
CÁLCULO

Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sexta edición

Volumen 2

ROLAND E. LARSON

ROBERT P. HOSTETLER

The Pennsylvania State University
The Behrend College

BRUCE H. EDWARDS

University of Florida

Con la colaboración de

DAVID E. HEYD

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción

LORENZO ABELLANAS RAPÚN

Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Universidad Complutense de Madrid

Consultores

JOSÉ LUIS PÉREZ LÓPEZ

Profesor Titular del Departamento de Matemáticas

ORLANDO LEAL SÁNCHEZ

Docente jubilado

Politécnico Jaime Isaza Cadavid

Medellín, Colombia



MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

Características

Motivación del capítulo

Cada motivación explora los conceptos que aparecen en el capítulo aprovechando alguna situación del mundo real. A una breve introducción le siguen unas cuantas cuestiones, cuya respuesta queda en suspenso, que guían los pasos del estudiante hacia los contenidos principales del capítulo.

Contenido de la sección

Cada sección comienza con un listado de los tópicos cubiertos en ella. Esta información ayudará a los profesores en su planificación de las clases y a los alumnos en el estudio y síntesis de las cuestiones tratadas en la sección.

Exploraciones

Antes de que el estudiante se enfrente a ciertos temas, los proyectos de exploración le permitirán descubrir los conceptos por sí mismo, facilitando la memorización de los resultados. Estas exploraciones pueden ser omitidas, si el profesor lo estima conveniente, sin pérdida de continuidad en la exposición.

Ejemplos

Con el fin de acrecentar la utilidad del libro como herramienta de estudio, esta sexta edición contiene unos 1.000 ejemplos, cada uno de ellos encabezado por un título que facilita su búsqueda. Muchos de estos ejemplos detallados incluyen soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas que proporcionan una visión más amplia de las nociones matemáticas involucradas. Cuando es necesario, acompañan a los pasos de la solución comentarios explicativos.

Gráficas

Esta sexta edición presenta unas 3.500 figuras generadas por ordenador, lo que garantiza su realismo, precisión y claridad; este nuevo arte de diseño gráfico ayudará al estudiante a visualizar los conceptos matemáticos sin dificultad. Las superficies y sólidos de figuras tridimensionales complicadas se han creado usando transparencia, perspectiva, iluminación y sombras, de forma que adquieran un aspecto lo más realista posible.

Resúmenes

Muchas secciones incluyen un resumen que identifica las ideas y procedimientos más importantes expuestos en ella. En algunos casos, toda una sección compendia los contenidos anteriores.

Definiciones y teoremas

Las definiciones y los teoremas se presentan enmarcados para realzar sus enunciados.



Se insta constantemente a los estudiantes a que utilicen calculadora numérica, gráfica o programable, como instrumento para la exploración y resolución de problemas. Encontrarán abundantes oportunidades de ejecutar cálculos complicados, de visualizar nociones teóricas, de descubrir caminos alternativos y de verificar resultados obtenidos por otros métodos de resolución. A pesar de todo lo cual, no es necesario que el estudiante disponga de calculadora gráfica o programable para poder usar este texto de manera eficaz. Además de ensalzar las ventajas de las calculadoras, el libro dedica especial atención a su posible mal uso o a las posibles interpretaciones erróneas de sus resultados.

Notas históricas

Dispersas a lo largo del texto se han insertado notas históricas que ayudan a comprender la evolución del Cálculo en el pasado.

Notas

Acompañan a las definiciones, teoremas y ejemplos abundantes notas instructivas que pretenden insistir en aspectos complementarios o describir generalizaciones.

Advertencias

Las advertencias ponen en guardia a los estudiantes para que eviten errores comunes, se fijen en cómo se resuelven situaciones especiales o cómo se interpretan correctamente los conceptos teóricos.

Ejercicios

El libro contiene 10.000 ejercicios. Cada colección de ejercicios está graduada, progresando desde simples problemas de resolución sencilla, para adquirir

práctica, hasta otros más difíciles, referidos a aplicaciones o demostraciones. El amplio espectro de ejercicios incluye muchos de enunciados realistas, orientados hacia el uso de la informática, retos que exigen reflexión y, con frecuencia, interesantes. Al final de cada capítulo hay ejercicios de repaso. Al final del libro pueden verse las soluciones de los ejercicios impares (y algunos más). Como ayuda para el profesor, en muchos ejercicios se indica el tipo de aplicación (por ejemplo, *Punto de indiferencia*) o el tipo de ejercicio (por ejemplo, *Para pensar* o *Aproximación*).

Para pensar

Estos ejercicios plantean cuestiones que obligan a la reflexión y permiten, en consecuencia, profundizar en la teoría.

Aplicaciones

Se ha incluido una variada gama de problemas aplicados que ponen de manifiesto, con toda nitidez, las posibilidades de uso que las matemáticas encuentran en el mundo real.

Modelos matemáticos

Estos nuevos problemas de entrada múltiple piden a los estudiantes que hallen e interpreten modelos matemáticos que ajustan datos provenientes de experiencias en el mundo real. A menudo, las cuestiones se refuerzan mediante cálculos o gráficas efectuados con calculadora.

Proyectos para las secciones

Nuevos en esta edición, los proyectos que aparecen al término de ciertas secciones sugieren el análisis de aplicaciones de interés, y pueden ser asignados a un solo estudiante o a un grupo de ellos, en un trabajo interactivo en equipo.

Redacción

Para lograr que los estudiantes perfeccionen sus capacidades lógicas y se vayan sintiendo más cómodos en discusiones matemáticas, el libro contiene ahora numerosos ejercicios que piden explicar algo en una breve redacción.

Uso de calculadoras

Como es natural, en esta sexta edición son muchísimos los ejercicios que requieren el uso de calculadora. La diversidad de sus posibles aplicaciones es impresionante: realización de simples operaciones aritméticas, cálculos esta-

dísticos de regresión, representación gráfica de ecuaciones, funciones, curvas o superficies, manejo de programas informáticos de cálculo simbólico, etc.

En principio, sería necesario especificar, en cada momento y en cada apartado de todos y cada uno de los ejercicios, el tipo de máquina de cálculo (aritmética, gráfica, programable, ordenador) recomendable. Ahora bien, eso significaría miles de llamadas de atención al respecto, casi todas ellas superfluas, ya que es bien evidente que para representar la gráfica de una función no sirve una calculadora aritmética sencilla.

Por esa razón, hemos tomado la decisión de hablar, en todos los casos, simplemente de «calculadora». El sentido común del lector le dictará, a buen seguro, la elección del tipo de máquina calculadora más adecuada a cada situación, dentro de sus posibilidades.

¿Verdadero o falso?

Para ayudar a la comprensión de la estructura lógica del Cálculo, se proponen una serie de cuestiones bajo el título de «¿Verdadero o falso?» al final de muchos listados de ejercicios. Esta clase de ejercicios centra la atención del estudiante en los conceptos, en algunos errores frecuentes y en los enunciados correctos de definiciones y teoremas.

Referencias a revistas

Las referencias a artículos en revistas de gran difusión permitirán al estudiante darse cuenta de que el Cálculo es un campo dinámico, en continua evolución.

Contenido del volumen 1

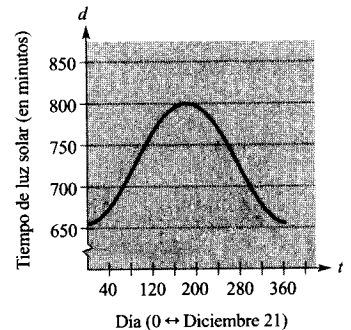
Índice de aplicaciones

xxi

Capítulo P. Preparación para el Cálculo

4

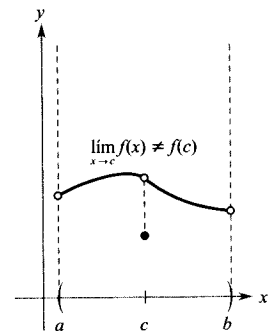
- P.1. Gráficas y modelos matemáticos 4
- P.2. Modelos lineales y ritmos de cambio 14
- P.3. Funciones y sus gráficas 24
- P.4. Ajuste de modelos a colecciones de datos 37
- Ejercicios de repaso 43



Capítulo 1. Límites y sus propiedades

48

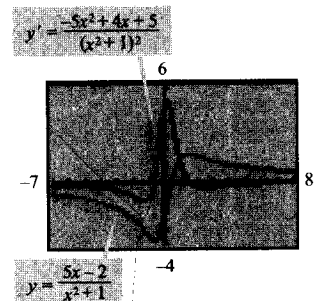
- 1.1. Una mirada previa sobre el Cálculo 48
- 1.2. Cálculo de límites gráfica y numéricamente 55
- 1.3. Cálculo analítico de límites 65
- 1.4. Continuidad y límites laterales 78
- 1.5. Límites infinitos 92
- Ejercicios de repaso 101



Capítulo 2. La derivada

106

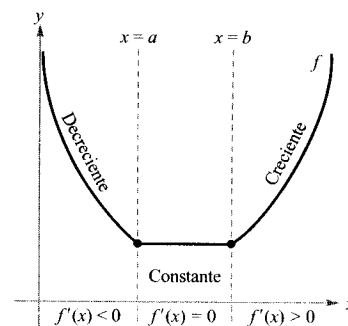
- 2.1. La derivada y el problema de la recta tangente 106
- 2.2. Reglas básicas de derivación y ritmos de cambio 118
- 2.3. Las reglas del producto y del cociente y derivadas de orden superior 130
- 2.4. La regla de la cadena 141
- 2.5. Derivación implícita 152
- 2.6. Ritmos relacionados 160
- Ejercicios de repaso 171



Capítulo 3. Aplicaciones de la derivada

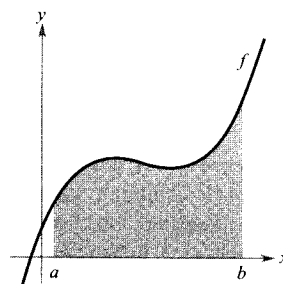
178

- 3.1. Extremos en un intervalo 178
- 3.2. Teorema de Rolle y teorema del valor medio 187
- 3.3. Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada 194
- 3.4. Concavidad y el criterio de la segunda derivada 205
- 3.5. Límites en el infinito 214
- 3.6. Análisis de gráficas 225
- 3.7. Problemas de optimización 236
- 3.8. El método de Newton 248
- 3.9. Diferenciales 255
- 3.10. Aplicaciones a la economía y al comercio 263
- Ejercicios de repaso 271

**Capítulo 4. Integración**

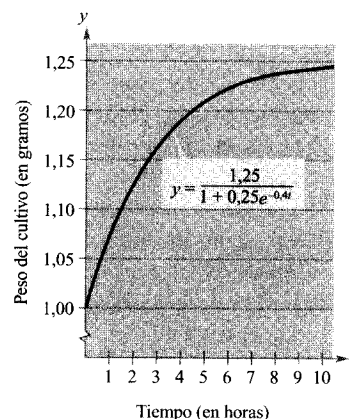
278

- 4.1. Primitivas e integración indefinida 278
- 4.2. Área 291
- 4.3. Sumas de Riemann e integrales definidas 304
- 4.4. El teorema fundamental del Cálculo 315
- 4.5. Integración por sustitución 328
- 4.6. Integración numérica 342
- Ejercicios de repaso 350

**Capítulo 5. Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes**

356

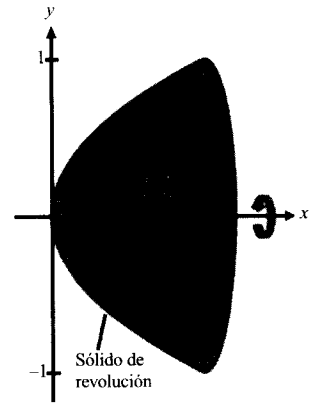
- 5.1. Función logaritmo natural y derivación 356
- 5.2. La función logaritmo natural y la integración 367
- 5.3. Funciones inversas 376
- 5.4. Funciones exponenciales: derivación e integración 386
- 5.5. Bases distintas de e y aplicaciones 396
- 5.6. Ecuaciones diferenciales: crecimiento y desintegración 407
- 5.7. Ecuaciones diferenciales: separación de variables 416
- 5.8. Funciones trigonométricas inversas y derivación 429
- 5.9. Funciones trigonométricas inversas e integración 438
- 5.10. Funciones hiperbólicas 446
- Ejercicios de repaso 456



Capítulo 6. Aplicaciones de la integral

462

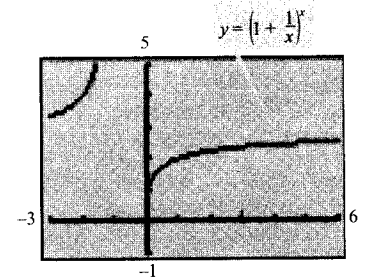
- 6.1. Área de una región entre dos curvas 462
- 6.2. Volumen: el método de los discos 472
- 6.3. Volumen: el método de las capas 483
- 6.4. Longitud de arco y superficies de revolución 492
- 6.5. Trabajo 503
- 6.6. Momentos, centros de masa y centroides 513
- 6.7. Presión y fuerza de un fluido 526
- Ejercicios de repaso 533



Capítulo 7. Métodos de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias

538

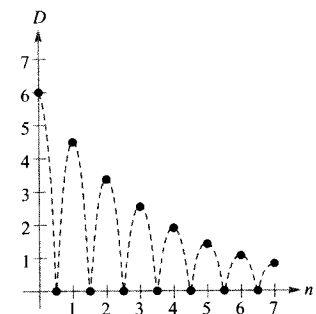
- 7.1. Reglas básicas de integración 538
- 7.2. Integración por partes 545
- 7.3. Integrales trigonométricas 555
- 7.4. Sustituciones trigonométricas 564
- 7.5. Fracciones simples 575
- 7.6. Integración por tablas y otras técnicas de integración 585
- 7.7. Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital 592
- 7.8. Integrales impropias 604
- Ejercicios de repaso 615



Capítulo 8. Series

620

- 8.1. Sucesiones 620
- 8.2. Series y convergencia 633
- 8.3. El criterio integral y p -series 645
- 8.4. Comparación de series 652
- 8.5. Series alternadas 660
- 8.6. El criterio del cociente y el criterio de la raíz 667
- 8.7. Aproximación por polinomios de Taylor 676
- 8.8. Series de potencias 687
- 8.9. Representación de funciones por series de potencias 698
- 8.10. Series de Taylor y Maclaurin 706
- Ejercicios de repaso 718



Apéndice A. Compendio de preliminares del Cálculo

723

- A.1. Los números reales y la recta real 723
- A.2. El plano cartesiano 733
- A.3. Repaso de las funciones trigonométricas 740

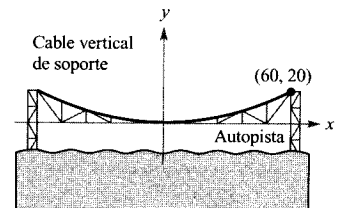
Apéndice B. Demostraciones de teoremas seleccionados	753
Apéndice C. Reglas básicas de derivación de las funciones elementales	771
Apéndice D. Tablas de integrales	773
Apéndice E. Rotaciones y la ecuación general de segundo grado	779
Apéndice F. Números complejos	787
Soluciones de los ejercicios impares	799
Índice	887

Contenido del volumen 2

Índice de aplicaciones	xxiii
-------------------------------	-------

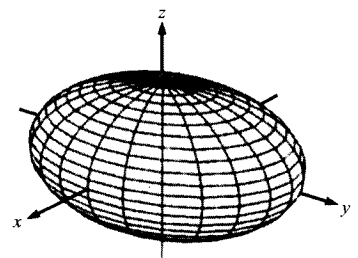
Capítulo 9. Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	900
---	-----

- 9.1. Cónicas y Cálculo 900
 - 9.2. Curvas planas y ecuaciones paramétricas 916
 - 9.3. Ecuaciones paramétricas y Cálculo 928
 - 9.4. Coordenadas polares y gráficas en polares 938
 - 9.5. Área y longitud de arco en coordenadas polares 948
 - 9.6. Ecuaciones de las cónicas en polares y leyes de Kepler 957
- Ejercicios de repaso 965



Capítulo 10. Vectores y geometría del espacio	970
--	-----

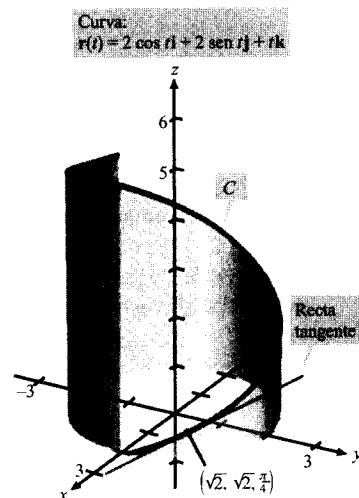
- 10.1. Vectores en el plano 970
 - 10.2. Coordenadas y vectores en el espacio 983
 - 10.3. El producto escalar de dos vectores 992
 - 10.4. El producto vectorial de dos vectores en el espacio 1002
 - 10.5. Rectas y planos en el espacio 1011
 - 10.6. Superficies en el espacio 1023
 - 10.7. Coordenadas cilíndricas y esféricas 1033
- Ejercicios de repaso 1041



Capítulo 11. Funciones vectoriales

1046

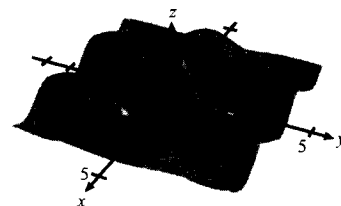
- 11.1. Funciones vectoriales 1046
- 11.2. Derivación e integración de funciones vectoriales 1055
- 11.3. Velocidad y aceleración 1064
- 11.4. Vectores tangentes y vectores normales 1074
- 11.5. Longitud de arco y curvatura 1085
- Ejercicios de repaso 1099



