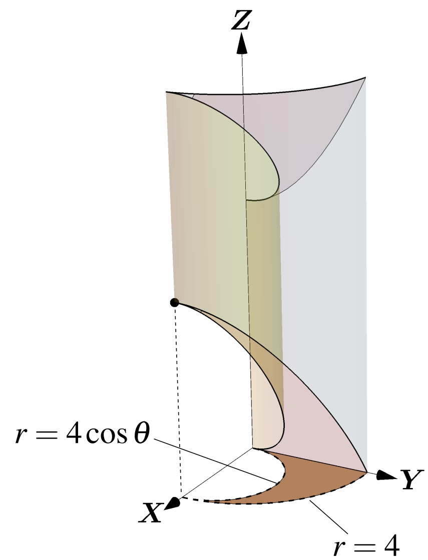


$$A_R = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt \;-\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin(t)+\cos(t)} 1\, r\, dr\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

7.10.8 $$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

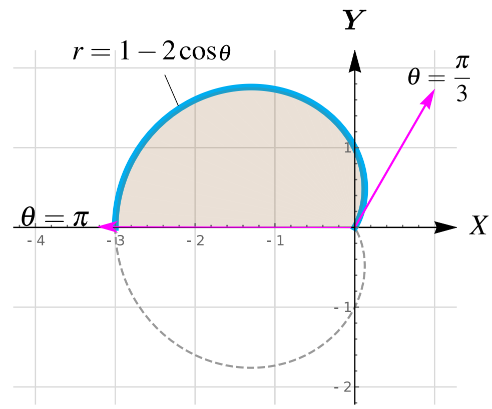
7.10.9 Si $x = r\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$; entonces en la proyección XY tenemos una región limitada por la curva $C_1 :\ x^2+y^2 = 16$ o también $C_1 :\ r = 4$ y la curva $(x-2)^2+y^2 = 4$ o también $r = 4\cos\theta$ con $\theta \in [0, \pi/2]$.

$$
\begin{aligned}
V_Q &= \iint_{R_{xy}} \left(8+\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{3x}{2}\right)\,dA\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{4\cos\theta}^{4}\left(8+\frac{r^2}{4}-\frac{3r\cos\theta}{2}\right)\,r\,dr\,d\theta\\
&= -32+27\pi\approx 52.823
\end{aligned}
$$



7.10.10

$$
\begin{aligned}
V_E &= \iint_{R_{xy}} (1-x-0)\,dA\\
&= \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{1-2\cos\theta}(1-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta\\
&= \int_{\pi/3}^{\pi} \left.\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\theta\right|_0^{1-2\cos\theta} d\theta\\
&= \int_{\pi/3}^{\pi}\frac{(1-2\cos\theta)^2}{2}-\frac{(1-2\cos\theta)^3}{3}\cos\theta\,d\theta\approx 10.578
\end{aligned}
$$

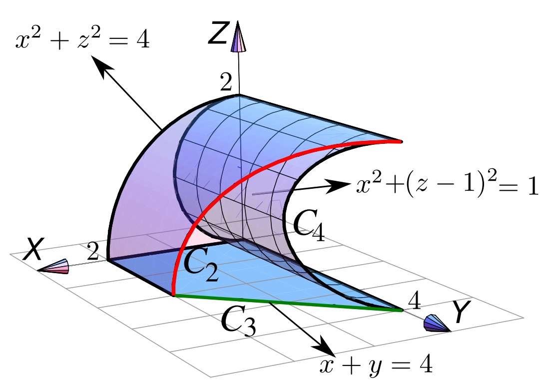


7.10.11 $\quad V_Q = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$

7.10.12

La manera fácil es proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares.

$$
\begin{aligned}
V_Q &= \iint_{R_{xz}} 4-x\,dA\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{2\,\mathrm{sen}\,\theta}^{2}(4-r\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\\
&= 2\pi-2
\end{aligned}
$$



7.10.13 Proyectar sobre XZ y usar coordenadas polares. Calculando la intersección entre las superficies podemos establecer que la región de integración R_{xy} está entre las curvas $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$

y las rectas $y = x$ y $x = 0$.

$$V_Q = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{3}} \right) r \, dr d\theta$$

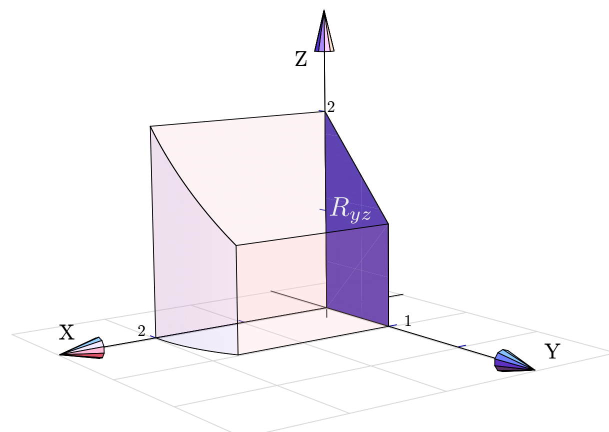
7.11.1 a) $\dfrac{395}{8}$

b)

7.11.2 El cálculo es fácil proyectando sobre XY o YZ.

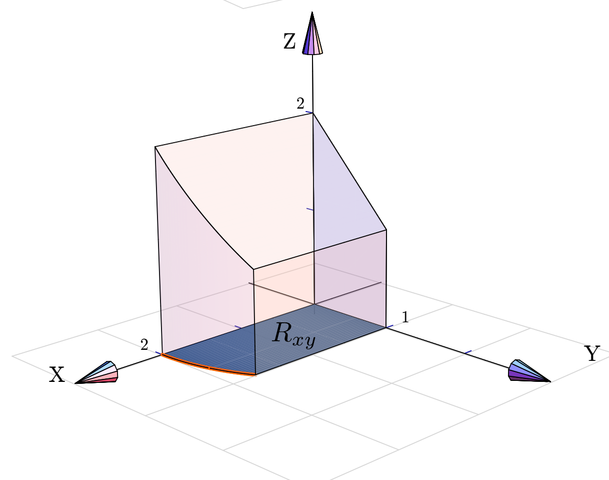
Proyección sobre YZ.