Capítulo 12. Funciones de varias variables

1104

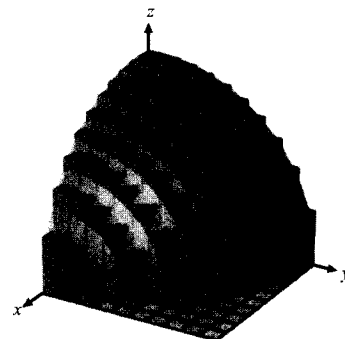
- 12.1. Introducción a las funciones de varias variables 1104
- 12.2. Límites y continuidad 1116
- 12.3. Derivadas parciales 1126
- 12.4. Diferenciales 1135
- 12.5. Reglas de la cadena para funciones de varias variables 1144
- 12.6. Derivadas direccionales y gradientes 1153
- 12.7. Planos tangentes y rectas normales 1167
- 12.8. Extremos de funciones de dos variables 1177
- 12.9. Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables 1186
- 12.10. Multiplicadores de Lagrange 1195
- Ejercicios de repaso 1204



Capítulo 13. Integración múltiple

1210

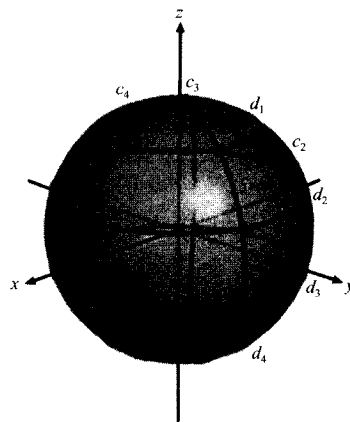
- 13.1. Integrales iteradas y área en el plano 1210
- 13.2. Integrales dobles y volumen 1219
- 13.3. Cambio de variables: coordenadas polares 1231
- 13.4. Centros de masas y momentos de inercia 1240
- 13.5. Área de una superficie 1249
- 13.6. Integrales triples y aplicaciones 1258
- 13.7. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 1269
- 13.8. Cambio de variables: jacobianos 1277
- Ejercicios de repaso 1284



Capítulo 14. Análisis vectorial

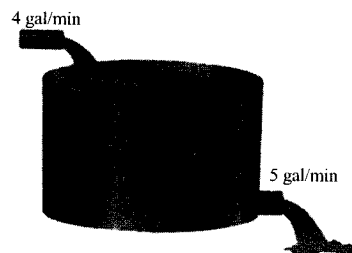
1290

- 14.1. Campos de vectores 1290
- 14.2. Integrales de línea 1302
- 14.3. Campos vectoriales conservativos e independencia del camino 1316
- 14.4. Teorema de Green 1327
- 14.5. Superficies paramétricas 1338
- 14.6. Integrales de superficie 1349
- 14.7. Teorema de la divergencia 1363
- 14.8. Teorema de Stokes 1371
- Ejercicios de repaso 1378

**Capítulo 15. Ecuaciones diferenciales**

1384

- 15.1. Ecuaciones de primer orden exactas 1384
- 15.2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 1392
- 15.3. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden 1403
- 15.4. Ecuaciones lineales inhomogéneas de segundo orden 1412
- 15.5. Soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series 1421
- Ejercicios de repaso 1425

**Apéndice A. Demostraciones de teoremas seleccionados**

1431

Soluciones de los ejercicios impares

1433

Índice

1490

Índice de aplicaciones

INGENIERÍA Y FÍSICA

- Aceleración centrípeta, 1084, 1143
Altura de una torre, 1205
Antena de un satélite, 965
Área de un reflector de satélite, 912
Área de un tejado, 1286
Área de una rampa espiral, 1348
Área máxima, 1191
Arquitectura, 912
Arte anamorfo, 948
Asteroide Apolo, 961
Cables que soportan cargas, 1001
Caída de objetos, 1398
Campo magnético, 1301
Capilaridad, 1257
Carga compartida, 982
Carga eléctrica, 1362
Carreras de automóviles, 1044
Centro de presión sobre una vela, 1249
Cicloide curtata, 926
Circuitos eléctricos, 1399, 1400, 1420
Cometa Halley, 913, 960
Construcción de edificios, 991
Construcción de un arco elíptico, 913
Control de tráfico aéreo, 937
Desviación de un haz, 911
Dimensiones de una caja, 1140, 1202
Diseño de carreteras, 1101
Diseño de edificios, 1257, 1315
Diseño de máquinas, 1043, 1238
Diseño de un motor, 1315
Diseño de un puente, 912
Diseño mecánico, 1021
Distancia entre ciudades, 1040
Distribución de temperaturas, 1115, 1134, 1166, 1203
Ecuación de ondas, 1153
Energía cinética y energía potencial, 1326
Equilibrio, 1042
Escalera espiral (de caracol), 1099
Esculturas matemáticas, 1288
Espejos hiperbólicos, 915
Espiral de Cornu, 1099
Exploración de nuevos planetas, 898, 968
Explorer, 913, 964
Forma de la Tierra, 1032
Frenado de un camión, 1001
Fuerza centrípeta, 1084, 1101
Fuerza de rozamiento, 1094, 1098
Fuerza de un motor, 1206
Fuerza resultante, 977, 981
Hidráulica, 1248
Iluminación de un auditorio, 991
Inductancia, 1143
Investigación del fondo del océano, 1166
Lanzamiento de peso, 1073
Ley de los gases ideales, 1115, 1134, 1152
Ley de Snell de la refracción, 1203
Leyes de Kepler, 1098
Lluvia ácida, 1115
Localización del sonido, 915
Longitud de una cinta magnética, 932
Longitud mínima, 1042
Masa de un muelle, 1307, 1324
Medida de fuerzas, 987
Meteorología, 1115, 1122
Mezclas químicas, 1397, 1401
Momento de una fuerza, 1006, 1010, 1042
Motor de un automóvil, 1193
Motor giratorio, 966
Movimiento cicloidal, 1073, 1083
Movimiento circular, 1073, 1074, 1083
Movimiento de proyectiles, 927, 982, 1069, 1070, 1073, 1081, 1084, 1100, 1152
Movimiento de un líquido, 1376, 1378
Movimiento de una partícula, 1053, 1083, 1099
Movimiento planetario, 964
Navegación, 915, 982
Noria, 1074
Optimización, 1010
Órbita de la Luna, 905
Órbita de la Tierra, 913
Órbita de un satélite, 913, 1101
Panel solar, 911
Péndulo, 1143
Planímetro, 1381
Potencia eléctrica, 1143
Potencia eléctrica de un circuito, 1143

Precipitación anual de nieve, 1230
 Presión atmosférica, 1194
 Radiación de una antena, 955
 Rango anual de temperaturas, 1115
 Reacciones químicas, 1206
 Recepción de radio y televisión, 912
 Reflector de un satélite, 1202
 Refracción de la luz, 1203
 Remolcadores, 982
 Resistencia, 1143
 Ritmo de flujo de masa en un fluido, 1357, 1362
 Salto en paracaídas, 1421
 Sistema de detección hiperbólico, 910
 Soportes de carga, 991, 1041
 Temperatura, 1166
 Temperatura aparente, 1134
 Temperatura en una placa metálica, 1160
 Tensión en una cuerda, 982
 Tobogán, 1053
 Topografía, 1166
 Trabajo, 999, 1002, 1308, 1314, 1316, 1321, 1326, 1330,
 1336, 1379
 Tractriz, 937
 Trayectoria de un automóvil, 1097
 Trayectoria de un detector térmico, 1160, 1166, 1175
 Trayectoria de un objeto, 1083, 1084, 1100, 1146
 Trayectoria de un proyectil, 935
 Velocidad del viento, 1327
 Velocidad orbital, 1084
 Velocidad resultante y velocidad de un avión, 978
 Velocidad y aceleración, 1065, 1066, 1068, 1072, 1074
 Viento (cuerda) de una torre, 991
 Vibración de un muelle, 1409, 1411, 1420, 1427
 Volumen máximo, 1186, 1191, 1192, 1202

ECONOMÍA Y COMERCIO

Beneficio máximo, 1187, 1192, 1206
 Beneficio medio, 1230
 Coste de un depósito industrial, 1206
 Coste marginal, 1133
 Coste mínimo, 1191, 1203, 1206
 Crecimiento de la inversión, 1401

Demanda, 1193
 Diseño de producto, 1257
 Función de producción de Cobb-Douglas, 1109, 1115, 1198
 Ingresos, 1000, 1192
 Inversión, 1114, 1134, 1427
 Localización de un centro de distribución, 1180
 Nivel de producción, 1109, 1115, 1198, 1203, 1206
 Nivel medio de producción, 1229
 Precios del oro y de la plata, 1192
 Productividad marginal, 1134
 Ritmo de crecimiento, 1426
 Utilidad marginal, 1134
 Ventas de Wal-Mart, 1115

CIENCIAS SOCIALES Y DEL COMPORTAMIENTO

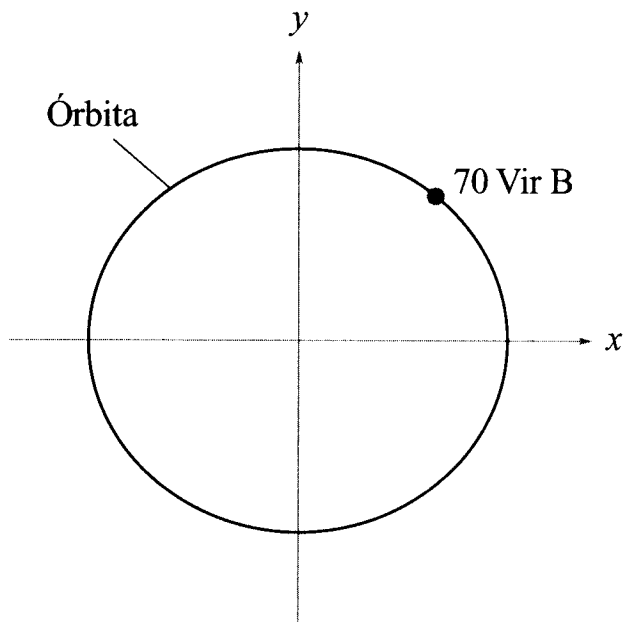
Curva de aprendizaje, 1401
 Densidad de población, 1240
 Espera en línea, 1115
 Mujeres en el mundo laboral, 1193
 Población mundial, 1194
 Solicitudes en la Universidad, 1134
 Uso del aire acondicionado, 1136

CIENCIAS DE LA VIDA

Diversidad de flora, 1176
 Ingeniería forestal, 1114
 Pérdida de peso, 1402
 Producción de trigo, 1193
 Punto de visión, 1194
 Tipos de sangre, 1192
 Tratamiento de la hipertermia para tumores, 1208

GENERAL

Baseball, 1143
 Consumo de leche, 912
 Quitanieves, 1426
 Relación depredadores/presas, 1382



Capítulo 9

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

La exploración de nuevos planetas

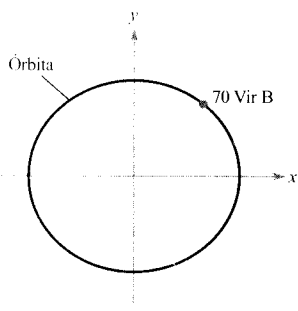
Los planetas fuera de nuestro propio sistema solar son difíciles de encontrar porque son demasiado insignificantes en comparación con sus estrellas progenitoras. Para descubrir estos planetas, los astrónomos se apoyan en la influencia que pueden ejercer sobre la estrella. La atracción gravitatoria de un planeta en órbita arrastra la estrella de un lado a otro según el planeta gira alrededor de ella. Este balanceo produce un sutil desplazamiento hacia el rojo o hacia el azul en la luz de la estrella, conocido como efecto Doppler. Con ayuda de un espectrómetro, los astrónomos pueden registrar las variaciones por efecto Doppler en una estrella, y usar los resultados para averiguar detalles concernientes al objeto en órbita.

Fue esta técnica la que permitió a Geoffrey Marcy y Paul Butler, de la Universidad Estatal de San Francisco, identificar un objeto girando alrededor de la estrella 70 Virginis. Ellos sostienen la teoría de que se trata de un gran planeta, de masa 6,6 veces la de Júpiter, aunque existe una pequeña probabilidad de que sea una enana marrón. Marcy y Butler han calculado que el planeta, bautizado como Vir B, completa una órbita cada 116,6 días.

Según los astrónomos, la órbita del planeta es una elipse con una excentricidad de 0,4 y una longitud del eje mayor de 0,86 UA. (Una unidad astronómica, UA, es la distancia media de la Tierra al Sol, del orden de 93 millones de millas.) En un sistema de coordenadas rectangulares y centrada en el origen, la ecuación de esta elipse es

$$\frac{x^2}{0,1849} + \frac{y^2}{0,1553} = 1$$

como ilustra la figura de la izquierda.



En lugar de usar coordenadas rectangulares (cartesianas) y centrar la órbita en el origen, los astrónomos estiman más conveniente usar coordenadas polares. Tomando el Sol como punto de referencia principal o polo, cada punto queda determinado por su distancia r al Sol y su ángulo θ desde el eje horizontal. Con la estrella 70 Virginis como polo, la órbita del nuevo planeta es

$$r = \frac{0,3612}{1 - 0,4 \cos \theta} \quad \text{Ecuación polar de la órbita de 70 Vir B}$$

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre el descubrimiento del planeta 70 Vir B véase el artículo «Searching for Other Worlds», de la edición de *Time* del 5 de febrero de 1996.

La segunda ley de Kepler nos permite establecer la relación

$$\frac{t}{\text{Período}} = \frac{\text{área del segmento}}{\text{área de la elipse}} = \frac{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{0,3612}{1 - 0,4 \cos \theta} \right)^2 d\theta}{0,5324}$$

que puede resolverse para hallar el tiempo t (en días) que invierte este planeta concreto en moverse por su órbita de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$.

CUESTIONES

1. Introduzca la ecuación polar de la órbita de 70 Vir B en una calculadora en modo polar. Represente la ecuación en una ventana en la que θ varíe de 0 a π . Después, represente de nuevo la ecuación con θ variando de 0 a 2π , y con θ variando de 0 a 4π . ¿Qué observa?
2. Cuando θ varía de 0 a π el planeta recorre la mitad de su órbita. Empezando por $\theta = 0$, ¿qué valor de θ corresponde a un cuarto de órbita? Explique su respuesta.
3. Utilice el resultado de la cuestión 2 para estimar el tiempo que invierte el planeta en viajar desde $\theta = 0$ hasta un cuarto de su órbita. Después, estime el tiempo que tarda en recorrer el segundo cuarto de órbita. ¿Son iguales estos tiempos? Describa el movimiento de este planeta. ¿Cuándo tiene velocidad máxima? ¿Y velocidad mínima?

Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares



9.1 Cónicas y Cálculo

- CONTENIDO
- Secciones cónicas
- Parábolas
- Elipses
- Hipérbolas

Secciones cónicas

Cada **sección cónica** (o, simplemente, **cónica**) puede describirse como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. En la Figura 9.1 puede apreciarse que para las cuatro cónicas básicas, el plano no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura resultante es una **cónica degenerada**, como las que muestra la Figura 9.2.



HYPATIA (370-415)

Los griegos descubrieron las secciones cónicas en algún tiempo situado entre el 600 y el 300 a.C. En los comienzos del periodo alejandrino, Apolonio (262-190 a.C.) conocía lo suficiente acerca de las cónicas para producir una obra de ocho volúmenes sobre el tema. Más tarde, hacia el final del periodo de Alejandria, Hypatia escribió un libro titulado *Sobre las cónicas de Apolonio*. Su muerte marcó el final de los grandes descubrimientos matemáticos en Europa por varios siglos.

Los primeros griegos prestaron especial atención a las propiedades geométricas de las cónicas. Fue 1.900 años después, en los albores del siglo XVII, cuando se hizo evidente la utilidad de las cónicas, que tuvieron una presencia prominente en el desarrollo del Cálculo.



Círculo



Elipse



Hipérbola

FIGURA 9.1
Secciones cónicas.



Punto



Recta



Dos rectas que se cortan

FIGURA 9.2
Cónicas degeneradas.

Existen varias formas de introducir las cónicas. Se puede comenzar, como hacían los griegos, definiendo las cónicas en términos de intersecciones de planos y conos, o bien definir las algebraicamente en términos de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación general de segundo grado

PARA MÁS INFORMACIÓN

Para aprender más acerca de las actividades matemáticas de Hypatia, puede consultarse el artículo «Hypatia and Her Mathematics», de Michael A. B. Deakin, en *The American Mathematical Monthly*, marzo 1994.

No obstante, el enfoque que mejor se ajusta a nuestras necesidades es un tercero, en el que cada una de las cónicas se define como un **lugar geométrico** o colección de puntos que satisfacen una cierta propiedad geométrica. Por ejemplo, la circunferencia puede definirse como la colección de todos los puntos (x, y) del plano que equidistan de uno fijo (h, k) . Esta definición en forma de lugar geométrico conduce fácilmente a la ecuación canónica de una circunferencia,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación canónica de una circunferencia

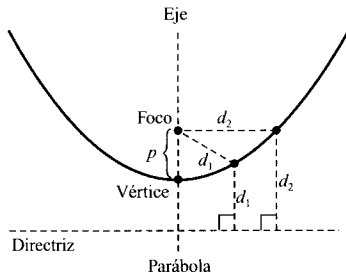


FIGURA 9.3

Parábolas

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) que son equidistantes de una recta fija (**directriz**) y un punto fijo (**foco**) no perteneciente a esa recta. El punto medio entre el foco y la directriz es el **vértice**, y la recta que pasa por el foco y el vértice es el **eje** de la parábola.

TEOREMA 9.1 ECUACIÓN CANÓNICA DE UNA PARÁBOLA

La **forma canónica** de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) y directriz $y = k - p$ es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{Eje vertical}$$

Para la directriz $x = h - p$, la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{Eje horizontal}$$

El foco está en el eje a p unidades (*distancia dirigida*) del vértice.

EJEMPLO 1 Determinación del foco de una parábola

Hallar el foco de la parábola de ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

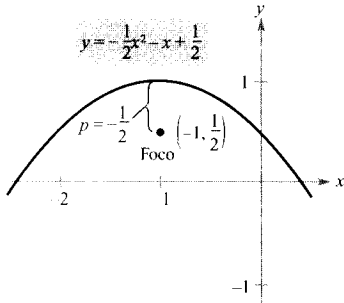


FIGURA 9.4
Parábola con eje vertical, $p < 0$.

Solución: Para hallar el foco, llevamos la ecuación a forma canónica completando el cuadrado.

$$y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{Ecuación original}$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - 2x - x^2) \quad \text{Sacar factor } \frac{1}{2}$$

$$2y = 1 - (x^2 + 2x) \quad \text{Agrupar términos}$$

$$2y = 2 - (x^2 + 2x + 1) \quad \text{Sumar y restar 1 en el lado derecho}$$

$$x^2 + 2x + 1 = -2y + 2$$

$$(x + 1)^2 = -2(y - 1) \quad \text{Forma canónica}$$

Comparando esta ecuación con $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, se puede concluir que

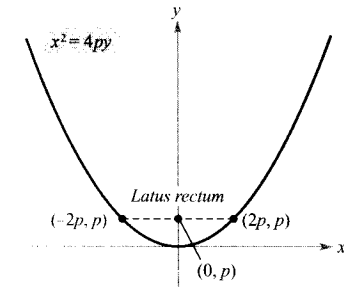
$$h = -1, \quad k = 1 \quad \text{y} \quad p = -\frac{1}{2}$$

Puesto que p es negativo, la parábola se abre hacia abajo, como ilustra la Figura 9.4. Por tanto, su foco está a p unidades del vértice, o sea

$$(h, k + p) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{Foco} \quad \square$$

Un segmento que pasa por el foco de una parábola y tiene sus extremos en la parábola se denomina **cuerda focal**. La cuerda focal perpendicular al eje de la parábola es el **latus rectum** (lado recto). En el próximo ejemplo, determinamos la longitud del **latus rectum** y la del correspondiente arco interceptado.

EJEMPLO 2 Longitud de una cuerda focal y del arco correspondiente



Longitud del **latus rectum**: $4p$
Longitud del arco: $4,59p$

FIGURA 9.5

La longitud del **latus rectum** es menor que la del arco interceptado.

Hallar la longitud del **latus rectum** de la parábola dada por $x^2 = 4py$. A continuación, calcular la longitud del arco de parábola que intercepta el **latus rectum**.

Solución: Como el **latus rectum** pasa por el foco $(0, p)$ y es perpendicular al eje y , las coordenadas de sus extremos son $(-x, p)$ y (x, p) . Sustituyendo y por p en la ecuación de la parábola resulta

$$x^2 = 4p(p) \quad \implies \quad x = \pm 2p$$

Así pues, los puntos terminales del **latus rectum** son $(-2p, p)$ y $(2p, p)$, de manera que su longitud es $4p$ (Figura 9.5). Por su parte, la longitud del arco interceptado viene dada por:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{-2p}^{2p} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{2p} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2p}\right)^2} dx \\
 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} \sqrt{4p^2 + x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2p} \left[x\sqrt{4p^2 + x^2} + 4p^2 \ln |x + \sqrt{4p^2 + x^2}| \right]_0^{2p} && \text{Teorema 7.2} \\
 &= \frac{1}{2p} [2p\sqrt{8p^2} + 4p^2 \ln(2p + \sqrt{8p^2}) - 4p^2 \ln(2p)] \\
 &= 2p[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \\
 &\approx 4,59p
 \end{aligned}$$

□

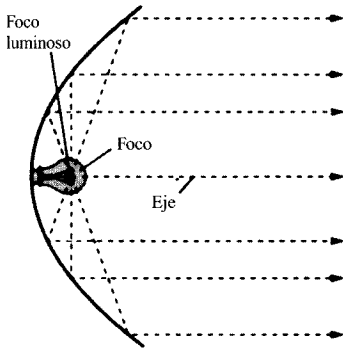


FIGURA 9.6

Reflector parabólico: la luz se refleja en rayos paralelos.

Una propiedad muy utilizada de la parábola es su propiedad de reflexión. En Física, una superficie se llama **reflectante** si la recta tangente en cualquier punto forma ángulos iguales con cada rayo incidente y el correspondiente rayo reflejado. El ángulo con el rayo incidente se conoce como **ángulo de incidencia** y el ángulo con el rayo emergente, **ángulo de reflexión**. Un ejemplo de superficie reflectante es un espejo plano.

Otro tipo de superficie reflectante es la generada por revolución de una parábola alrededor de su eje. Una propiedad especial de los reflectores parabólicos es que permiten dirigir hacia el foco todos los rayos que inciden paralelos al eje —en este principio se basa el diseño de los espejos parabólicos de los telescopios de reflexión—. Recíprocamente, todos los rayos de luz que emanan del foco del reflector parabólico utilizado en una linterna son paralelos, como muestra la Figura 9.6.

TEOREMA 9.2**PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA PARÁBOLA**

Sea P un punto de una parábola. La recta tangente a la parábola en el punto P forma ángulos iguales con las dos rectas siguientes.

1. La recta que pasa por P y por el foco.
2. La recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.

Elipses

Más de un milenio después del final del período de Alejandría de la Matemática griega, en la civilización occidental comenzó por fin un Renacimiento de la Matemática y de los descubrimientos científicos. Una de las principales figuras en este resurgir fue el astrónomo polaco Nicolás Copérnico. En su trabajo *Sobre las revoluciones de las esferas celestes*, Copérnico afirmó que todos los planetas, incluida la Tierra, giraban alrededor del Sol en órbitas circulares.



NICOLÁS COPÉRNICO (1473-1543)

Copérnico comenzó el estudio del movimiento planetario cuando se le pidió que revisara el calendario. En aquella época, la duración exacta del año no podía predecirse con precisión usando la teoría de que la Tierra era el centro del Universo.

Aunque algunas de las afirmaciones de Copérnico eran erróneas, la controversia provocada por su teoría heliocéntrica motivó a los astrónomos a buscar un modelo matemático capaz de explicar los movimientos observados del Sol y los planetas.

El primero en encontrar el modelo correcto fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630). Kepler descubrió que los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol no como centro sino como un foco de la órbita.

El uso de las elipses para explicar el movimiento de los planetas es tan sólo una de sus múltiples aplicaciones prácticas y estéticas. Como hicimos con las parábolas, iniciaremos el estudio de este segundo tipo de cónica definiéndolo como lugar geométrico. Ahora, sin embargo, utilizaremos *dos* focos en lugar de uno.

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos (x, y) cuya suma de distancias a dos puntos fijos distintos (**focos**) es constante (Figura 9.7). La recta que une los focos corta a la elipse en dos puntos llamados **vértices**. La cuerda que une los vértices es el **eje mayor**, y su punto medio es el **centro** de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor por el centro es el **eje menor** de la elipse.

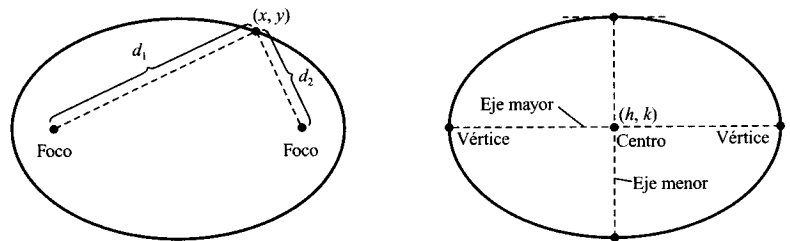


FIGURA 9.7

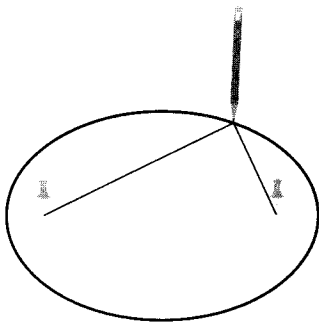


FIGURA 9.8

TEOREMA 9.3 ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE

La forma canónica de la ecuación de una elipse, con centro (h, k) y ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$, donde $a > b$, es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{El eje mayor es horizontal}$$

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{El eje mayor es vertical}$$

Los focos están en el eje mayor, a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.

| Nota. Se puede visualizar la definición de una elipse imaginando dos chinchetas clavadas en los focos, como ilustra la Figura 9.8. Si se sujetan a las chinchetas los extremos de una cuerda de longitud fija y se tensa la cuerda con un lápiz, la curva trazada por el lápiz será una elipse.

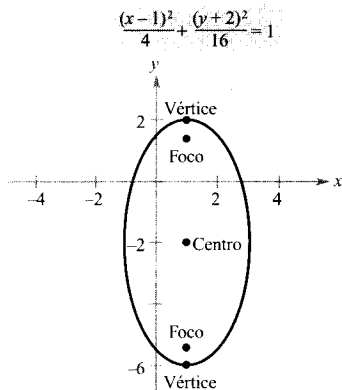


FIGURA 9.9

Elipse con eje mayor vertical.

EJEMPLO 3 Completando cuadrados

Hallar el centro, los vértices y los focos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

Solución: Completando el cuadrado, podemos escribir la ecuación de la elipse en forma canónica

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0 \quad \text{Ecuación original}$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1 \quad \text{Forma canónica}$$

Así pues, el eje mayor es paralelo al eje y , con $h = 1$, $k = -2$, $a = 4$, $b = 2$ y $c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Por tanto, se obtiene lo siguiente.

Centro: $(1, -2)$ (h, k)

Vértices: $(1, -6)$ y $(1, 2)$ $(h, k \pm a)$

Focos: $(1, -2 - 2\sqrt{3})$ y $(1, -2 + 2\sqrt{3})$ $(h, k \pm c)$

La gráfica de la elipse se muestra en la Figura 9.9. □

Nota. Si el término constante $F = -8$ de la ecuación del Ejemplo 3 hubiera sido mayor o igual que 8, habríamos obtenido uno de los siguientes casos degenerados:

- $F = 8$, único punto, $(1, -2)$:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 0$$

- $F > 8$, no hay puntos solución:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} < 0$$

EJEMPLO 4 La órbita de la Luna

La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de la Tierra en uno de los focos (Figura 9.10). Los ejes mayor y menor de la órbita tienen longitudes de 768.806 km y 767.746 km. Hallar las distancias máxima y mínima (apogeo y perigeo) del centro de la Tierra al centro de la Luna.

Solución: Comenzamos despejando a y b .

$$2a = 768.806 \quad \text{Longitud del eje mayor}$$

$$a = 384.403 \quad \text{Despejar } a$$

$$2b = 767.746 \quad \text{Longitud del eje menor}$$

$$b = 383.873 \quad \text{Despejar } b$$

Ahora, usando estos valores, calculamos c como sigue.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 20.179$$

En consecuencia, la distancia máxima del centro de la Tierra al centro de la Luna es

$$a + c \approx 404.582 \text{ km}$$

y la distancia mínima es

$$a - c \approx 364.224 \text{ km}$$

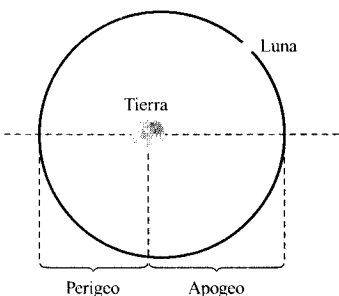


FIGURA 9.10

□

El Teorema 9.2 presentaba una propiedad de reflexión de las parábolas. Las elipses poseen una propiedad similar. El Ejercicio 72 pide demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 9.4 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE UNA ELIPSE

Sea P un punto de una elipse. La recta tangente a la elipse en el punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y los focos.

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre aplicaciones de las propiedades de reflexión de las cónicas véase el artículo «Parabolic Mirrors, Elliptic and Hyperbolic Lenses», de Mohsen Maesumi, en *The American Mathematical Monthly*, junio-julio 1992. También puede consultarse el artículo «The Geometry of Microwave Antennas», de William R. Parzynski, *Mathematics Teacher*, abril 1984.

Una de las razones por las que los astrónomos tenían dificultad en detectar las órbitas de los planetas con elipses es que los focos de las órbitas planetarias están relativamente próximos al centro del Sol, lo que hace que las órbitas sean casi circulares. Para medir el *achatamiento* de una elipse, empleamos el concepto de **excentricidad**.

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

La **excentricidad** de una elipse viene dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

Para ver cómo se usa este cociente para describir la forma de una elipse, observemos que como los focos de una elipse están situados en el eje mayor, entre los vértices y el centro, es

$$0 < c < a$$

En una elipse casi circular, los focos están próximos al centro y el cociente c/a es pequeño, y en una elipse con gran elongación, los focos están cerca de los vértices y el cociente c/a es próximo a 1, como muestra la Figura 9.11. Observemos que $0 < e < 1$ para toda elipse.

La órbita de la Luna tiene una excentricidad $e = 0,0549$, y las excentricidades de las nueve órbitas planetarias son las siguientes:

Mercurio:	$e = 0,2056$	Marte:	$e = 0,0934$	Urano:	$e = 0,0460$
Venus:	$e = 0,0068$	Júpiter:	$e = 0,0484$	Neptuno:	$e = 0,0082$
Tierra:	$e = 0,0167$	Saturno:	$e = 0,0543$	Plutón:	$e = 0,2481$

Por integración se puede probar que el área de una elipse es $A = \pi ab$. Así, el área de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ viene dada por

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

Sustitución trigonométrica $x = a \text{ sen } \theta$

Sin embargo, no resulta tan sencillo determinar la longitud de una elipse. El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar la excentricidad para plantear una «integral elíptica» para la longitud de una elipse.

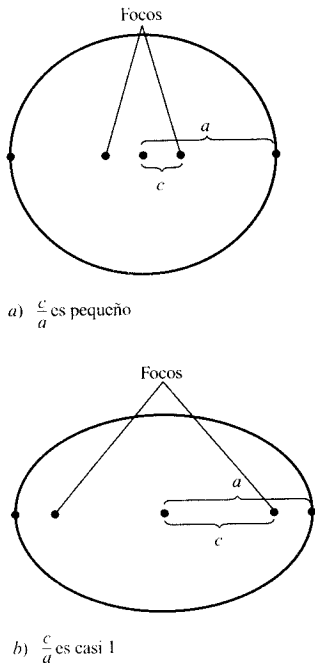


FIGURA 9.11

La excentricidad es el cociente $\frac{c}{a}$

EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud de una elipse

Demostrar que la longitud de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad e = \frac{c}{a}$$

Solución: Como la elipse dada es simétrica respecto a los ejes x e y , su longitud C es cuatro veces la longitud de $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ en el primer cuadrante. La función y es derivable en todo x del intervalo $[0, a]$ excepto en $x = a$. Por tanto, la longitud viene dada por la siguiente integral impropia

$$C = \lim_{d \rightarrow a^-} 4 \int_0^d \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx$$

Usando la sustitución trigonométrica $x = a \sin \theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta}} (a \cos \theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta) + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Puesto que $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, podemos reescribir esta integral como

$$C = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad \square$$

Se ha dedicado mucho tiempo al estudio de las integrales elípticas. Generalmente, tales integrales no tienen primitivas elementales. Para hallar la longitud de una elipse, es necesario recurrir, en general, a alguna técnica de aproximación.

EJEMPLO 6 Estimación del valor de una integral elíptica

Usar la integral elíptica del Ejemplo 5 para estimar la longitud de la elipse $(x^2/25) + (y^2/16) = 1$.

Solución: Como $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 9/25$, resulta ser

$$C = (4)(5) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{9 \sin^2 \theta}{25}} d\theta$$

Aplicando la regla de Simpson con $n = 4$, se obtiene

$$\begin{aligned} C &\approx 20 \left(\frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{1}{4} \right) [1 + 4(0,9733) + 2(0,9055) + 4(0,8323) + 0,8] \\ &\approx 28,36 \end{aligned} \quad \square$$

ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA ELIPSE

En su trabajo sobre las órbitas elípticas, a comienzos del siglo XVII, Johannes Kepler obtuvo la fórmula $A = \pi ab$ para el área de la elipse. Sin embargo, no consiguió obtener una fórmula para la longitud de la elipse. Sólo pudo establecer la fórmula aproximada $C = \pi(a + b)$.

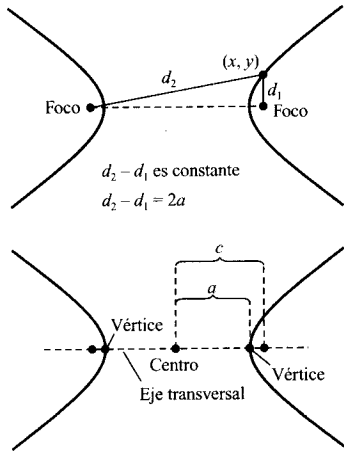


FIGURA 9.12

Hipérbolas

La definición de una hipérbola es similar a la de una elipse. En una elipse, la *suma* de las distancias de un punto de la elipse a los focos es una cantidad fija, mientras que en una hipérbola, lo que es fijo es la *diferencia* entre esas distancias.

Una **hipérbola** es el conjunto de los puntos (x, y) para los cuales la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos distintos (focos) es constante (Figura 9.12). La recta que pasa por los dos focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados **vértices**. El segmento que une los vértices es el **eje transversal**, y su punto medio es el **centro** de la hipérbola. Una propiedad característica de la hipérbola es que su gráfica tiene dos *ramas* separadas.

TEOREMA 9.5 ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA

La forma canónica de la ecuación de una hipérbola con centro (h, k) es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{El eje transversal es horizontal}$$

o

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{El eje transversal es vertical}$$

Los vértices están a a unidades del centro y los focos a c unidades del centro. Además $b^2 = c^2 - a^2$.

Para esbozar la gráfica de una hipérbola, conviene determinar sus **asíntotas**, como ilustra la Figura 9.13. Cada hipérbola posee dos asíntotas que se cortan en el centro de la hipérbola. Las asíntotas pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$, centrado en (h, k) . El segmento de longitud $2b$ que une $(h, k + b)$ y $(h, k - b)$ se conoce como el **eje conjugado** de la hipérbola.

TEOREMA 9.6 ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si el eje transversal es horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{b}{a}(x - h) \quad \text{e} \quad y = k - \frac{b}{a}(x - h)$$

Si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{a}{b}(x - h) \quad \text{e} \quad y = k - \frac{a}{b}(x - h)$$

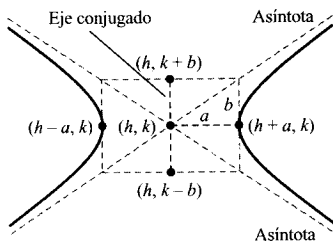


FIGURA 9.13

En la Figura 9.13, puede verse que las asíntotas coinciden con las diagonales de un rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$, centrado en (h, k) . Esto nos proporciona una manera rápida de dibujar las asíntotas, lo que a su vez ayuda a esbozar la hipérbola.