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{2-y} \left[\int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \right] dz \, dy$$



Proyección sobre XY.

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left[\int_0^{2-y} dz \right] dx \, dy$$

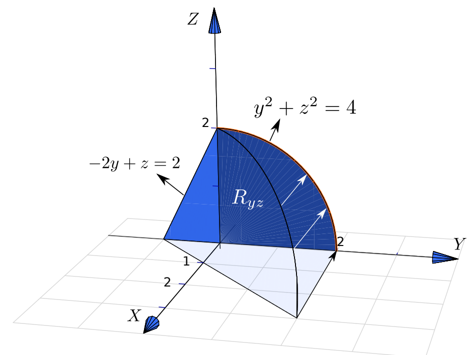


7.11.3

7.11.4

Proyectamos sobre YZ.

$$V_Q = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2+2y}\left[\int_{0}^{1-z/2+y} dx\right] dz\,dy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\left[\int_{0}^{1-z/2+y} dx\right] dz\,dy$$



7.13.1 $\quad V_Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

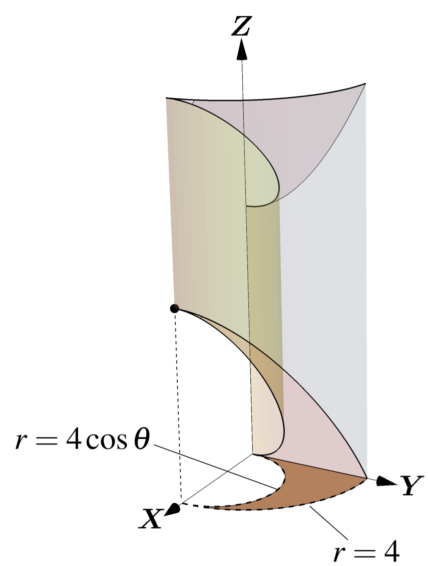
7.13.2 $\quad V_C = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-2r} r\,dz\,dr\,d\theta$ pues $z \leqslant 4.$

7.13.3 $\quad V_C = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h-hr/a} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi a^2 h}{3}$

7.13.4 $\quad \frac{8\pi^2}{3} - 2\sqrt{3}\pi.$

7.13.5 Si $x = r\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$; entonces en la proyección XY tenemos una región limitada por la curva $C_1: x^2+y^2 = 16$ o también $C_1: r = 4$ y la curva $(x-2)^2+y^2 = 4$ o también $r = 4\cos\theta$ con $\theta \in [0,\pi/2]$.

$$\begin{aligned}
\iiint_E 1\cdot dV &= \iint_{R_{xy}}\int_{\frac{3x}{2}}^{8+\frac{x^2+y^2}{4}} 1\cdot\,dz\,dA\\
&= \iint_{R_{xy}}\left(8+\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{3x}{2}\right) dA\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{4\cos\theta}^{4}\left(8+\frac{r^2}{4}-\frac{3r\cos\theta}{2}\right) r\,dr\,d\theta\\
&= -32+27\pi \approx 52.823
\end{aligned}$$



Soluciones del Capítulo 8

8.6.1 Vamos a proyectar sobre el plano XY. La proyección es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 2.$

• Como $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ entonces podemos poner $\mathbf{N}=\dfrac{(-x/z,\,-y/z,\,1)}{||(-x/z,\,-y/z,\,1)||}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_S (y,-x,8z)\cdot\frac{(-x/z,\,-y/z,\,1)}{||(-x/z,\,-y/z,\,1)||}||(-x/z,\,-y/z,\,1)||\,dA\\
&= \iint_D 8z\,dA\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 8\sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta\\
&= \frac{16\pi(5^{3/2}-9^{3/2})}{-3}
\end{aligned}$$

8.6.2 Observe que debe calcular con $\mathbf{N}$ siempre exterior al sólido E.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\pi$$

8.6.3

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{R_{xy}}(x,y,1+x^2+y^2)\cdot(-2x,-2y,1)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}(1-r^2)r\,dr\,d\theta$$

8.6.4

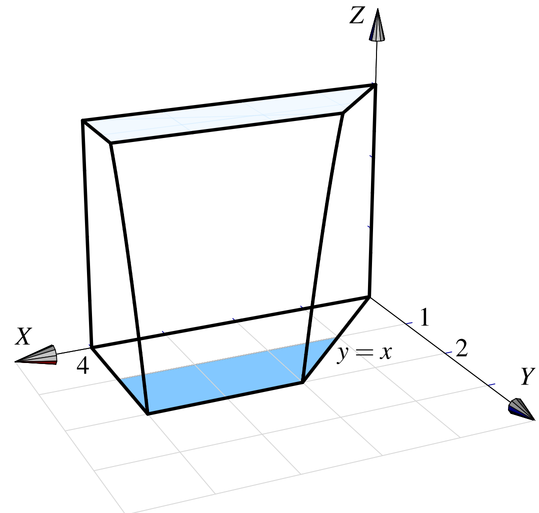
$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} &= \int_1^3\int_0^3 (0,x+y,1-(x-2)^3)\cdot(-3(x-2)^2,0,1)\,dy\,dx\\
&= \int_1^3\int_0^3 (1-(x-2)^3)\,dy\,dx\\
&= \int_1^3\int_0^3 (-x^3+6x^2-12x+9)\,dy\,dx\\
&= 3\int_1^3 (-x^3+6x^2-12x+9)\,dx \;=\; 3\left(-\frac{x^4}{4}+2x^3-6x^2+9x\right)\Big|_0^3 \;=\; 6
\end{aligned}$$