EJEMPLO 7 Uso de las asíntotas para esbozar una hipérbola

Dibujar la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = 16$.

Solución: Comenzamos escribiendo la ecuación en forma canónica.

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

El eje transversal es horizontal y los vértices están en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Los extremos del eje conjugado son $(0, -4)$ y $(0, 4)$. Usando estos cuatro puntos, podemos dibujar el rectángulo de la Figura 9.14a. Tras trazar las asíntotas por las esquinas de este rectángulo, podemos completar el esbozo de la Figura 9.14b.



Puede usar una calculadora para verificar la gráfica obtenida en el Ejemplo 7, despejando y de la ecuación original y representando

$$y_1 = \sqrt{4x^2 - 16}$$

$$y_2 = -\sqrt{4x^2 - 16}$$

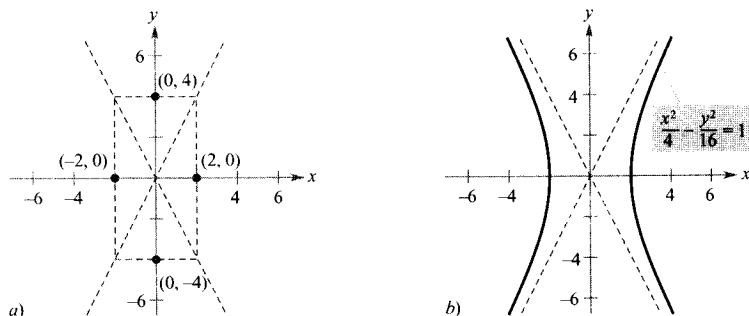


FIGURA 9.14 □

Como en la elipse, la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Dado que $c > a$ en las hipérbolas, se tiene que $e > 1$. Si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi rectas. Si la excentricidad es próxima a 1, las ramas son más puntiagudas, como muestra la Figura 9.15.

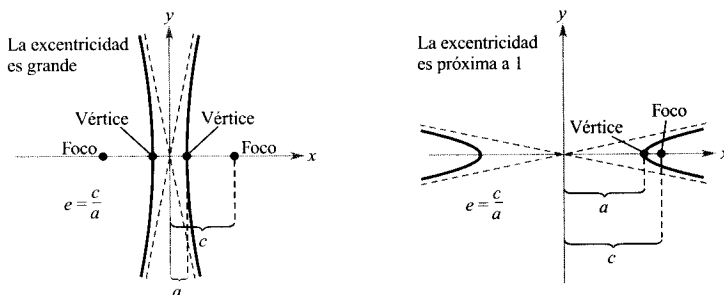


FIGURA 9.15

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

La excentricidad de una hipérbola viene dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

La siguiente aplicación, desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial, muestra cómo se pueden aprovechar las propiedades de las hipérbolas en el radar o en otros sistemas de detección.

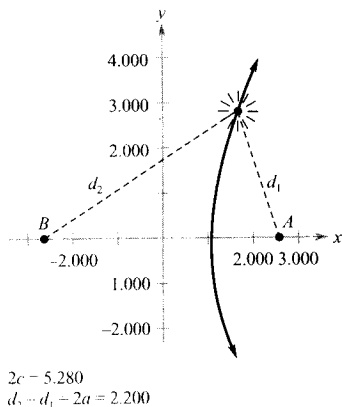


FIGURA 9.16

El lugar geométrico de los puntos que están 2.200 pies más cerca de A que de B es una rama de la hipérbola con $c = 2.640$ y $a = 1.100$.

EJEMPLO 8 Un sistema de detección hiperbólico

Dos micrófonos, separados 1 milla entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde se produjo la explosión?

Solución: Suponiendo que el sonido viaja a 1.100 pies por segundo, sabemos que la explosión tuvo lugar 2.200 pies más lejos de B que de A, como ilustra la Figura 9.16. El lugar geométrico de los puntos que están 2.200 pies más cerca de A que de B es una rama de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, donde

$$c = \frac{1 \text{ milla}}{2} = \frac{5.280 \text{ pies}}{2} = 2.640 \text{ pies}$$

y

$$a = \frac{2.200 \text{ pies}}{2} = 1.100 \text{ pies}$$

Por consiguiente,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5.759.600$$

y podemos concluir que la explosión se produjo en algún punto de la rama derecha de la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{1.210.000} - \frac{y^2}{5.759.600} = 1 \quad \square$$



CAROLINE HERSCHEL (1750-1848)

La primera mujer a la que se atribuye la detección de un nuevo cometa es la astrónoma inglesa Caroline Herschel. Durante su larga vida, Caroline Herschel descubrió un total de ocho cometas.

En el Ejemplo 8, sólo se ha podido determinar la hipérbola en la cual tuvo lugar la explosión, pero no la localización exacta de dicha explosión. Sin embargo, si se hubiera registrado el sonido en una tercera posición C, se habrían determinado otras dos hipérbolas. La localización exacta de la explosión sería el punto de intersección de las tres hipérbolas.

Otra interesante aplicación de las cónicas está relacionada con las órbitas de los cometas en nuestro sistema solar. De los 610 cometas identificados hasta 1970, 245 tienen órbitas elípticas, 295 parabólicas y 70 hiperbólicas. Todas las órbitas tienen un foco en el centro del Sol y un vértice en el punto en que el cometa está más cercano al Sol. Sin duda, muchos de los cometas con órbitas parabólicas o hiperbólicas no han sido identificados, ya que atraviesan nuestro sistema solar tan sólo una vez. Únicamente los cometas con órbitas elípticas, como el cometa Halley, permanecen en nuestro sistema solar.

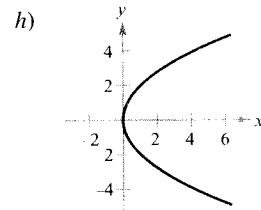
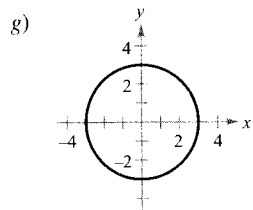
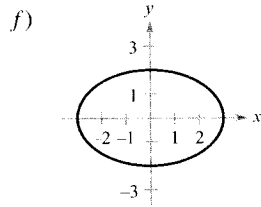
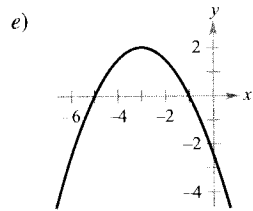
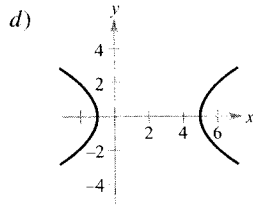
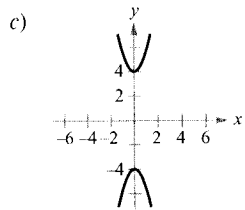
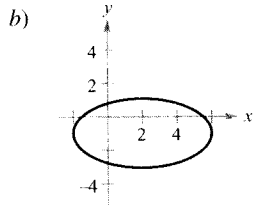
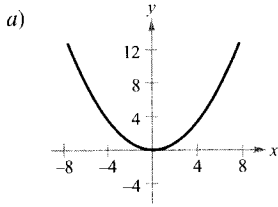
El tipo de órbita de un cometa puede determinarse como sigue:

1. Elipse: $v < \sqrt{2GM/p}$
2. Parábola: $v = \sqrt{2GM/p}$
3. Hipérbola: $v > \sqrt{2GM/p}$

En estas tres fórmulas, p es la distancia entre un vértice y un foco de la órbita (en metros), v la velocidad del cometa en el vértice (en metros por segundo), $M \approx 1,991 \times 10^{30}$ kg la masa del Sol, y $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$ m³/kg · s² la constante de gravitación.

Ejercicios de la Sección 9.1

En los Ejercicios 1-8, asociar a cada ecuación su gráfica.



1. $y^2 = 4x$

2. $x^2 = 8y$

3. $(x + 3)^2 = -2(y - 2)$

4. $\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

7. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{1} = 1$

8. $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

En los Ejercicios 9-16, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola y esbozar su gráfica.

9. $y^2 = -6x$

10. $x^2 + 8y = 0$

11. $(x + 3) + (y - 2)^2 = 0$

12. $(x - 1)^2 + 8(y + 2) = 0$

13. $y^2 - 4y - 4x = 0$

14. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

15. $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

16. $y^2 + 4y + 8x - 12 = 0$

En los Ejercicios 17-20, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola. A continuación, representar la parábola en una calculadora.

17. $y^2 + x + y = 0$

18. $y = -\frac{1}{6}(x^2 + 4x - 2)$

19. $y^2 - 4x - 4 = 0$

20. $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

En los Ejercicios 21-28, encontrar una ecuación de la parábola.

21. Vértice: (3, 2)

22. Vértice: (-1, 2)

Foco: (1, 2)

Foco: (-1, 0)

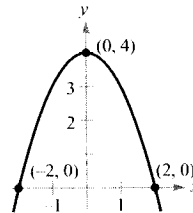
23. Vértice: (0, 4)

24. Foco: (2, 2)

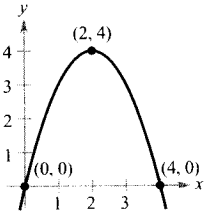
Directriz: $y = -2$

Directriz: $x = -2$

25.



26.



27. El eje es paralelo al eje y ; la gráfica pasa por los puntos (0, 3), (3, 4) y (4, 11).

28. Directriz: $y = -2$; extremos del *latus rectum*: (0, 2) y (8, 2).

29. **Panel solar** Se construye un panel solar para calentar agua con una hoja de acero inoxidable a la que se da forma de parábola (véase figura). El agua fluirá a través de una tubería situada en el foco de la parábola. ¿A qué distancia está la tubería del vértice?

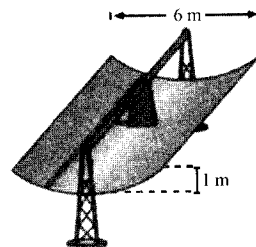


FIGURA E.29

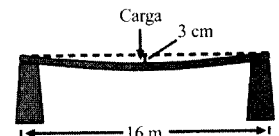


FIGURA E.30

30. **Deformación de una viga** Una viga de 16 metros de largo con soportes simples sostiene una carga concentrada en su centro (véase figura). La deformación de la

viga en su centro es de 3 cm. Supongamos que la viga deformada es parabólica.

- a) Hallar una ecuación de la parábola. (Tomar como origen el centro de la parábola.)
- b) ¿A qué distancia del centro de la viga se produce una deformación de 1 cm?
31. Hallar una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = ax^2$ en $x = x_0$. Demostrar que la x -intersección de esta recta tangente es $(x_0/2, 0)$.
32. a) Probar que dos tangentes distintas cualesquiera de una parábola se cortan.
b) Comprobar el resultado del apartado a) hallando el punto de intersección de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y = 0$ en los puntos $(0, 0)$ y $(6, 3)$.
33. a) Demostrar que si dos tangentes a una parábola se cortan perpendicularmente, el punto de intersección está en la directriz.
b) Verificar el resultado del apartado a) probando que las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ en los puntos $(-2, 5)$ y $(3, \frac{5}{4})$ se cortan perpendicularmente, y que el punto de intersección está en la directriz.
34. Hallar el punto de la gráfica de $x^2 = 8y$ que está más próximo al foco.
35. **Recepción de radio y televisión** En las áreas montañosas, la recepción de radio y televisión resulta a veces pobre. Consideremos un caso idealizado en el que la gráfica de la parábola $y = x - x^2$ representa una colina, hay un emisor situado en el punto $(-1, 1)$ y un receptor al otro lado de la colina, en el punto $(x_0, 0)$. ¿A qué distancia de la colina puede estar el receptor sin que obstruya la recepción?

36. **Un modelo matemático** La siguiente tabla muestra el consumo *per capita* de leche entera C (en libras) en Estados Unidos durante unos años. (Fuente: U.S. Department of Agriculture.)

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1993
C	213,5	174,9	141,7	119,7	87,6	77,8

- a) Utilizando una calculadora programada para el cálculo de regresiones, encontrar un modelo cuadrático que ajuste los datos donde t sea el tiempo en años, y $t = 0$ corresponda a 1970.
- b) Representar los datos y el modelo con una calculadora gráfica.
- c) Usar el modelo para estimar el año en el que el consumo fue mínimo.

37. **Arquitectura** Una vidriera de una iglesia está limitada por una parábola en su parte superior y por un arco de circunferencia en su parte inferior (véase figura). Hallar la superficie de la vidriera.

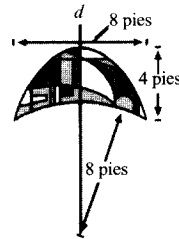


FIGURA E.37

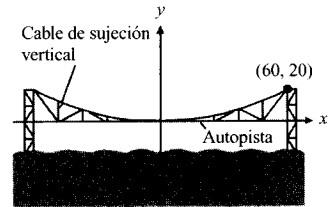


FIGURA E.39

38. **Longitud de arco** Hallar la longitud de arco de la parábola $4x - y^2 = 0$ en el intervalo $0 \leq y \leq 4$.
39. **Diseño de puentes** Cada uno de los cables de sujeción de un puente colgante se halla suspendido (con forma de parábola) entre dos torres separadas 120 metros entre sí y tienen una altura de 20 metros sobre una autopista (véase figura). Los cables tocan la autopista en el punto medio entre las torres.
- a) Hallar una ecuación de la figura parabólica de cada cable.
- b) Hallar la longitud de cada cable de sujeción.
40. **Área** La forma de una antena de recepción de señales de satélite se obtiene por revolución de la parábola

$$x^2 = 20y$$

alrededor del eje y . Comprobar que, si el radio de la antena es r pies, su superficie viene dada por

$$2\pi \int_0^r x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2} dx = \frac{\pi}{15} [(100 + r^2)^{3/2} - 1.000]$$

En los Ejercicios 41-46, hallar el centro, los focos, los vértices y la excentricidad de la elipse, y esbozar su gráfica.

41. $x^2 + 4y^2 = 4$
42. $5x^2 + 7y^2 = 70$
43. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$
44. $(x+2)^2 + \frac{(y+4)^2}{1/4} = 1$
45. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$
46. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y + 31 = 0$

En los Ejercicios 47-50, hallar el centro, los focos y los vértices de la elipse. Representar la elipse en una calculadora. (Explicar cómo se ha usado la calculadora para obtener la gráfica.)

47. $12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$

48. $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y + 43 = 0$

49. $x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 0,25 = 0$

50. $2x^2 + y^2 + 4,8x - 6,4y + 3,12 = 0$

En los Ejercicios 51-56, hallar una ecuación de la elipse.

51. Centro: (0, 0)

Foco: (2, 0)

Vértice: (3, 0)

52. Vértices: (0, 2), (4, 2)

Excentricidad: $\frac{1}{2}$

53. Vértices: (3, 1), (3, 9)

Longitud del eje menor: 6

54. Focos: (0, ± 5)

Longitud del eje mayor: 14

55. Centro: (0, 0)

Eje mayor: horizontal

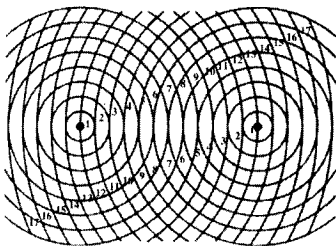
Puntos de la elipse: (3, 1), (4, 0)

56. Centro: (1, 2)

Eje mayor: vertical

Puntos de la elipse: (1, 6), (3, 2)

57. Dibujar la elipse formada por todos los puntos (x, y) cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 16 unidades, estando los focos situados en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas de la figura.

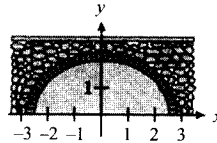


58. **Redacción** En la página 904 se sugirió que puede dibujarse una elipse usando dos chinchetas, una cuerda de longitud fija (mayor que la distancia entre las chinchetas) y un lápiz. Si se sujetan los extremos de la cuerda a las chinchetas y se mantiene tensa la cuerda con el lápiz, la trayectoria descrita por el lápiz será una elipse.

a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en términos de a ?

b) Explicar por qué la trayectoria es una elipse.

59. **Construcción de un arco semielíptico** Se va a construir un arco de chimenea en forma de semielipse. La abertura debe tener una altura de 2 pies en la parte central y una anchura de 5 pies en la base (véase figura). El contratista dibuja el perfil de la elipse mediante el método del Ejercicio 58. ¿Dónde deberían situarse las chinchetas y cuál debería ser la longitud del trozo de cuerda?



60. **Órbita de la Tierra** La Tierra se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos. La longitud del semieje mayor es 14.957.000 km y la excentricidad 0,0167. Hallar la menor distancia (*perihelio*) y la mayor distancia (*afelio*) de la Tierra al Sol.

61. **Órbita de un satélite** Probar que, si el apogeo y el perigeo de la órbita elíptica de un satélite terrestre son A y P, la excentricidad de la órbita es

$$e = \frac{A - P}{A + P}$$

62. **Explorer 18** El 26 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más bajo y más alto sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122.000 millas. Hallar la excentricidad de su órbita elíptica.

63. **El cometa Halley** El cometa probablemente más famoso de todos, el Halley, tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. Su distancia máxima del Sol es aproximadamente 35,34 UA (unidad astronómica $\approx 92,956 \times 10^6$ millas), y su distancia mínima es aproximadamente 0,59 UA. Hallar la excentricidad de la órbita.

64. La ecuación de una elipse centrada en el origen puede escribirse como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

Probar que cuando $e \rightarrow 0$, y a permanece fijo, la elipse tiende a una circunferencia.

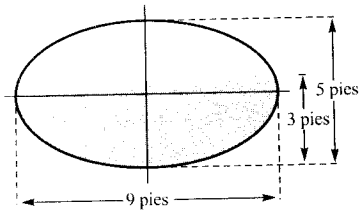
En los Ejercicios 65 y 66, determinar los puntos en los que dy/dx es cero o no está definida para localizar los extremos de los ejes mayor y menor de la elipse.

65. $16x^2 + 9y^2 + 96x + 36y + 36 = 0$

66. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

67. Una partícula se mueve en el sentido de las agujas del reloj por la trayectoria elíptica $x^2/100 + y^2/25 = 1$. La partícula deja la órbita en el punto $(-8, 3)$ y viaja a lo largo de una recta tangente a la elipse. ¿En qué punto cruzará el eje y ?