8.6.5 Proyectamos sobre XY

$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_S \mathbf{dS}\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+4r^2}\,r\;dr\,d\theta\\
&= \frac{1}{12}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_1^{\sqrt{3}}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{48}(13\sqrt{13}-5\sqrt{5})
\end{aligned}$$

8.6.6 Proyectamos sobre XY.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} &= \int_1^2\int_y^4 (xy,\ x,\ z+1)\cdot(0,\ 2y,\ 1)\,dx\,dy\\ &= \int_1^2\int_y^4 2xy+z+1\,dx\,dy\\ &= \int_1^2\int_y^4 2xy+4-y^2+1\,dx\,dy\end{aligned}$$



8.8.1 Se puede aplicar el teorema de divergencia. **Div** $F = 1-1+2=2$.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} &= \int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{3-x} 2\,dy\,dz\,dx\\ &= \int_0^2\int_0^{4-x^2}(6-2x)\,dz\,dx\\ &= \int_0^2 (6-2x)(4-x^2)\,dx\\ &= \int_0^2 (2x^3-6x^2-8x+24)\,dx\\ &= \left(\frac{x^4}{2}-2x^3-4x^2+24x\right)\Big|_0^2 \;=\; 8-16-16+48 \;=\; 24\end{aligned}$$

8.8.2 Se omite.

8.8.3

- $\text{div}\mathbf{F} = y^2+z^2$

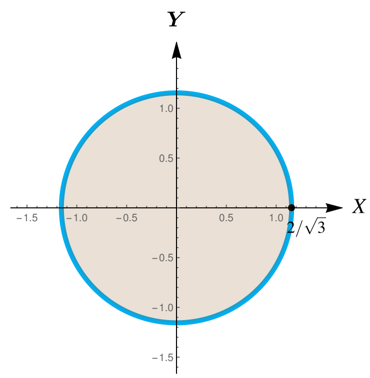
- La proyección es el círculo $x^2+y^2\leqslant 1$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 r^2\,r\,dr\,d\theta\\ &= \pi\end{aligned}$$

8.8.4

Como $S = \partial E$ y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E, podemos usar el teorema de la divergencia. Proyectando sobre XY tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_E \operatorname{Div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{R_{xy}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)/2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dA \\
&= \iint_{R_{xy}} z^2\Big|_{\sqrt{(x^2+y^2)/2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dA \\
&= \iint_{R_{xy}} \left(2-x^2-y^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2/\sqrt{3}} \left(2-r^2-\frac{r^2}{2}\right)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2/\sqrt{3}} \left(2r-\frac{3}{2}r^3\right)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\,d\theta = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$



8.8.5 Como $S = \partial E$ y $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario siempre exterior a E, podemos usar el teorema de la divergencia. Proyectando sobre XZ tenemos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\int_0^{5-z} 4x^2\,dy\,dz\,dx$$

8.8.6

8.8.7 Se omite.

8.9.1 Vamos a proyectar sobre el plano xy. Como se ve en la figura, la proyección está entre los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=2$ con $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$. Entonces

$$\begin{aligned}
A_S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA \\
&= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_1^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta, \qquad (\text{sustitución:}\quad u = 4r^2+1) \\
&= \frac{\left(-5\sqrt{5}+17\sqrt{17}\right)\pi}{48}
\end{aligned}$$

8.9.2 el círculo $x^2+y^2=1$.

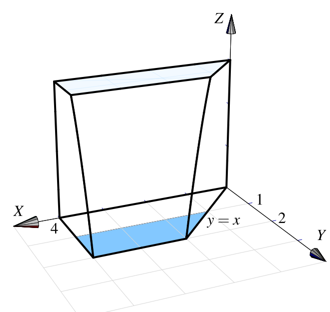
$$\mathbf{dS} = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\; dA \;=\; \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\;\; dA$$

$$A_S = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{dS} \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\,dr\,d\theta \;=\; \pi\sqrt{2}.$$

8.9.3

8.9.4 Proyectamos sobre XY.

$$\begin{aligned}\iint_S (2xy+z+1)\,dS &= \int_1^2\int_y^4 (2xy+z+1)\sqrt{4y^2+1}\;dx\,dy\\ &= \int_1^2\int_y^4 (2xy+4-y^2+1)\sqrt{4y^2+1}\;dx\,dy\end{aligned}$$



8.9.5 Proyectando sobre XY, tenemos $S:\; 9-x^2-y^2$. Usando coordenadas polares queda

$$\iint_s (x^2+y^2+z)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^3 9r\sqrt{4r^2+1}\;dr d\theta$$

8.9.6 $S = S_1+S_2+S_3+S_4$ donde $S_1:\; y+z=5,\;\; S_2:\; 4-x^2,\;\; S_3:\; z=0,$ y $S_4:\; y=0.$

$$\iint_S xy(z+1)\;dS = \iint_{S_1} xy(z+1)\;dS + \iint_{S_2} xy(z+1)\;dS + \iint_{S_3} xy(z+1)\;dS + \iint_{S_4} xy(z+1)\;dS$$