68. **Volumen** El tanque de agua en un camión de bomberos tiene una longitud de 16 pies y sus secciones transversales son elipses. Hallar el volumen de agua contenida en el tanque parcialmente lleno que muestra la figura.



Área y volumen En los Ejercicios 69 y 70, hallar *a*) el área de la región limitada por la elipse, *b*) el volumen y el área superficial del sólido generado por revolución de esta región alrededor de su eje mayor (elipsoide de revolución prolato), y *c*) el volumen y el área superficial del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje menor (elipsoide de revolución oblongo).

69. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

70. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

71. **Longitud de arco** Usando integración numérica, estimar con una precisión de dos cifras decimales la integral elíptica que representa la longitud de la elipse.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

72. Probar que la recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas que unen P con los focos (véase figura). [Ayuda: 1) Calcular la pendiente de la recta tangente en P , 2) calcular las pendientes de las rectas que unen P con los focos, y 3) aplicar la fórmula de la tangente del ángulo entre dos rectas.]

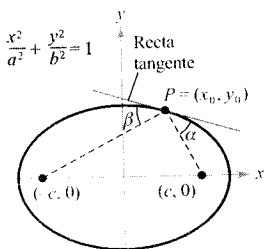


FIGURA E.72

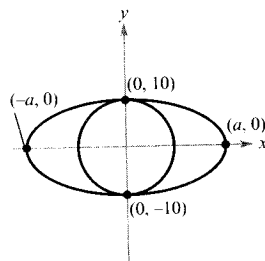


FIGURA E.73

73. **Geometría** El área de la elipse de la figura es el doble del área del círculo. ¿Cuál es la longitud del eje mayor?

74. **Conjetura**

a) Probar que la ecuación de una elipse se puede escribir como

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

b) Usando una calculadora, representar la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4(1-e^2)} = 1$$

para $e = 0,95, e = 0,75, e = 0,5, e = 0,25$ y $e = 0$.

c) Utilizar los resultados del apartado b) para formular una conjetura acerca de la variación de la forma de la elipse cuando e tiende a 0.

En los Ejercicios 75-82, hallar el centro, los focos y los vértices de la hipérbola, y esbozar su gráfica usando las asíntotas como ayuda.

75. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

76. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

77. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

78. $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x-4)^2}{25} = 1$

79. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

80. $y^2 - 9x^2 + 36x - 72 = 0$

81. $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 80 = 0$

82. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 78 = 0$

En los Ejercicios 83-86, hallar el centro, los focos y los vértices de la hipérbola. Representar la hipérbola y sus asíntotas en una calculadora.

83. $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$

84. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

85. $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$

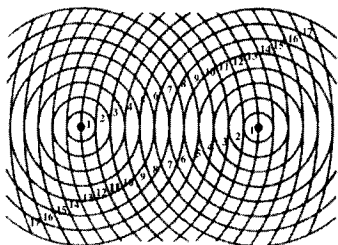
86. $3y^2 - x^2 + 6x - 12y = 0$

En los Ejercicios 87-94, hallar una ecuación de la hipérbola.

87. Vértices: $(\pm 1, 0)$ 88. Vértices: $(0, \pm 3)$
 Asíntotas: $y = \pm 3x$ Asíntotas: $y = \pm 3x$
89. Vértices: $(2, \pm 3)$ 90. Vértices: $(2, \pm 3)$
 Punto de la gráfica: $(0, 5)$ Focos: $(2, \pm 5)$
91. Centro: $(0, 0)$ 92. Centro: $(0, 0)$
 Vértice: $(0, 2)$ Vértice: $(3, 0)$
 Foco: $(0, 4)$ Foco: $(5, 0)$
93. Vértices: $(0, 2), (6, 2)$ 94. Foco: $(10, 0)$
 Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$ Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{4}x$
 $y = 4 - \frac{2}{3}x$

95. Encontrar una ecuación de la hipérbola tal que, para cualquiera de sus puntos, la diferencia entre sus distancias a los puntos $(2, 2)$ y $(10, 2)$ es 6.

96. Esbozar la gráfica de una hipérbola que consiste en todos los puntos (x, y) tales que la diferencia de distancias de (x, y) a dos puntos fijos es 10 unidades, estando los focos situados en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas de la figura.



97. Hallar una ecuación de la hipérbola tal que, para cualquiera de sus puntos, la diferencia entre sus distancias a los puntos $(-3, 0)$ y $(-3, 3)$ es 2.
98. Consideremos una hipérbola centrada en el origen y con eje transversal horizontal. Utilizando la definición de la hipérbola, obtener la forma canónica de su ecuación.
99. **Localización del sonido** Se dispara un rifle situado en el punto $(-c, 0)$ contra un blanco situado en el punto $(c, 0)$. Una persona oye simultáneamente el sonido del disparo del rifle y el del impacto de la bala en el blanco. Demostrar que esta persona se encuentra en una rama de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{c^2 v_s^2 / v_m^2} - \frac{y^2}{c^2 (v_m^2 - v_s^2) / v_m^2} = 1$$

donde v_m es la velocidad inicial de la bala y v_s es la velocidad del sonido = 1.100 pies por segundo.

100. **Navegación** El sistema LORAN (*long distance radio navigation*) para aviones y barcos utiliza pulsos sincronizados emitidos por estaciones muy separadas entre sí. Los pulsos viajan a la velocidad de la luz (186.000 millas/s). La diferencia entre los tiempos de llegada de estos pulsos a un avión o barco es constante en una hipérbola que tiene las estaciones emisoras como focos. Supongamos que dos estaciones, separadas 300 millas entre sí, están situadas en un sistema de coordenadas rectangulares en $(-150, 0)$ y $(150, 0)$ y que un barco viaja a lo largo de la trayectoria de coordenadas $(x, 75)$ (véase figura). Calcular la coordenada x de la posición del barco si la diferencia entre los tiempos de recepción de los pulsos procedentes de las estaciones emisoras es 1.000 microsegundos (0,001 s).

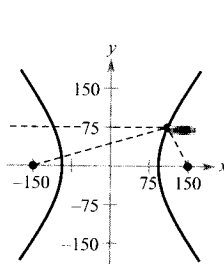


FIGURA E.100

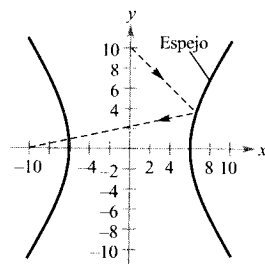


FIGURA E.101

101. **Espejo hiperbólico** Los espejos hiperbólicos (empleados en algunos telescopios) tienen la propiedad de que cada rayo dirigido a un foco se refleja hacia el otro foco. El espejo de la figura tiene ecuación $(x^2/36) - (y^2/64) = 1$. ¿En qué punto del espejo se reflejará la luz procedente del punto $(0, 10)$ hacia el otro foco?

En los Ejercicios 102 y 103, hallar ecuaciones de a) las rectas tangentes y b) las rectas normales a la hipérbola para el valor dado de x .

102. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1, x = 6$ 103. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1, x = 4$

104. Probar que la ecuación de la recta tangente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

105. Demostrar que la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1$$

y la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 1$$

se cortan perpendicularmente.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 106-112, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

- 106.** Es posible que una parábola y su directriz se corten.
107. El punto de la parábola más próximo al foco es el vértice.
108. Si C es la longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b < a$$

entonces $2\pi b \leq C \leq 2\pi a$.

- 109.** La gráfica de

$$\frac{x^2}{4} + y^4 = 1$$

es una elipse.

- 110.** Si $D \neq 0$ o $E \neq 0$, la gráfica de

$$y^2 - x^2 + Dx + Ey = 0$$

es una hipérbola.

- 111.** Si las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se cortan perpendicularmente, entonces $a = b$.

- 112.** Toda recta tangente a una hipérbola corta a ésta sólo en el punto de tangencia.
113. Probar que la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una de las siguientes (excepto en casos degenerados).

<u>Cónica</u>	<u>Condición</u>
a) Círculo	$A = C$
b) Parábola	$A = 0$ o $C = 0$ (pero no ambas)
c) Elipse	$AC > 0$
d) Hipérbola	$AC < 0$

En los Ejercicios 114-123, clasificar la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

114. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

115. $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

116. $y^2 - 4y - 4x = 0$

117. $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

118. $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

119. $y^2 - 4y = x + 5$

120. $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

121. $2x(x - y) = y(3 - y - 2x)$

122. $3(x - 1)^2 = 6 + 2(y + 1)^2$

123. $9(x + 3)^2 = 36 - 4(y - 2)^2$



9.2

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

CONTENIDO

- Curvas planas y ecuaciones paramétricas
- Eliminación del parámetro
- Determinación de ecuaciones paramétricas
- Los problemas de la tautocrona y la braquistocrona

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora hemos estado representando cada gráfica por una ecuación en *dos* variables. En esta sección estudiaremos situaciones en las que se usan *tres* variables para representar una curva en el plano.

Consideremos la trayectoria que sigue un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45° . Si su velocidad inicial es 48 pies/s, el objeto describe la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \quad \text{Ecuación rectangular}$$

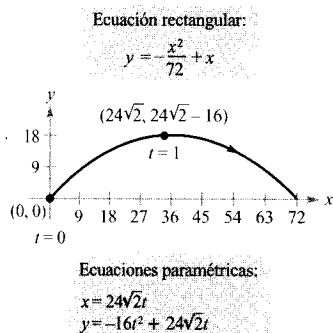


FIGURA 9.17
 Movimiento curvilíneo: dos variables de posición
 y una de tiempo.

como ilustra la Figura 9.17. Ahora bien, esta ecuación no cuenta toda la historia. Aunque nos dice *dónde* ha estado el objeto, no nos dice *cuándo* ha estado en un punto (x, y) dado. Para determinar este instante, podemos introducir una tercera variable t , denominada **parámetro**. Expresando x e y como funciones de t , obtenemos las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}t \quad \text{Ecuación paramétrica de } x$$

e

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } y$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, podemos determinar que en el instante $t = 0$ el objeto estaba en el punto $(0, 0)$. Análogamente, en el instante $t = 1$ estaba en el punto $(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16)$, etc. (Veremos cómo determinar este tipo particular de ecuaciones paramétricas —las ecuaciones del movimiento— más adelante, en la Sección 11.3.)

En este problema de movimiento concreto, x e y son funciones continuas de t , y la trayectoria resultante recibe el nombre de **curva plana**.

DEFINICIÓN DE CURVA PLANA

Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I , las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

se denominan **ecuaciones paramétricas** y t se llama el **parámetro**. El conjunto de puntos (x, y) obtenido cuando t varía en el intervalo I se llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. El par formado por las ecuaciones paramétricas y su gráfica recibe el nombre de **curva plana**, y se denota por C .

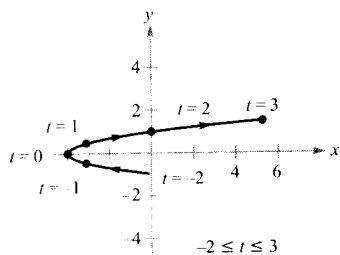
| Nota. A veces es importante distinguir entre la gráfica (el conjunto de puntos) y la curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando así sea, haremos la distinción explícita. En caso contrario, denotaremos por C tanto la gráfica como la curva.

Para trazar (a mano) una curva dada por un par de ecuaciones paramétricas, podemos ir marcando puntos en el plano xy . Cada par de coordenadas (x, y) está determinado por un valor seleccionado del parámetro t . Marcando los puntos resultantes para valores crecientes de t , se traza la curva en un sentido concreto. Esto se llama la **orientación** de la curva.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva

Dibujar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \leq t \leq 3$$



Ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2 - 4 \text{ e } y = \frac{t}{2}$$

FIGURA 9.18

Solución: Para valores de t en el intervalo dado, las ecuaciones paramétricas proporcionan los puntos (x, y) de la tabla.

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

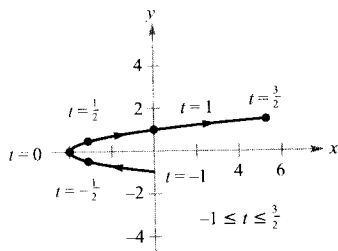
Marcando los puntos en orden creciente de t y usando la continuidad de f y g , se obtiene la curva C de la Figura 9.18. Observemos que las flechas sobre la curva indican la orientación cuando t crece desde -2 hasta 3 . □

| Nota. Aplicando el criterio de la recta vertical, vemos que la gráfica de la Figura 9.18 no define a y como función de x . Esto saca a relucir una de las ventajas de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para describir curvas más generales que las gráficas de las funciones.

Ocurre a menudo que dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \text{ e } y = t, \quad -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

poseen la misma gráfica que las del Ejemplo 1. No obstante, comparando los valores de t en las Figuras 9.18 y 9.19, puede verse que la segunda gráfica se recorre más rápidamente (considerando a t como el tiempo) que la primera. De este modo, en las aplicaciones pueden usarse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas velocidades con las que los objetos recorren una trayectoria dada.



Ecuaciones paramétricas:

$$x = 4t^2 - 4 \text{ e } y = t$$

FIGURA 9.19



Muchas calculadoras y programas gráficos disponen de un modo gráfico paramétrico. Si tiene acceso a alguno de ellos, intente utilizarlo para comprobar las gráficas de las Figuras 9.18 y 9.19. ¿Representa la curva dada por

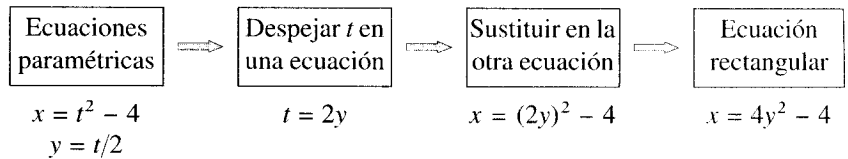
$$x = 4t^2 - 8t \text{ e } y = 1 - t, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

la misma gráfica que muestran las Figuras 9.18 y 9.19? ¿Qué observa acerca de la orientación de esta curva?

Eliminación del parámetro

Se llama **eliminar el parámetro** a encontrar una ecuación rectangular que represente la gráfica de unas ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, es posi-

ble eliminar el parámetro de las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 1 como sigue:



Una vez eliminado el parámetro, se reconoce la ecuación $x = 4y^2 - 4$ como la de una parábola de eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$, como indica la Figura 9.18.

Los rangos de x e y implícitos en las ecuaciones paramétricas pueden alterarse al pasar a forma rectangular. En tal caso, debe ajustarse el dominio de la ecuación rectangular para que su gráfica coincida con la de las ecuaciones paramétricas. El próximo ejemplo muestra una de estas situaciones.

EJEMPLO 2 Ajuste del dominio después de eliminar el parámetro

Dibujar la curva de ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{e} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.

Solución: Comenzamos despejando t de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, podemos despejar t de la primera ecuación como sigue:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{Ecuación paramétrica de } x$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \quad \text{Elevar al cuadrado}$$

$$t+1 = \frac{1}{x^2}$$

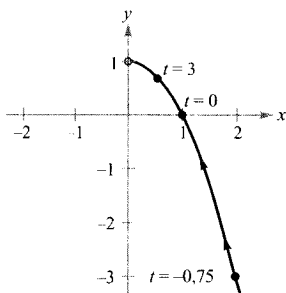
$$t = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{x^2} \quad \text{Despejar } t$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación paramétrica de y se obtiene

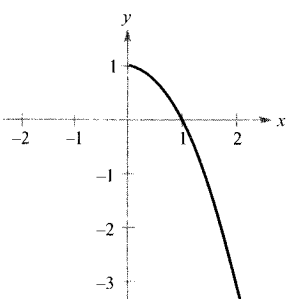
$$y = \frac{t}{t+1} \quad \text{Ecuación paramétrica de } y$$

$$y = \frac{(1-x^2)/x^2}{[(1-x^2)/x^2] + 1} \quad \text{Sustituir } t \text{ por } (1-x^2)/x^2$$

$$y = 1 - x^2 \quad \text{Simplificar}$$



Ecuaciones paramétricas:
 $x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}, y = \frac{t}{t+1}, t > -1$



Ecuación rectangular:
 $y = 1 - x^2, x > 0$

FIGURA 9.20

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$ está definida para todo valor de x , pero en la ecuación paramétrica de x puede verse que la curva sólo está definida cuando $t > -1$. Esto implica que debemos restringir el dominio de x a los valores positivos, como muestra la Figura 9.20. \square

El parámetro de un conjunto de ecuaciones paramétricas no tiene por qué ser el tiempo. En el siguiente ejemplo se usa un *ángulo* como parámetro.

EJEMPLO 3 *Uso de la trigonometría para eliminar un parámetro*

Trazar la curva representada por

$$x = 3 \cos \theta \quad \text{e} \quad y = 4 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Solución: Primero despejamos $\cos \theta$ y $\sin \theta$ en las ecuaciones:

$$\cos \theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{4} \quad \text{Despejar } \cos \theta \text{ y } \sin \theta$$

A continuación, utilizamos la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ para llegar a una ecuación que sólo involucre a x e y .

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{Sustituir}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

Esta ecuación rectangular permite ver que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$ (Figura 9.21). La elipse se traza en sentido contrario al de las agujas del reloj cuando θ varía de 0 a 2π . \square

Mediante la técnica del Ejemplo 3, podemos concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

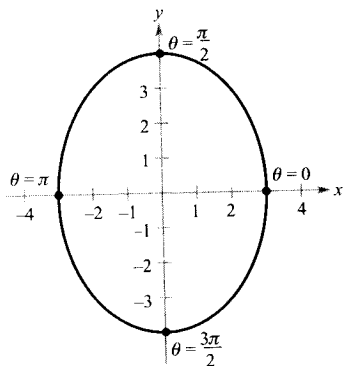
$$x = h + a \cos \theta \quad \text{e} \quad y = k + b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es la elipse (trazada en sentido antihorario)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a \sin \theta \quad \text{e} \quad y = k + b \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



Ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 4 \sin \theta$$

Ecuación rectangular:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

FIGURA 9.21

es también la elipse (trazada en sentido horario)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Si tiene acceso a una calculadora gráfica, intente usarla en modo paramétrico para dibujar varias elipses.

En los Ejemplos 2 y 3 es importante darse cuenta de que eliminar el parámetro supone sobre todo una *ayuda para el trazado de la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento. Se necesitan las ecuaciones paramétricas para poder determinar la *posición*, el *sentido* de movimiento y la *velocidad* en un instante dado.

Determinación de ecuaciones paramétricas

Los tres primeros ejemplos de esta sección ilustraban técnicas para el trazado de gráficas dadas mediante ecuaciones paramétricas. Nos ocuparemos ahora del problema inverso. ¿Cómo determinar ecuaciones paramétricas para una gráfica dada o una descripción física dada? Por el Ejemplo 1 sabemos que tal representación no es única. El siguiente ejemplo, en el que se hallan dos representaciones paramétricas diferentes de una misma gráfica, insiste en este punto.

EJEMPLO 4 Búsqueda de ecuaciones paramétricas de una gráfica dada

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas que representen la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los siguientes parámetros.

- a) $t = x$ b) La pendiente $m = \frac{dy}{dx}$ en el punto (x, y) .

Solución:

- a) Haciendo $x = t$ resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{e} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2$$

- b) Para expresar x e y en función del parámetro m , podemos proceder así:

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \quad \text{Derivar } y = 1 - x^2$$

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{Despejar } x$$

Esto proporciona una ecuación paramétrica para x . Con el fin de obtener otra para y , sustituimos x por $-m/2$ en la ecuación original.

$$y = 1 - x^2 \quad \text{Ecuación rectangular original}$$

$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \quad \text{Sustituir } x \text{ por } -m/2$$

$$y = 1 - \frac{m^2}{4} \quad \text{Simplificar}$$

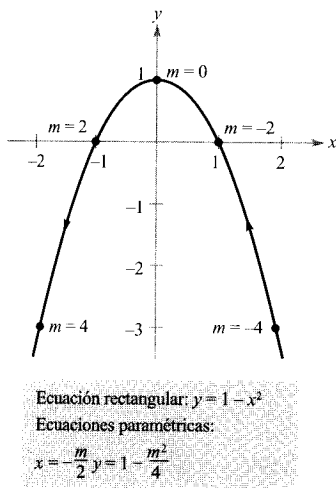


FIGURA 9.22

Así pues, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{e} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}$$

En la Figura 9.22 puede observarse que la curva resultante tiene una orientación de derecha a izquierda, determinada por los valores crecientes de la pendiente m . En la parte a), la curva tendría la orientación opuesta. \square



Para un uso eficiente de los programas gráficos, es importante adquirir destreza en la representación de gráficas mediante ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas calculadoras poseen sólo tres modos gráficos: 1) funciones, 2) ecuaciones paramétricas y 3) ecuaciones polares. Muchas de las calculadoras no están programadas para dibujar la gráfica de una ecuación general. Por ejemplo, supongamos que queremos dibujar la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacerlo en el modo de funciones, necesitamos dos ecuaciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En modo paramétrico, podemos representar la gráfica mediante las ecuaciones $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$.

EJEMPLO 5 Ecuaciones paramétricas de una cicloide

CICLOIDES

Galileo fue el primero en llamar la atención sobre la cicloide, al recomendar su uso para los arcos de los puentes. Pascal, en cierta ocasión, invirtió ocho días intentando resolver problemas relativos a las cicloides, tales como calcular el área bajo un arco o el volumen del sólido de revolución obtenido al hacerla girar en torno a una recta. La cicloide posee tantas propiedades interesantes y ha causado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado «la Helena de la Geometría» y «la manzana de la discordia».

Determinar la curva descrita por un punto P situado en la circunferencia de un círculo de radio a que rueda por una recta en el plano. Tal curva se denomina **cicloide**.

Solución: Denotemos por el parámetro θ la rotación del círculo y supongamos que el punto $P = (x, y)$ parte del origen. Cuando $\theta = 0$, P está en el origen. Cuando $\theta = \pi$, P está en un máximo: $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, P retorna al eje x , en $(2\pi a, 0)$. En la Figura 9.23, puede verse que $\angle APC = 180^\circ - \theta$. Por tanto,

$$\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta) = \sin (\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos \theta = -\cos (180^\circ - \theta) = -\cos (\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

de donde se sigue que

$$AP = -a \cos \theta \quad \text{y} \quad BD = a \sin \theta$$

Puesto que el círculo rueda por el eje x , sabemos que $OD = \widehat{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, tenemos que

$$x = OD - BD = a\theta - a \sin \theta$$

$$y = BA + AP = a - a \cos \theta$$

PARA MÁS INFORMACIÓN

sobre las cicloides véase el artículo «The Geometry of Rolling Curves», de John Bloom y Lee Whitt, en *The American Mathematical Monthly*, junio-julio 1981.

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas son

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \text{cos } \theta)$$

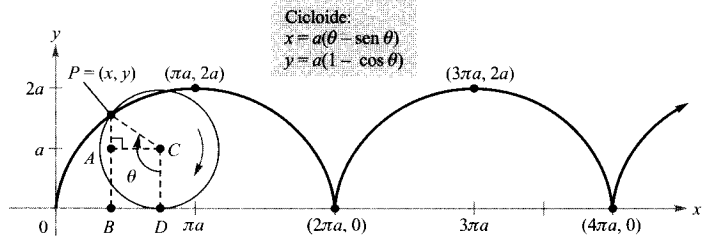



FIGURA 9.23 □

La cicloide de la Figura 9.23 presenta puntos angulosos en los valores $x = 2n\pi a$. Observemos que las derivadas $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$ son ambas nulas en los puntos con $\theta = 2n\pi$

 Algunas calculadoras gráficas permiten simular el movimiento de un objeto en el plano o el espacio. Si dispone de una de ellas, intente utilizarla para trazar la trayectoria de la cicloide mostrada en la Figura 9.23.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a(\theta - \text{sen } \theta) & y(\theta) &= a(1 - \text{cos } \theta) \\ x'(\theta) &= a - a \text{cos } \theta & y'(\theta) &= a \text{sen } \theta \\ x'(2n\pi) &= 0 & y'(2n\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

DEFINICIÓN DE CURVA SUAVE

Se dice que una curva C , representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ en un intervalo I , es **suave** si f' y g' son continuas en I y no se anulan simultáneamente, excepto posiblemente en los puntos terminales de I . Se dice que la curva C es **suave a trozos** si es suave en cada subintervalo de alguna partición de I .

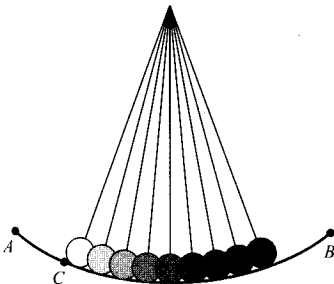


FIGURA 9.24

El tiempo que requiere para completar una oscilación un péndulo que parte del punto C es sólo aproximadamente el mismo que cuando parte de A.

Los problemas de la tautocrona y la braquistocrona

El tipo de curva descrito en el Ejemplo 5 está relacionado con dos de los problemas más famosos en la historia del Cálculo. El primero, el **problema de la tautocrona**, surgió con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para completar una oscilación de un péndulo es *aproximadamente* el mismo si efectúa un movimiento largo a velocidades altas o uno corto a velocidades más bajas (Figura 9.24). En una época tardía de su vida, Galileo (1564-1642) se dio cuenta de que podía utilizar este principio para construir un reloj. Sin embargo, no fue capaz de dominar la mecánica de su construcción real. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo capaz de funcionar. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que éstos

no invierten *exactamente* el mismo tiempo en completar oscilaciones de longitudes variables. (Esto no afecta a un reloj de péndulo, ya que la longitud del arco circular se mantiene constante dando al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por el punto más bajo.) Al estudiar el problema, Huygens descubrió que una bola rodando adelante y atrás por una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.



JAMES BERNOULLI (1654-1705)

James (o Jacques) Bernoulli, el hermano mayor de John, fue uno más de los varios matemáticos de primera fila de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le hicieron ocupar un lugar prominente en el desarrollo inicial del Cálculo.

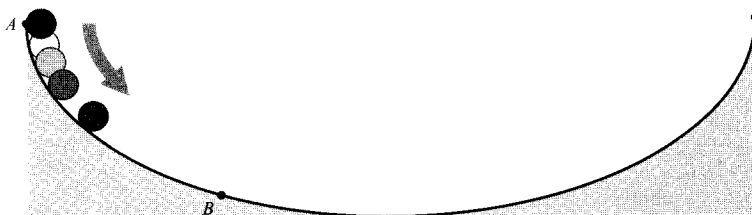


FIGURA 9.25

Una cicloide invertida es la trayectoria por la cual una bola desciende en el tiempo más corto.

El segundo problema, planteado por John Bernoulli en 1696, es el **problema de la braquistocrona** (en griego, *braquis* = corto y *cronos* = tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula deslizará desde un punto *A* hasta otro *B* en el *tiempo más corto*. Varios matemáticos aceptaron el reto y, el año siguiente, Newton, Leibniz, L'Hôpital, John Bernoulli y James Bernoulli resolvieron el problema. La solución no resulta ser una línea recta desde *A* hasta *B*, sino una cicloide invertida que pasa por *A* y *B*, como ilustra la Figura 9.25. Lo más chocante de la solución es que una partícula que parte del reposo en *cualquier* otro punto *C* entre *A* y *B* (Figura 9.26) tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a *B*.

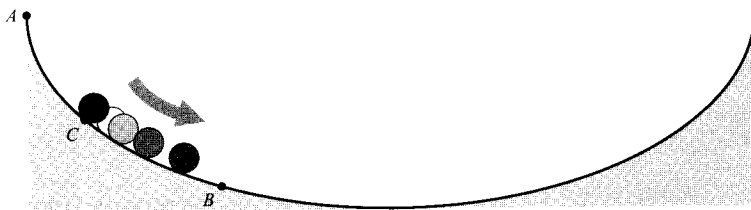


FIGURA 9.26

Una bola que parte de *C* tarda el mismo tiempo en llegar a *B* que una que parte de *A*.

PARA MÁS INFORMACIÓN Una demostración del famoso problema de la braquistocrona puede verse en el artículo «A New Minimization Proof for the Brachistochrone», de Gary Lawlor, en *The American Mathematical Monthly*, marzo 1996.

32. **Conjetura**

- a) Utilizando una calculadora, dibujar las curvas representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos t & x &= 4 \cos (-t) \\ y &= 3 \sin t & y &= 3 \sin (-t) \end{aligned}$$

- b) Describir cómo varía la gráfica cuando se cambia el signo del parámetro.
 c) Formular una conjetura acerca de la variación de la gráfica de unas ecuaciones paramétricas cuando se cambia el signo del parámetro.
 d) Comprobar la conjetura con otras ecuaciones paramétricas.

33. **Redacción** Revisar los Ejercicios 28-32 y describir en unas líneas cómo pueden ser diferentes las gráficas de curvas representadas por distintas ecuaciones paramétricas, incluso si al eliminar el parámetro en cada conjunto resulta la misma ecuación rectangular.

En los Ejercicios 34-37, eliminar el parámetro y obtener la forma canónica de la ecuación rectangular.

34. Recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

35. Círculo: $x = h + r \cos \theta, y = k + r \sin \theta$

36. Elipse: $x = h + a \cos \theta$
 $y = k + b \sin \theta$

37. Hipérbola: $x = h + a \sec \theta$
 $y = k + b \operatorname{tg} \theta$

En los Ejercicios 38-45, usar los resultados de los Ejercicios 34-37 para encontrar unas ecuaciones paramétricas de la recta o cónica.

38. Recta: Pasa por $(0, 0)$ y $(5, -2)$
 39. Recta: Pasa por $(1, 4)$ y $(5, -2)$
 40. Círculo: Centro $(2, 1)$; Radio: 4
 41. Círculo: Centro: $(-3, 1)$; Radio: 3
 42. Elipse: Vértices: $(\pm 5, 0)$; Focos: $(\pm 4, 0)$
 43. Elipse: Vértices: $(4, 7), (4, -3)$; Focos: $(4, 5), (4, -1)$
 44. Hipérbola: Vértices: $(\pm 4, 0)$; Focos: $(\pm 5, 0)$
 45. Hipérbola: Vértices: $(0, \pm 1)$; Focos: $(0, \pm 2)$

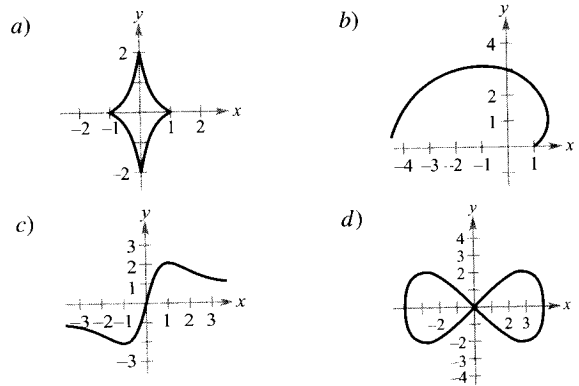
En los Ejercicios 46-49, hallar dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular dada.

46. $y = 3x - 2$ 47. $y = \frac{1}{x}$
 48. $y = x^3$ 49. $y = x^2$

En los Ejercicios 50-57, utilizar una calculadora para dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas. Indicar el sentido de recorrido de la curva. Identificar todos los puntos en los que la curva no es suave.

50. Cicloide: $x = 2(\theta - \sin \theta), y = 2(1 - \cos \theta)$
 51. Cicloide: $x = \theta + \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$
 52. Cicloide prolata: $x = \theta - \frac{3}{2} \sin \theta, y = 1 - \frac{3}{2} \cos \theta$
 53. Cicloide prolata: $x = 2\theta - 4 \sin \theta, y = 2 - 4 \cos \theta$
 54. Hipocicloide: $x = 3 \cos^3 \theta, y = 3 \sin^3 \theta$
 55. Cicloide corta: $x = 2\theta - \sin \theta, y = 2 - \cos \theta$
 56. Hechicera de Agnesi: $x = 2 \operatorname{ctg} \theta, y = 2 \sin^2 \theta$
 57. Folio de Descartes: $x = 3t/(1 + t^3), y = 3t^2/(1 + t^3)$

En los Ejercicios 58-61, asociar cada conjunto de ecuaciones paramétricas con su gráfica.



58. Curvas de Lissajous: $x = 4 \cos \theta, y = 2 \sin 2\theta$
 59. Evoluta de la elipse: $x = \cos^3 \theta, y = 2 \sin^3 \theta$
 60. Involuta del círculo: $x = \cos \theta + \theta \sin \theta,$
 $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$
 61. Serpentina: $x = \operatorname{ctg} \theta, y = 4 \sin \theta \cos \theta$

62. **Cicloide corta** Un disco de radio a rueda sin deslizar a lo largo de una recta. La curva descrita por un punto P situado a b unidades del centro ($b < a$) se denomina **cicloide corta** (véase figura). Usando el ángulo θ como parámetro, encontrar ecuaciones paramétricas para esta curva.

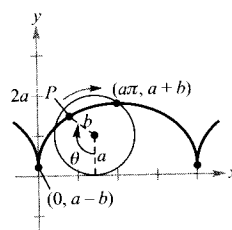


FIGURA E.63

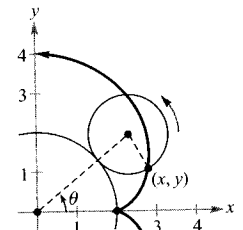


FIGURA E.64

63. **Epicicloide** Un círculo de radio 1 rueda sin deslizar alrededor de otro círculo de radio 2. La curva descrita por un punto de la circunferencia del círculo más pequeño se llama **epicicloide** (véase Figura E.63). Usando como parámetro el ángulo θ , encontrar ecuaciones paramétricas para esta curva.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 64-67, determinar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

64. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2 + 1$ y $x = 3t$, $y = 9t^2 + 1$ corresponden a una misma ecuación rectangular.
65. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ e $y = t^2$ es la recta $y = x$.
66. Si y es función de t y x es función de t , entonces y es función de x .
67. Si $f(t_1) = 0$ y $g(t_2) = 0$, entonces la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ pasa por el origen.

Movimiento de un proyectil En el Ejercicio 68, se considera un proyectil lanzado desde una altura de h pies sobre el suelo, formando un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial es v_0 pies por segundo, la trayectoria del proyectil puede describirse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad \text{e} \quad y = h + (v_0 \sin \theta)t - 16t^2$$

68. La trayectoria de un proyectil admite la ecuación rectangular

$$y = 5 + x - 0,005x^2$$

- a) Eliminar el parámetro t de la función de posición para el movimiento del proyectil y comprobar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\text{tg } \theta)x + h$$

- b) Usar el resultado del apartado a) para determinar h , v_0 y θ . Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.
- c) Representar con una calculadora la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil. Confirmar la respuesta del apartado b) dibujando la curva representada por las ecuaciones paramétricas.
- d) Con ayuda de una calculadora, estimar la altura máxima y el alcance del proyectil.

69. Consideremos la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Dibujar esta curva en el plano xy . Usar la gráfica para probar que $(t^2 - 1)^2 + (2t)^2 = (t^2 + 1)^2$. Ilustrar la fórmula con $t = 2$ y $t = 3$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

En griego, *cicloide* = *rueda*, *hipocicloide* = *bajo la rueda* y *epicicloide* = *sobre la rueda*. Asignar las gráficas adecuadas a la hipocicloide y la epicicloide.

Hipocicloide $H(A, B)$

Trayectoria descrita por un punto fijo de un círculo de radio B que rueda por el *interior* de un círculo de radio A .

$$x = (A - B) \cos t + B \cos \left(\frac{A - B}{B} t \right)$$

$$y = (A - B) \sin t - B \sin \left(\frac{A - B}{B} t \right)$$

Epicicloide $E(A, B)$

Trayectoria descrita por un punto fijo de un círculo de radio B que rueda por el *exterior* de un círculo de radio A .