Ahora elegimos los planos de proyección para cada superficie.

a.) Proyectando sobre XZ, $S_1:\; y = 5-z$. Entonces $\displaystyle\iint_{S_1} xy(z+1)\;dS = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} (x(5-z)(z+1)\sqrt{2}\;?dzdx$

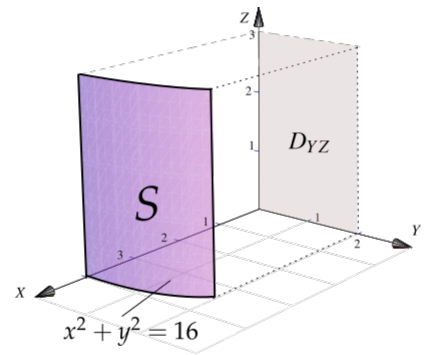
b.) Proyectando sobre YZ, $S_2\;:\;\; x \;=\; \sqrt{4-z}$. Entonces $\displaystyle\iint_{S_1} xy(z+1)\,dS \;=\; \int_0^4\int_0^{5-z} \sqrt{4-z}\;\; y(z+1)\sqrt{\frac{4(4-z)+1}{4(4-z)}}\;dydz$

c.) Proyectando sobre XY, $S_3: z=0$. Entonces $\displaystyle\iint_{S_3} xy(z+1)\;dS = \int_{-2}^{2}\int_0^5 xy\;\sqrt{1}\;dydx$

d.) Proyectando sobre XZ, $S_4: y=0$. Entonces $\displaystyle\iint_{S_3} xy(z+1)\;dS = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} x\cdot 0\cdot z\sqrt{1}\;dzdx = 0$

8.9.7 Proyectando sobre YZ.

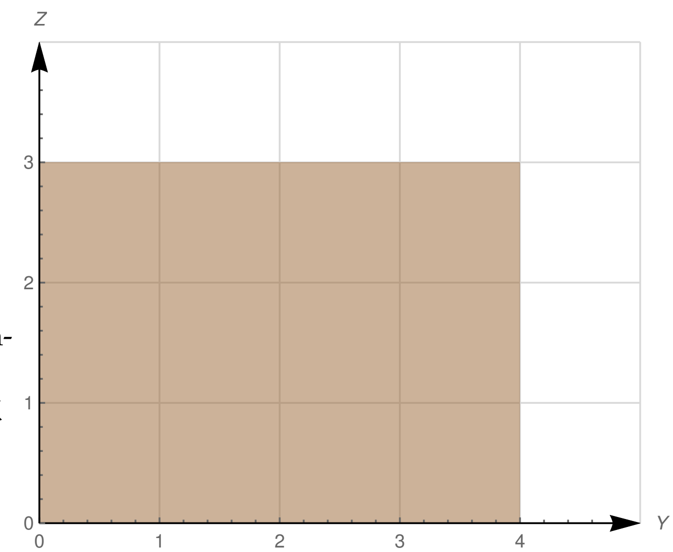
$$\begin{aligned} A_S = \iint_S 1 \cdot dS &= \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{\frac{y^2}{16-y^2}+1}\, dz\, dy \\ &= \int_0^2 \frac{12}{\sqrt{16-y^2}}\, dy \;=\; 2\pi \end{aligned}$$



8.9.8 Proyectando sobre YZ.

$$\begin{aligned} A_S = \iint_S 1 \cdot dS &= \int_0^4 \int_0^3 \sqrt{\frac{y^2}{16-y^2}+1}\, dz\, dy \\ &= \int_0^4 \frac{12}{\sqrt{16-y^2}}\, dy \;=\; 6\pi \end{aligned}$$

Observe que $\displaystyle\int_0^4 \frac{12}{\sqrt{16-y^2}}\, dy$ es impropia convergente. Puede usar $\displaystyle\int \frac{12}{\sqrt{16-y^2}}\, dy \;=\; 12 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{4}\right) + K$ para hacer el cálculo.



8.9.9

$$\begin{aligned} A = \iint_S \mathbf{dS} &= \int_0^2 \int_0^x \sqrt{4x^2+1}\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 x\sqrt{4x^2+1}\, dx \\ &= \int_1^{17} \sqrt{u}\, \frac{du}{8} \;=\; \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_1^{17} \;=\; 5,7577 \end{aligned}$$

8.9.10 Proyectamos sobre XY

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_S \mathbf{dS} \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+4r^2}\, r\; dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+4r^2)^{3/2}\Big|_1^{\sqrt{3}}\, d\theta \;=\; \frac{\pi}{48}(13\sqrt{13}-5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