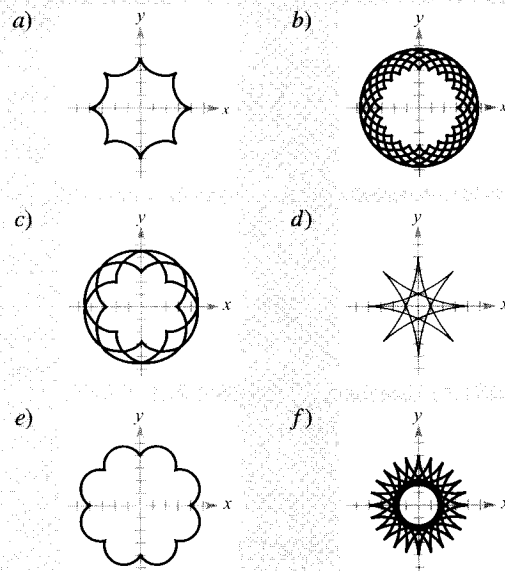
$$x = (A + B) \cos t - B \cos \left(\frac{A + B}{B} t \right)$$

$$y = (A + B) \sin t - B \sin \left(\frac{A + B}{B} t \right)$$

I. $H(8, 3)$ II. $E(8, 3)$

III. $H(8, 7)$ IV. $E(24, 3)$

V. $H(24, 7)$ VI. $E(24, 7)$



Ejercicios basados en «Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids», de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, *College Mathematics Journal*, noviembre 1984, pág. 441. Utilizados con permiso de los autores.

9.3

Ecuaciones paramétricas y Cálculo

- CONTENIDO ■
- Pendiente y rectas tangentes
 - Longitud de arco
 - Área de una superficie de revolución

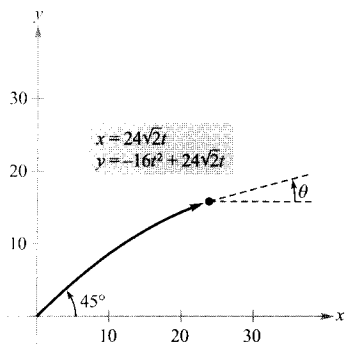


FIGURA 9.27

En el instante t , el ángulo de elevación del proyectil es θ , la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Pendiente y rectas tangentes

Ahora que sabemos representar una gráfica en el plano mediante ecuaciones paramétricas, es natural preguntarnos cómo aplicar el Cálculo al estudio de curvas planas. Para empezar, fijémonos de nuevo en el proyectil representado por las ecuaciones paramétricas

$$x = 24\sqrt{2}t \quad \text{e} \quad y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$$

que muestra la Figura 9.27. Por lo visto en la Sección 9.2, estas ecuaciones nos permiten localizar la posición del proyectil en un instante dado. También sabemos que el objeto se ha lanzado con un ángulo inicial de 45° . Pero, ¿cómo podemos hallar el ángulo θ que determina la dirección del objeto en cualquier otro instante t ? El siguiente teorema responde esta pregunta proporcionando una fórmula de la pendiente de la recta tangente en función de t .

TEOREMA 9.7 FORMA PARAMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si una curva suave C viene dada por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, la pendiente de C en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Demostración: En la Figura 9.28, consideremos $\Delta t > 0$ y sean:

$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t) \quad \text{y} \quad \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Como $\Delta x \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{f(t + \Delta t) - f(t)} \end{aligned}$$

Dividiendo el numerador y el denominador por Δt , podemos usar la derivabilidad de f y g para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t}{[f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{g'(t)}{f'(t)} \\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \end{aligned}$$

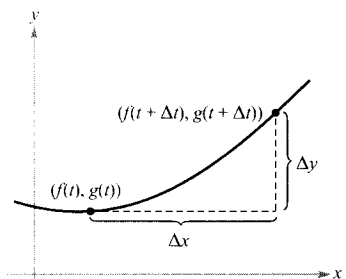


FIGURA 9.28

La pendiente de la recta secante por los puntos $(f(t), g(t))$ y $(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ es $\Delta y/\Delta x$.

EJEMPLO 1 Derivación en forma paramétrica

ADVERTENCIA La curva del Ejemplo 1 es una circunferencia. Usando la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$$

hallar su pendiente en los puntos (1, 0) y (0, 1).

Hallar dy/dx para la curva dada por $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{cos} t$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t} = -\operatorname{tg} t \quad \square$$

Dado que dy/dx es función de t , podemos aplicar el Teorema 9.7 reiteradamente para calcular derivadas de orden superior. Por ejemplo,

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right] \frac{dt}{dx}$	Segunda derivada
$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right] \frac{dt}{dx}$	Tercera derivada

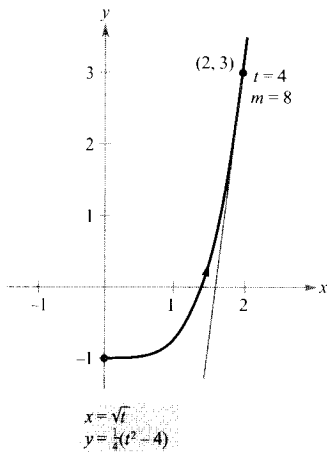


FIGURA 9.29

La gráfica es cóncava hacia arriba en (2, 3), cuando $t = 4$.

EJEMPLO 2 Determinación de la pendiente y la concavidad

Dada la curva de ecuaciones

$$x = \sqrt{t} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}(t^2 - 4), \quad t \geq 0$$

hallar su pendiente y su concavidad en el punto (2, 3).

Solución: Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1/2)t}{(1/2)t^{-1/2}} = t^{3/2}$$

la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} [dy/dx]}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt} [t^{3/2}]}{(1/2)t^{-1/2}} = \frac{(3/2)t^{1/2}}{(1/2)t^{-1/2}} = 3t$$

En $(x, y) = (2, 3)$, se tiene $t = 4$, y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{3/2} = 8$$

Además, cuando $t = 4$, la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(4) = 12 > 0$$

luego la gráfica es cóncava hacia arriba en (2, 3), como corrobora la Figura 9.29. \square

Puesto que las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no definen necesariamente y como función de x , una curva plana puede cortarse a sí misma. En tales puntos, la curva puede tener más de una recta tangente, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Una curva con dos tangentes en un punto

La cicloide larga de ecuaciones

$$x = 2t - \pi \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad y = 2 - \pi \cos t$$

se corta a sí misma en el punto $(0, 2)$ (Figura 9.30). Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes en ese punto.

Solución: Puesto que $x = 0$ e $y = 2$ en $t = \pm\pi/2$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\pi \operatorname{sen} t}{2 - \pi \cos t}$$

tenemos que $dy/dx = -\pi/2$ en $t = -\pi/2$ y $dy/dx = \pi/2$ en $t = \pi/2$. Por tanto, las dos rectas tangentes en $(0, 2)$ son

$$y - 2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)x \quad \text{Recta tangente en } t = -\frac{\pi}{2}$$

$$y - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)x \quad \text{Recta tangente en } t = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

Si $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$ en $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ posee una tangente *horizontal* en $(f(t_0), g(t_0))$. Así, en el Ejemplo 3, la curva tiene una tangente horizontal en el punto $(0, 2 - \pi)$ (cuando $t = 0$). Análogamente, si $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$ en $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ tiene una tangente *vertical* en $(f(t_0), g(t_0))$.

Longitud de arco

Hemos visto cómo utilizar las ecuaciones paramétricas para describir la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. Desarrollaremos ahora una fórmula para calcular la *distancia* recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria.

Recordemos de la Sección 6.4 que la fórmula para la longitud de arco de una curva dada por $y = h(x)$ sobre el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

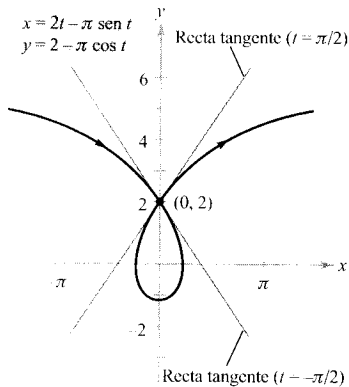


FIGURA 9.30

La cicloide larga tiene dos rectas tangentes en el punto $(0, 2)$.

Si C viene representada por las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, y si $dx/dt = f'(t) > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

TEOREMA 9.8 LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no tiene autointersecciones en el intervalo $a \leq t \leq b$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo viene dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

| Nota. Al aplicar la fórmula de la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorre sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la circunferencia dada por $x = \cos t$, $y = \sin t$ se recorre una vez en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, pero dos veces en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$.

En la sección precedente vimos que si un círculo rueda a lo largo de una recta, cada punto de su circunferencia describe una trayectoria denominada cicloide. Si el círculo rueda alrededor de otro, la trayectoria del punto se llama **epicicloide**. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular la longitud de arco de una epicicloide.

EJEMPLO 4 Cálculo de una longitud de arco

ARCO DE UNA CICLOIDE

La longitud de un arco de cicloide fue calculada por primera vez en 1658 por el arquitecto y matemático británico Christopher Wren, famoso por reconstruir un gran número de edificios e iglesias en Londres, incluida la Catedral de San Pablo.

Un círculo de radio 1 rueda alrededor de otro mayor, de radio 4 (Figura 9.31). La epicicloide descrita por un punto de la circunferencia del círculo más pequeño viene dada por

$$x = 5 \cos t - \cos 5t \quad e \quad y = 5 \sin t - \sin 5t$$

Hallar la distancia recorrida por el punto en una vuelta completa alrededor del círculo mayor.

Solución: Antes de aplicar el Teorema 9.8, observemos (Figura 9.31) que la curva tiene puntos angulosos cuando $t = 0$ o $t = \pi/2$. Entre estos puntos, dx/dt y

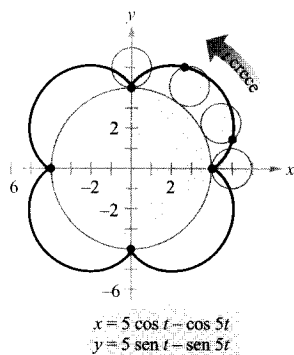


FIGURA 9.31

Cada punto del círculo pequeño describe una epicloide cuando éste rueda alrededor del círculo grande.

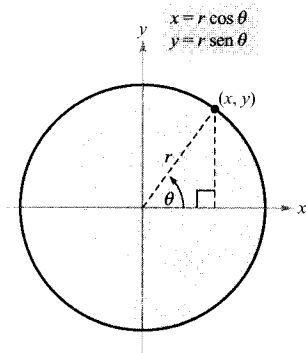
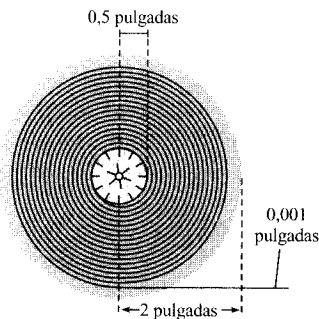


FIGURA 9.32

Se necesitan unos 982 pies de cinta para llenar el carrete.

dy/dt no se anulan simultáneamente. Así pues, la porción de curva de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, podemos calcular la longitud de arco de la porción de curva del primer cuadrante y multiplicarla por 4.

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5 \operatorname{sen} t + 5 \operatorname{sen} 5t)^2 + (5 \cos t - 5 \cos 5t)^2} dt \\
 &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 5t - 2 \cos t \cos 5t} dt \\
 &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \cos 4t} dt \\
 &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 2t} dt \\
 &= 40 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t dt \\
 &= -20 \left[\cos 2t \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

Para la epicloide de la Figura 9.31, parece correcta una longitud de arco de 40, ya que la circunferencia de un círculo de radio 6 es $2\pi r = 12\pi \approx 37.7$. \square

EJEMPLO 5 Longitud de una cinta magnetofónica

Una cinta magnetofónica de 0,001 pulgadas de grosor se enrolla en un carrete cuyos radios interior y exterior son de 0,5 y 2 pulgadas, respectivamente. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar el carrete?

Solución: Para construir un modelo de este problema, supongamos que al enrollar la cinta, su distancia r al centro crece linealmente a razón de 0,001 por vuelta, esto es,

$$r = (0,001) \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2.000\pi}, \quad 1.000\pi \leq \theta \leq 4.000\pi$$

donde θ se mide en radianes. Podemos determinar las coordenadas del punto (x, y) correspondiente a un radio dado, que son

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Sustituyendo r obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(\frac{\theta}{2.000\pi} \right) \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{\theta}{2.000\pi} \right) \operatorname{sen} \theta$$

Aplicando la fórmula de la longitud de arco, se obtiene que la longitud total de cinta es

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2.000\pi} \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{(-\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 + (\theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2.000\pi} \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \quad \text{Tablas de integración (apéndice), fórmula 26} \\
 &= \frac{1}{2.000\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln |\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}| \right]_{1.000\pi}^{4.000\pi} \\
 &\approx 11.781 \text{ pulgadas} \approx 982 \text{ pies}
 \end{aligned}$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre las matemáticas de una cinta magnetofónica puede consultarse el artículo «Tape Counters», de Richard L. Roth, en *The American Mathematical Monthly*, agosto-septiembre 1992. \square

Nota. La gráfica de $r = a\theta$ se llama **espiral de Arquímedes**. La gráfica de $r = \theta/2.000\pi$ (Ejemplo 5) es de este tipo.

Puede estimarse la longitud de la cinta del Ejemplo 5 sumando las longitudes de piezas circulares de cinta. La más pequeña tendría radio 0,501 y la más grande, 2.

$$\begin{aligned}
 s &\approx 2\pi(0,501) + 2\pi(0,502) + 2\pi(0,503) + \cdots + 2\pi(2,000) \\
 &= \sum_{i=1}^{1.500} 2\pi(0,5 + 0,001i) \\
 &= 2\pi[1.500(0,5) + 0,001(1.500)(1.501)/2] \\
 &\approx 11.786 \text{ pulgadas}
 \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

Utilizando la fórmula del área de una superficie de revolución en forma rectangular es posible encontrar una fórmula del área de la superficie en forma paramétrica.

ADVERTENCIA Es fácil recordar estas fórmulas si se piensa en la diferencial de la longitud de arco como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

De ese modo las fórmulas se escriben

$$\begin{aligned}
 1. \quad S &= 2\pi \int_a^b g(t) ds \\
 2. \quad S &= 2\pi \int_a^b f(t) ds
 \end{aligned}$$

TEOREMA 9.9 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no tiene autointersecciones en el intervalo $a \leq t \leq b$, el área S de la superficie de revolución obtenida por rotación de C en torno a un eje de coordenadas viene dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 1. \quad S &= 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{Revolución en torno al eje } x: g(t) \geq 0 \\
 2. \quad S &= 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{Revolución en torno al eje } y: f(t) \geq 0
 \end{aligned}$$

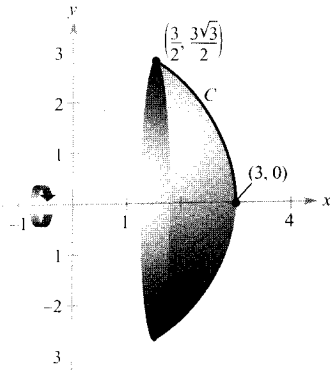


FIGURA 9.33

El área de esta superficie de revolución es 9π .

EJEMPLO 6 Determinación del área de una superficie de revolución

Sea C el arco de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9$$

de $(3, 0)$ a $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$, mostrado en la Figura 9.33. Hallar el área de la superficie generada por revolución de C alrededor del eje x .

Solución: Podemos representar C mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 \cos t \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

(Se puede determinar el intervalo de valores de t observando que $t = 0$ corresponde a $x = 3$ y $t = \pi/3$ corresponde a $x = 3/2$.) En este intervalo C es suave y no negativa, por lo que podemos aplicar el Teorema 9.9 para obtener el área.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (3 \sin t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/3} \sin t \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/3} 3 \sin t dt \\ &= -18\pi \left[\cos t \right]_0^{\pi/3} \\ &= -18\pi \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 9.3

En los Ejercicios 1-10, determinar dy/dx y d^2y/dx^2 y evaluar cada una de ellas en el valor indicado del parámetro.

Ecuaciones paramétricas

- $x = 2t, y = 3t - 1$
- $x = \sqrt{t}, y = 3t - 1$
- $x = t + 1, y = t^2 + 3t$
- $x = t^2 + 3t, y = t + 1$
- $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$
- $x = \cos \theta, y = 3 \sin \theta$
- $x = 2 + \sec \theta, y = 1 + 2 \operatorname{tg} \theta$
- $x = \sqrt{t}, y = \sqrt{t-1}$
- $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$
- $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$

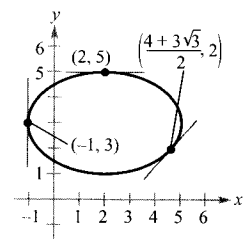
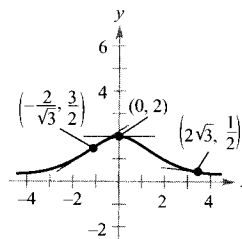
Punto

- $t = 3$
- $t = 1$
- $t = -1$
- $t = 0$
- $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $\theta = 0$
- $\theta = \frac{\pi}{6}$
- $t = 2$
- $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $\theta = \pi$

En los Ejercicios 11 y 12, encontrar una ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos indicados de la curva.

11. $x = 2 \operatorname{ctg} \theta$
 $y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

12. $x = 2 - 3 \cos \theta$
 $y = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$



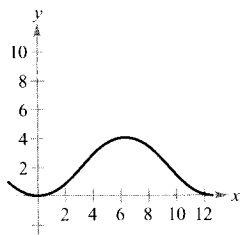
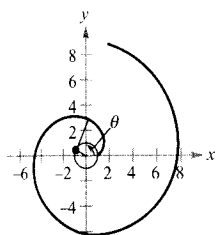
En los Ejercicios 13-16, a) dibujar la curva definida por las ecuaciones paramétricas con ayuda de una calculadora, b) utilizar la calculadora para hallar dx/dt , dy/dt y dy/dx en

el valor del parámetro que se especifica, c) encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor indicado del parámetro, y d) confirmar el resultado de c) representando la recta tangente en la calculadora.

<u>Ecuaciones paramétricas</u>	<u>Parámetro</u>
13. $x = 2t, y = t^2 - 1$	$t = 2$
14. $x = t - 1, y = \frac{1}{t} + 1$	$t = 1$
15. $x = t^2 - t + 2, y = t^3 - 3t$	$t = -1$
16. $x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta$	$\theta = \frac{3\pi}{4}$

En los Ejercicios 17 y 18, hallar todos los puntos de tangencia vertical u horizontal (si existe alguno) a la porción de curva mostrada.