8.9.11

Soluciones del Capítulo 9

9.0.1

1. Parametrización de la curva **e.)**
   - $-C_1:\ \mathbf{r}_1(t)=(t,2t,0)$ con $t\in[0,1]$.
     Observe que $\mathbf{r}_1(0)=(0,0,0)$ y $\mathbf{r}_1(1)=(1,2,0)$.
   - $C_2:\ \mathbf{r}_2(t)=(0,0,t)$ con $t\in[0,1]$.
     Observe que $\mathbf{r}_2(0)=(0,0,0)$ y $\mathbf{r}_2(1)=(0,0,1)$.
   - $-C_3:\ \mathbf{r}_3(t)=(\cos t, 2\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $\in[0,\pi/2]$.
     Observe que $\mathbf{r}_3(0)=(1,2,0)$ y $\mathbf{r}_3(\pi/2)=(0,0,1)$.
2. Parametrización de la curva **f.)**
   - $C_1:\ \mathbf{r}_1(t)=(2\cos t,0,2\operatorname{sen} t)$ con $t\in[0,\pi/2]$.
     Observe que $\mathbf{r}_1(0)=(2,0,0)$ y $\mathbf{r}_1(\pi/2)=(0,0,2)$.
   - $C_2:\ \mathbf{r}_2(t)=(2\cos t,\ 4-2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t)$ con $t\in[0,\pi/2]$.
     Observe que $\mathbf{r}_2(0)=(2,2,0)$ y $\mathbf{r}_2(\pi/2)=(0,4,2)$.
   - $-C_3:\ \mathbf{r}_3(t)=(t,4-t,0)$ con $t\in[0,2]$.
     Observe que $\mathbf{r}_3(0)=(0,4,0)$ y $\mathbf{r}_3(2)=(2,2,0)$.
   - $-C_4:\ \mathbf{r}_4(t)=(\cos t,4-\cos t,1+\operatorname{sen} t)$ con $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.
     Observe que $\mathbf{r}_4(-\pi/2)=(0,4,0)$ y $\mathbf{r}_4(\pi/2)=(0,4,2)$.

9.1.1 $\quad s=\int_0^{44}\sqrt{1+9/4t}\,dt \;=\; 296$

9.1.2 $\quad s=2\int_1^4\sqrt{t}\,dt \;=\; 14/3$

9.1.3 $\quad s=2\int_{1/2}^4\sqrt{1+9(2t-1)}\,dt \;=\; 1022/27$

9.1.4 $\quad$ Recuerde que $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|$.

$$s=\int_0^{\pi/4}\sec t\,dt \;=\; \ln(\sqrt{2}+1)$$

9.1.5

9.1.6

9.2.1 La circunferencia se parametriza como $\mathbf{r}(t) = (4\cos t,\ 4\,\mathrm{sen}\,t)$ con $t \in [0,\pi]$.

$$\int_C xy^2 ds = 64\int_0^{\pi} \cos t\ \mathrm{sen}^2\, t\, dt = 0$$

9.2.2 $$\int_C x ds = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+4t^2}\, dt = 0$$

9.2.3 $C:\ \mathbf{r}(t) = (t,t,0)$ con $t \in [0,1]$.

$$\int_C \frac{xy+z}{2x-y} ds = \int_0^1 t\sqrt{2}\, dt$$

9.2.4 $r'(t) = (1,1,1)$ y entonces

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\, ds &= \int_1^2 \frac{t+t+t}{t^2+t^2+t^2}\, \sqrt{\mathbf{1^2+1^2+1^2}}\, \mathbf{dt} \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{t}\, dt = \sqrt{3}\, \ln|t|\,\Big|_1^2 = \sqrt{3}\, \ln 2 \end{aligned}$$

9.2.5 $$\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\, ds = \int_{-1}^{1} 8 - t^2\, dt$$

9.2.6

9.4.1 Use la parametización: $C:\ \mathbf{r}(t) = (1,1,0) + t[(1,2,2)-(1,1,0)],\quad t \in [0,1]$

9.4.2 Se omite.

9.4.3 Parametrizamos las curvas,

$C_1:\ \mathbf{r}_1(t) = \cos t\ \hat{\mathbf{\imath}} + \mathrm{sen}\, t\ \hat{\mathbf{\jmath}} + 0\ \hat{\mathbf{k}}$ con $t \in [0,\pi/2]$.

$C_2:\ \mathbf{r}_2(t) = A + t(B-A) = 2t\ \hat{\mathbf{\imath}} + (t+1)\ \hat{\mathbf{\jmath}} + 3t\ \hat{\mathbf{k}},\quad t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \int_C x\, dx + z\, dy + \ dz &= \int_{C_1} x\, dx + z\, dy + \ dz + \int_{C_2} x\, dx + z\, dy + \ dz \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos t\, \mathrm{sen}\, t\, dt + \int_0^1 4t + 3t + 3\, dt \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6. \end{aligned}$$

9.4.4

9.4.5

9.4.6

9.4.7

9.4.8

9.5.1

9.5.2 Una función potencial es $\phi(x,y,z) = xyz - y^2x + x^2z$

9.5.3

(a) Como Rot$\mathbf{F} = (0,0,0)$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo sobre cualquier región simplemente conexa donde $z \neq 0$.

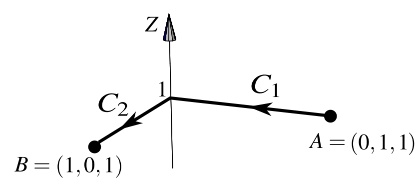
(b) $$\nabla\phi = F \implies \begin{array}{lclcl} \phi &=& \displaystyle\int 2x+5\,dx &=& x^2+5x+K_1(y,z) \\ \phi &=& \displaystyle\int 3y^2\,dy &=& y^3+K_2(x,z) \\ \phi &=& \displaystyle\int \frac{1}{z}\,dz &=& \ln|z|+K_3(x,y) \end{array} \implies \phi(x,y,z) = x^2+5x+y^3+\ln z.$$

Luego, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(B)-\phi(A) = 6-1 = 5$

(c) Como $\mathbf{F}$ es conservativo en regiones simplemente conexas, donde z no se anula, podemos tomar el camino $C' = C_1 + C_2$ para integrar.

$$-C_1 \;:\; \mathbf{r}_1(t) = (0,t,1) \quad \text{con} \quad t \in [0,1]. \qquad \mathbf{r}_1'(t) = (0,1,0)$$

$$C_2 \;:\; \mathbf{r}_2(t) = (t,0,1) \quad \text{con} \quad t \in [0,1]. \qquad \mathbf{r}_2'(t) = (1,0,0)$$



Entonces,

$$\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^1 (5,\ 3t^2,\ 1)\cdot(0,\ 1,\ 0)\,dt + \int_0^1 (2t+5,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 0,\ 0)\,dt = -1+6 = 5$$

9.5.4

1.
$$\text{Rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz+y\cos(xy) & xz+x\cos(xy) & xy \end{vmatrix} = (x-x)\,\hat{\mathbf{i}} + (-y+y)\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$+(z+\cos(xy)+xy\cos(xy)-(z+\cos(xy)+xy\cos(xy)))\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$= (0,0,0)$$

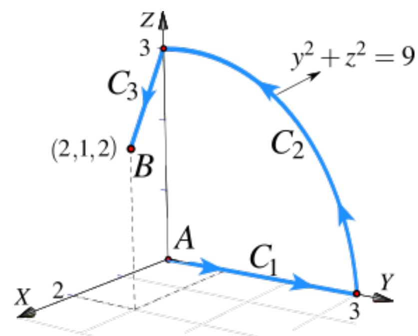
2. Sea $G(x,y,z)$ una función potencial, así
   - $G_x(x,y,z) = yz+y\cos(xy) \implies G(x,y,z) = xyz+\text{sen}(xy)+C_1(y,z)$
   - $\dfrac{\partial}{\partial y}(xyz+\text{sen}(xy)+C_1(y,z)) = xz+x\cos(xy) \implies C_{1y}(y,z)=0 \implies C_1(y,z) = C_2(z)$

- $\dfrac{\partial}{\partial z}(xyz+\operatorname{sen}(xy)+C_2(z)) = xy \implies {C_2}'(z)=0 \implies C_2(z)=K$

Así, $G(x,y,z) = xyz+\operatorname{sen}(xy)+K$, por lo que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = G(0,0,0)-G(2,1,2) = K-(4+\operatorname{sen}(2)+K) = -4-\operatorname{sen}(2).$$

3. Se seguirá la siguiente ruta



$-C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (2,1,t),\ t\in[0,2]$

$-C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t,1,0),\ t\in[0,2]$

$-C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (0,t,0),\ t\in[0,1]$

Así

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= -\int_0^2 (t+\cos(2),2t+2\cos(2),2)\cdot(0,0,t)\,dt - \int_0^2(\cos t, t\cos t, t)\cdot(1,0,0)\,dt - \int_0^1 (t,0,0)\cdot(0,1,0)dt\\ &= -\int_0^2 2t\,dt - \int_0^2 \cos t\,dt - 0\\ &= -t^2\big|_0^2 - \operatorname{sen} t\big|_0^2 = -4-\operatorname{sen}(2)\end{aligned}$$

9.5.5 $\quad \int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} \ = \ 0$

9.5.6

9.5.7 Calcule usando el camino que va de $(2,5,0)$ a $(-2,5,0)$

9.5.8

- $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ es conservativo pues $P_y = z^2+\operatorname{sen} x\cos(\pi-y) = Q_x,\ \ \mathbf{r}_y = 2xz = Q_z$ y $\mathbf{r}_x = 2yz = P_z$.
- una función potencial es $\phi(x,y,z) = xyz^2+\cos(x)\operatorname{sen}(\pi-y)+K$. Por lo tanto

$$\int_C F\cdot\, d\mathbf{r} = \phi(0,\pi,0)-\phi(\pi,0,0) = 0$$

9.5.9

9.5.10

a.) Si $y=t$, $C_2:\ r_2(t) = (t^2+1,\ t\,,2-t),\ t\in\ [0,2]$

$$s = \int_C 1\cdot ds = \int_0^2 \sqrt{4t^2+2}\,dt \approx 5.12401$$

Si $x=t \implies s=\int_1^5 \sqrt{\frac{1}{2(t-1)}+1}\,dt$. Impropia convergente. Singularidad en $t=1$

---

b.)

Primera manera: Proyectando sobre YZ

$S:\ x = y^2+1.\ N_1 = (1,-2y,0)$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \int_0^2\int_0^{2-y} (\cos x\ \operatorname{sen} z,\, 5\,,\cos z\ \operatorname{sen} x\,)\cdot(1,-2y,0)\,dz\,dy \\
&= \int_0^2\int_0^{2-y} (\cos(y^2+1)\ \operatorname{sen} z - 10y)\,dz\,dy \\
&= \int_0^2 -\cos(y^2+1)\ \cos z - 10yz\Big|_0^{2-y}\ dy \\
&= \int_0^2 -\cos(y^2+1)\ \cos(2-y) - 10y(2-y) + \cos(y^2+1)\,dy \\
&\approx -13.1613
\end{aligned}$$

images/Repo219Fig5

Segunda manera: Proyectando sobre XZ

$S:\ y = \sqrt{x-1}.\ \ N_2 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}},1,0\right).$

Este vector N_2 es opuesto a N_1, por tanto la integral de flujo quedará con signo contrario. La integral es impropia en ambos órdenes "$dzdx$" y "$dxdz$". Además en el orden "$dxdz$" aparecen funciones sin primitiva elemental.

$$(\cos(x)\operatorname{sen}(z),5,\operatorname{sen}(x)\cos(z))\cdot\left(\frac{1}{4\sqrt{x-1}},1,0\right) = 5-\frac{\cos(x)\operatorname{sen}(z)}{2\sqrt{x-1}}$$

images/Repo219Fig5

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \int_1^5\int_0^{2-\sqrt{x-1}} \left(5-\frac{\cos(x)\operatorname{sen}(z)}{2\sqrt{x-1}}\right)dz\,dx \\
&= \int_1^5 \left(5\left(2-\sqrt{x-1}\right)+\frac{\cos\left(2-\sqrt{x-1}\right)\cos(x)}{2\sqrt{x-1}}-\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x-1}}\right)dx \\
&\approx 13.1613
\end{aligned}$$

c.) $\mathbf{F}$ es conservativo pues $\operatorname{Rot}\mathbf{F} = (0,0,0)$. Podemos aplicar "Independencia del camino" o resolver la integral con una función potencial.

Primera manera: Resolver la integral con una función potencial

$$\nabla\phi = F \implies \begin{cases} \phi_x = \displaystyle\int \cos x\ \operatorname{sen} z\,dx &= \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} z + K_1(y,z) \\ \phi_y = \displaystyle\int 5\,dy &= 5y + K_2(x,z) \\ \phi_z = \displaystyle\int \cos z\ \operatorname{sen} x\,dz &= \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} z + K_3(x,y) \end{cases} \implies \phi(x,y,z) = \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} z + 5y + K$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\,\mathbf{dr} = \phi(1,0,2)-\phi(1,0,0) = \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(2)\approx 0.765147$$

Segunda manera: Usar independencia del camino.

Podemos usar el camino C' : $(1,0,t)$, $t \in [0,2]$. Este camino es el segmento que une el punto $(1,0,0)$ con el punto $(1,0,2)$.

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (\cos(1)\,\text{sen}\,t,\, 5,\, \cos t\,\text{sen}\,1)\cdot(0,0,1)\,dt = \int_0^2 \text{sen}(1)\cos t\,dt = \text{sen}(1)\,\text{sen}(2) \approx 0.765147$$

Tercera manera: Resolver la integral "a pie"

$$C: \begin{cases} \quad C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t^2+1, t, 0), \quad t \in [0,2] \\ -C_2: \mathbf{r}_2(t) = (t^2+1, t, 2-t), \quad t \in [0,2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^2 \left(0,\, 5,\, \text{sen}\left(t^2+1\right)\right)\cdot(2t,1,0)\,dt - \int_0^2 \left(\text{sen}(2-t)\cos\left(t^2+1\right),\, 5,\, \text{sen}\left(t^2+1\right)\cos(2-t)\right)\cdot(2t,1,- \\ &= \int_0^2 5\,dt - \int_0^2 \left(2t\,\text{sen}(2-t)\cos\left(t^2+1\right) + 5 - \text{sen}\left(t^2+1\right)\cos(2-t)\right)\,dt \\ &= 10 - \frac{1}{2}(20 - \cos(1) + \cos(3)) \approx 0.765147 \end{aligned}$$

d.) Se omite.

9.6.1

a.) $-\dfrac{64}{3}$

b.) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 4 - 36 + 28/3 + 4/3 = -\frac{64}{3}$

9.6.2

Como se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Green en el plano, excepto la orientación de la curva, entonces

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-2}^{2}\int_{3y^2/4}^{3} 1 - 0\,dx\,dy = -8.$$

9.6.3 Por el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\eta C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1\int_0^{x^2+1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^{x^2+1} (2x-1)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (2x-1)\,(x^2+1)\,dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

9.6.4

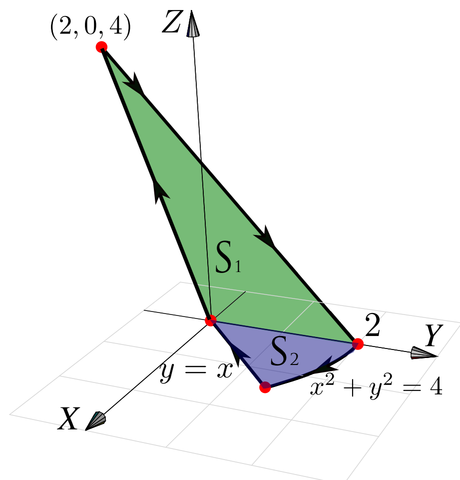
9.6.5

9.8.1

9.8.2

9.8.3

9.8.4 Aplique el teorema de Stokes con las superficies de la figura que sigue.



9.8.5 Una parametrización para C_1 es $\mathbf{r}_1(t) = (t,\, 2-t^2,\, 4-t^2)$, con $t \in [0,2]$.

a.) $\displaystyle\int_{\mathbf{C_1}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = \int_0^2 \left(2(2-t^2)(4-t^2),\, -4t,\, -3(4-t^2)^2\right)\cdot(1,\, -2t,\, -2t)\ dt$

b.) Usamso el teorema de Stokes. Proyectamos sobre XZ

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} \;=\; \int_0^2\int_0^{4-x^2} (0,\, 2y,\, -4-2z)\cdot(0,1,1)\ dz\, dx$$

9.8.6

9.8.7

$$\operatorname{Rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-y & yz-x & x+2y \end{vmatrix} = (2-y, -1, 0)$$

Un vector normal para $y = 2x$ es $N_1 = (2,-1,0)$, pero la curva gira a favor de reloj respecto a N_1, por lo que ha que ajustar el signo.

Así

$$
\begin{aligned}
\int_C F dr &= -\iint_S \operatorname{Rot}(F)\cdot \mathbf{N}\, dA \\
&= -\iint_R (2-y,-1,0)\cdot(2,-1,0)\, dA \\
&= -\iint_R (-2y-3)\, dA \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (-2(2r\cos\theta)-3)r\,dr\,d\theta \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-4\frac{r^3}{3}\cos\theta - 3\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-4}{3}\cos\theta - \frac{3}{2}\right) d\theta \\
&= -\left(\frac{-4}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{3\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{-4}{3}+\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

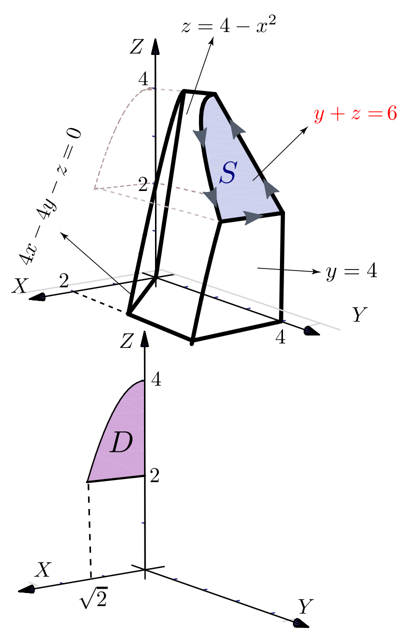
9.8.8

Se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Stokes (Teo de Green en el espacio). Podemos tomar como la superficie S, la porción del plano $z = 2 - x$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Entonces un vector normal que nos sirve es $\mathbf{N} = (1, 0, 1)$.

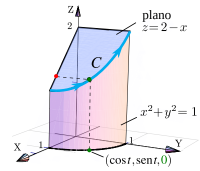
10.0.1 Sea Q el sólido limitado por $y + z = 6$, $4x - 4y - z = 0$, $z = 4 - x^2$, $z = 0$ y $x = 0$, tal y como se muestra en la figura.

a.) Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ si $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x, z)$ y C es la frontera de la superficie S_1 en la figura.

b.) Calcular $\iint_{\partial Q} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, ∂Q es la frontera del sólido Q y $\mathbf{N}$ es el vector vector normal unitario exterior.



Como $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z,\ 2y,\ y-z)$, entonces $\operatorname{Rot}\mathbf{F} = (1,1,0)$.



$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})\cdot(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})\ r\,dr\,d\theta \;=\; \pi/4\end{aligned}$$

9.8.9

C es una curva cerrada simple, suave a trozos. Podemos usar el Teorema de Stokes (T. Green en el espacio). Tenemos dos opciones, proyectar sobre el plano XY o sobre el plano YZ.

Proyectando sobre el plano XY. En este caso, $S:\ z = 4 - x^2$ y $N = (-z_x,\ -z_y, 1) \;=\; (2x, 0, 1)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}F\cdot N\ dS\\ &= -\iint_{\mathbf{r}_{xy}} (-y,\ x-1,\ 0)\cdot(2x,\ 0, 1)\ dA\\ &= -\int_0^2\int_0^{x^2+1} -2xy\ dy\,dx \;=\; \frac{62}{3}\approx 20.6667\end{aligned}$$

Proyectando sobre el plano YZ. En este caso, $S:\ x = \sqrt{4-z}$ y $N = (1,\ -x_y, -x_z) \;=\; \left(1, 0, \dfrac{1}{2\sqrt{4-z}}\right)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{Rot}F\cdot N\ dS\\ &= -\iint_{\mathbf{r}_{xy}} (-y,\ x-1,\ 0)\cdot\left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{4-z}}\right)\ dA \qquad (*)\\ &= -\int_0^4\int_0^{5-z} -y\ dy\,dz \;=\; \frac{62}{3}\approx 20.6667\end{aligned}$$

Nota. La integral $(*)$ no es impropia pues al hacer el producto punto, el integrando es una función acotada. Las discontinuidades en un integrando acotado no afectan la integral sin constituyen un conjunto de medida cero.

9.8.10

1. $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

   a) $-C_1:\ \mathbf{r}_1(t) = (t,t,0)\ t\in[0,1] \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^1 -t^2\,dt = \frac{1}{3}$

   b) $C_2:\ \mathbf{r}_2(t) = (0,0,t)\ t\in[0,1] \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 0\,dt = 0$

   c) $C_3:\ \mathbf{r}_3(t) = (0,t,1-t)\ t\in[0,1] \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 1-t\ dt = \frac{1}{2}$

d) $C_4: \mathbf{r}_4(t) = (t,1,0)\ t \in [0,1] \implies \displaystyle\int_{\mathbf{C}_1} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = \int_0^1 -1^2\, dt = -1$

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = 1/3 + 1/2 - 1$$

2. $\displaystyle\iint_{\mathbf{S}} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} \;=\; \iint_{\mathbf{S}_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} \;+\; \iint_{\mathbf{S}_2} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS}.$

   $\operatorname{Rot}\mathbf{F} = (-1,-1,2y)$

   Para $\mathbf{S}_1$ un vector normal es $N_1 = (1,-1,0)$ (acorde con la orientación de **C**).

   $$\iint_{\mathbf{S}_1} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,\mathbf{dS} \;=\; \iint_{\mathbf{S}_1} 0\ \mathbf{dS} \;=\; 0$$

   Para $\mathbf{S}_2$ un vector normal es $N_2 = (0,-1,-1)$ (acorde con la orientación de **C**).

   $$\iint_{\mathbf{S}_2} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,\mathbf{dS} \;=\; \int_0^1\int_x^1 1-2y\,dy\,dx \;=\; -1/2+1/3.$$

   Finalmente, $\displaystyle\iint_{\mathbf{S}} \operatorname{Rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{dS} \;=\; 0 + -1/2 + 1/3.$