17. Involuta de un círculo: $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$
 $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$
18. $x = 2\theta$
 $y = 2(1 - \cos \theta)$



En los Ejercicios 19-28, hallar todos los puntos de tangencia vertical u horizontal (si existe alguno) a la curva. Representar la curva en una calculadora y verificar los resultados.

19. $x = 1 - t, y = t^2$
20. $x = t + 1, y = t^2 + 3t$
21. $x = 1 - t, y = t^3 - 3t$
22. $x = t^2 - t + 2, y = t^3 - 3t$
23. $x = 3 \cos \theta, y = 3 \sin \theta$
24. $x = \cos \theta, y = 2 \sin 2\theta$
25. $x = 4 + 2 \cos \theta$
 $y = -1 + \sin \theta$
26. $x = 4 \cos^2 \theta$
 $y = 2 \sin \theta$
27. $x = \sec \theta, y = \tan \theta$
28. $x = \cos^2 \theta, y = \cos \theta$

29. **Para pensar** Esbozar la gráfica de una curva de ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$ tales que $dx/dt > 0$ y $dy/dt < 0$ para todo número real t .
30. **Para pensar** Esbozar la gráfica de una curva de ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$ tales que $dx/dt < 0$ y $dy/dt < 0$ para todo número real t .

Longitud de arco En los Ejercicios 31-36, calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo indicado.

<u>Ecuaciones paramétricas</u>	<u>Intervalo</u>
31. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$	$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
32. $x = t^2, y = 4t^3 - 1$	$-1 \leq t \leq 1$
33. $x = t^2, y = 2t$	$0 \leq t \leq 2$
34. $x = \arcsen t, y = \ln \sqrt{1 - t^2}$	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$
35. $x = \sqrt{t}, y = 3t - 1$	$0 \leq t \leq 1$
36. $x = t, y = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6t^3}$	$1 \leq t \leq 2$

Longitud de arco En los Ejercicios 37-40, calcular la longitud de arco de la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.

37. Hipocicloide: $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$
38. Circunferencia: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$
39. Arco de cicloide: $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$
40. Involuta de circunferencia: $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$
 $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$

41. **Trayectoria de un proyectil** Las siguientes ecuaciones paramétricas proporcionan un modelo para la trayectoria de un proyectil.

$$x = (90 \cos 30^\circ)t \quad e \quad y = (90 \sin 30^\circ)t - 16t^2$$

donde x y y se miden en pies. Usando una calculadora, efectuar lo siguiente.

- Representar gráficamente la trayectoria del proyectil.
- Estimar el alcance del proyectil.
- Con un programa de integración, estimar la longitud de arco de la trayectoria. Comparar el resultado con el alcance del proyectil.

42. **Perímetro de una elipse** Utilizando un programa de integración, estimar el perímetro de la elipse dada por las ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos \theta$ e $y = 4 \sin \theta$.

43. Redacción

- a) Con ayuda de una calculadora, representar gráficamente los siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= t - \operatorname{sen} t & x &= 2t - \operatorname{sen}(2t) \\ y &= 1 - \cos t & y &= 1 - \cos(2t) \\ 0 &\leq t \leq 2\pi & 0 &\leq t \leq \pi \end{aligned}$$

- b) Comparar las dos gráficas del apartado a). Si la curva representa el movimiento de una partícula y t el tiempo, ¿qué se puede inferir acerca de la velocidad media de la partícula en las trayectorias representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas?
- c) Sin dibujar la curva, determinar el tiempo requerido por una partícula para recorrer la misma trayectoria que en los apartados a) y b) si esta última está descrita por

$$x = \frac{1}{2}t - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \text{e} \quad y = 1 - \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

44. Folium de Descartes

Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4t}{1+t^3} \quad \text{e} \quad y = \frac{4t^2}{1+t^3}$$

usar una calculadora para llevar a cabo lo siguiente.

- a) Dibujar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.
- b) Hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.
- c) Utilizando un programa de integración, estimar la longitud de arco del lazo cerrado. (Ayuda: Usar la simetría e integrar sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$.)

Área de una superficie En los Ejercicios 45-50, calcular el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje indicado.

45. $x = t, y = 2t, 0 \leq t \leq 4$, a) eje x b) eje y
46. $x = t, y = 4 - 2t, 0 \leq t \leq 2$, a) eje x b) eje y
47. $x = 4 \cos \theta, y = 4 \operatorname{sen} \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, eje y
48. $x = t^3, y = t + 2, 1 \leq t \leq 2$, eje y
49. $x = a \cos^3 \theta, y = a \operatorname{sen}^3 \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, eje x
50. $x = a \cos \theta, y = b \operatorname{sen} \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, a) eje x
b) eje y
51. **Área de una superficie** Se suprime una porción de una esfera de radio r cortando un cono circular con vértice en el centro de la esfera. Hallar el área sustraída de la esfera si el ángulo del cono en el vértice es 2θ .

52. Utilizando integración por sustitución, demostrar que si y es una función continua de x en el intervalo $a \leq x \leq b$, donde $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces

$$\int_a^b y \, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t) \, dt$$

donde $f(t_1) = a, f(t_2) = b$ y g y f' son ambas continuas en $[t_1, t_2]$.

Centroide En los Ejercicios 53 y 54, determinar el centroide de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones paramétricas y los ejes de coordenadas. (Aplicar el resultado del Ejercicio 52.)

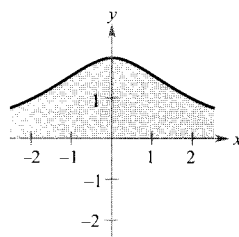
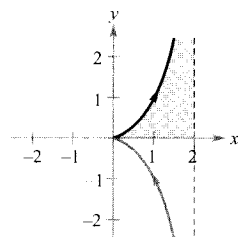
53. $x = \sqrt{t}, y = 4 - t$ 54. $x = \sqrt{4 - t}, y = \sqrt{t}$

Volumen En los Ejercicios 55 y 56, hallar el volumen del sólido obtenido por revolución de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones en torno al eje x . (Aplicar el resultado del ejercicio 52.)

55. $x = 3 \cos \theta, y = 3 \operatorname{sen} \theta$ 56. $x = \cos \theta, y = 3 \operatorname{sen} \theta$

Área En los Ejercicios 57 y 58, hallar el área de la región. (Aplicar el resultado del Ejercicio 52.)

57. $x = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$ 58. $x = 2 \operatorname{ctg} \theta$
 $y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{tg} \theta$ $y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$
 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ $0 < \theta < \pi$



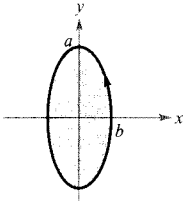
Áreas de curvas cerradas simples En los Ejercicios 59-64, usar un programa de integración simbólica y el resultado del Ejercicio 52, para asignar a cada curva cerrada su área. (Estos ejercicios se han adaptado del artículo «The Surveyor's Area Formula» de Bart Braden, publicado en *College Mathematics Journal*, septiembre de 1986, con permiso del autor.)

- a) $\frac{8}{3} ab$ b) $\frac{3}{8} \pi a^2$ c) $2\pi a^2$
d) πab e) $2\pi ab$ f) $6\pi a^2$

59. Elipse: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = b \cos t$$

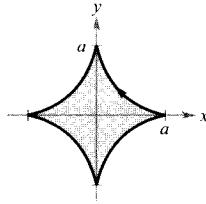
$$y = a \sin t$$



60. Astroide: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = a \cos^3 t$$

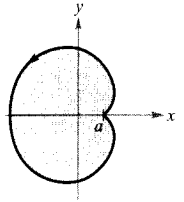
$$y = a \sin^3 t$$



61. Cardoide: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t$$

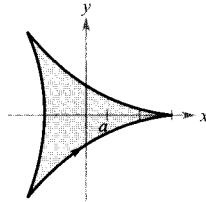
$$y = 2a \sin t - a \sin 2t$$



62. Delta: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = 2a \cos t + a \cos 2t$$

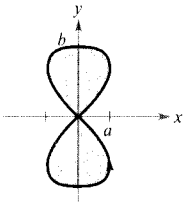
$$y = 2a \sin t + a \sin 2t$$



63. Lemniscata: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = a \sin 2t$$

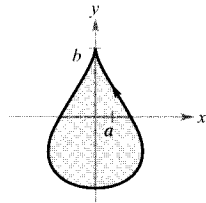
$$y = b \sin t$$



64. Lágrima: (
- $0 \leq t \leq 2\pi$
-)

$$x = 2a \cos t - a \sin 2t$$

$$y = b \sin t$$



- ~ 65. Utilizando una calculadora, dibujar la curva dada por

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad -20 \leq t \leq 20$$

- a) Describir la gráfica y confirmar analíticamente el resultado.
 b) Discutir la velocidad a la que se recorre la curva cuando se incrementa t de -20 a 20 .

- ~ 66. **Tractriz** Una persona camina desde el origen a lo largo del semieje y positivo arrastrando un peso sujeto al extremo de una cuerda de 12 metros. Inicialmente, el peso está situado en el punto $(12, 0)$.

- a) En el Ejercicio 67 de la Sección 7.4, se demostró que la trayectoria del peso admite como modelo la ecuación rectangular

$$y = -12 \ln \left(\frac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{144 - x^2}$$

donde $0 < x \leq 12$. Usando una calculadora, representar gráficamente la ecuación rectangular.

- b) Representar gráficamente con una calculadora las ecuaciones paramétricas

$$x = 12 \operatorname{sh} \frac{t}{12} \quad \text{e} \quad y = t - 12 \operatorname{th} \frac{t}{12}$$

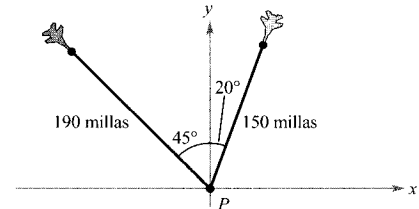
donde $t \geq 0$. ¿Cómo está relacionada esta gráfica con la del apartado a)? ¿Qué gráfica piensa que representa mejor la trayectoria?

- c) Utilizar las ecuaciones paramétricas de la tractriz para comprobar que la distancia de la y -intersección de la recta tangente al punto de tangencia es independiente de la localización de dicho punto.



67. **Control del tráfico aéreo** Un controlador detecta dos aviones volando uno hacia el otro a la misma altitud (véase figura). Sus trayectorias de vuelo son S 20° O y S 45° E. Uno de los aviones se encuentra a 150 millas del punto P y lleva una velocidad de 375 millas por hora. El otro está a 190 millas de P con una velocidad de 450 millas por hora.

- a) Encontrar ecuaciones paramétricas de la trayectoria de cada avión en las que t sea el tiempo en horas y $t = 0$ represente el instante en que el controlador aéreo detecta los aviones.
 b) Usar el resultado del apartado a) para expresar la distancia entre los aviones en función de t .
 c) Dibujar la función del apartado b) en una calculadora. ¿Cuándo será mínima la distancia entre los aviones? Si los aviones deben mantener una separación de al menos 3 millas, ¿se cumple el requisito?



68. Sean $x = g(t)$ e $y = f(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva plana C . Interpretar el teorema del valor medio generalizado en este caso.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69 y 70, determinar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

69. Si $x = f(t)$ e $y = g(t)$, entonces $d^2y/dx^2 = g''(t)/f''(t)$.

70. La curva dada por $x = t^3$, $y = t^2$ tiene tangente horizontal en el origen porque $dy/dt = 0$ en $t = 0$.



9.4

Coordenadas polares y gráficas en polares

- CONTENIDO
- Coordenadas polares
- Cambio de coordenadas
- Gráficas en polares
- Pendiente y rectas tangentes
- Gráficas en polares especiales

Coordenadas polares

Hasta ahora, hemos representado las gráficas como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones de estas gráficas se han dado en forma rectangular o paramétrica. En esta sección, introduciremos un sistema de coordenadas denominado **sistema de coordenadas polares**.

Para construir el sistema de coordenadas polares en el plano, fijamos un punto O , llamado el **polo** (o el **origen**), y trazamos desde O un rayo inicial llamado el **eje polar** (Figura 9.34). Entonces, se puede asignar a cada punto en el plano unas **coordenadas polares** (r, θ) , como sigue.

$r =$ distancia dirigida de O a P

$\theta =$ ángulo dirigido, en sentido antihorario, del eje polar al segmento \overline{OP}

La Figura 9.35 muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Observemos que, en este sistema, es conveniente localizar los puntos respecto a un retículo de circunferencias concéntricas y **rectas radiales** que pasan por el polo.

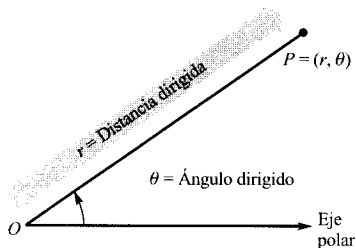


FIGURA 9.34
Coordenadas polares.

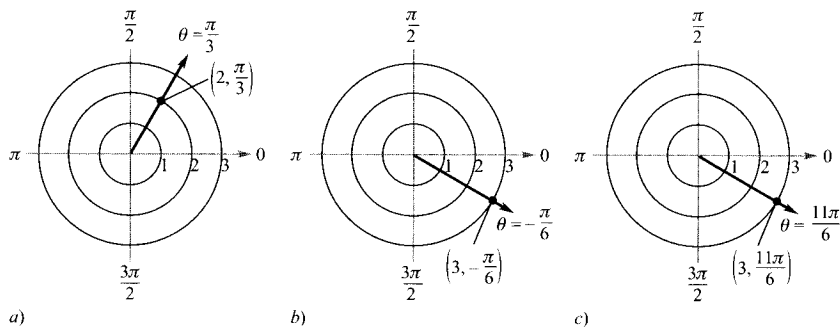


FIGURA 9.35

COORDENADAS POLARES

El matemático a quien se atribuyó el haber empleado por primera vez las coordenadas polares fue James Bernoulli, que las introdujo en 1691. No obstante, existe cierta evidencia de que Isaac Newton pudo haberlas utilizado con anterioridad.

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no ocurre en coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r, θ) y $(r, 2\pi + \theta)$ representan un mismo punto [véase b) y c) en la Figura 9.35]. Asimismo, como r es una distancia dirigida, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan un mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede expresarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$

o como

$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

siendo n un entero arbitrario. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

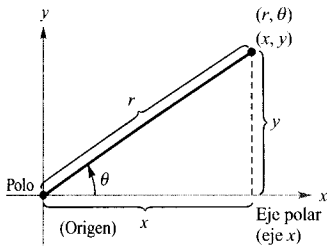


FIGURA 9.36

Relación entre coordenadas polares y rectangulares.

Cambio de coordenadas

Para establecer la relación entre las coordenadas polares y las rectangulares, hagamos coincidir el eje polar con el semieje x positivo y el polo con el origen, según muestra la Figura 9.36. Puesto que (x, y) está sobre una circunferencia de radio r , se sigue que $r^2 = x^2 + y^2$. Además, para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

El lector puede comprobar que si $r < 0$, se verifican las mismas relaciones.

TEOREMA 9.10

CAMBIO DE COORDENADAS

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con sus coordenadas rectangulares (x, y) por

$$\begin{array}{ll} 1. & x = r \cos \theta \\ & y = r \operatorname{sen} \theta \\ 2. & \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \\ & r^2 = x^2 + y^2 \end{array}$$

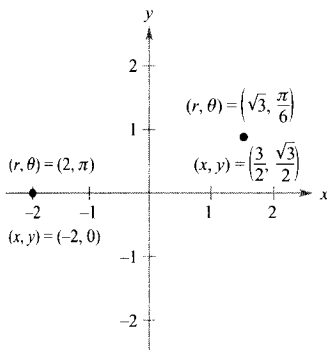


FIGURA 9.37

Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, hacemos $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$.

EJEMPLO 1 Cambio de coordenadas polares a rectangulares

a) Para el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \pi = -2 \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \pi = 0$$

Así pues, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$.

b) Para el punto $(r, \theta) = (\sqrt{3}, \pi/6)$,

$$x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Véase Figura 9.37.})$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (3/2, \sqrt{3}/2)$. \square

EJEMPLO 2 Cambio de coordenadas rectangulares a polares

a) Para el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Dado que θ se ha escogido en el mismo cuadrante que (x, y) , debemos tomar un valor de r positivo.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \quad (\text{Véase Figura 9.38.}) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esto implica que un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

b) Como el punto $(x, y) = (0, 2)$ está en el eje y positivo, elegimos $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, de modo que un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$. \square

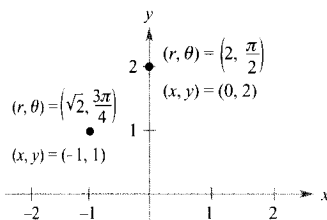


FIGURA 9.38

Para pasar de coordenadas rectangulares a polares hacemos $\operatorname{tg} \theta = y/x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Representar *a mano* las gráficas de ecuaciones en polares complicadas puede resultar tedioso. La tecnología, sin embargo, alivia esta tarea. Si puede disponer de un programa gráfico en modo polar, intente utilizarlo para representar las gráficas de la colección de ejercicios. Si su calculadora no está provista de un modo polar, pero sí de un modo paramétrico, puede dibujar la gráfica de $r = f(\theta)$ expresando la ecuación como

$$x = f(\theta) \cos \theta$$

$$y = f(\theta) \sin \theta$$

Por ejemplo, la gráfica de $r = \frac{1}{2} \theta$, que se muestra en la Figura 9.40, se obtuvo con una calculadora gráfica en modo paramétrico. Para representar la gráfica, introdujimos las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2} \theta \cos \theta$$

$$y = \frac{1}{2} \theta \sin \theta$$

e hicimos variar θ de -4π a 4π . Esta curva es de la forma $r = a\theta$, y recibe el nombre de **espiral de Arquímedes**.

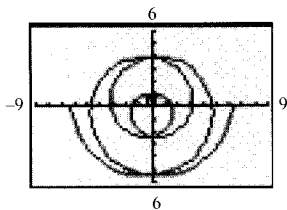


FIGURA 9.40
Espiral de Arquímedes.

Gráficas en polares

Una forma de representar la gráfica de una ecuación en polares consiste en pasar a coordenadas rectangulares y después dibujar la gráfica de la ecuación rectangular.

EJEMPLO 3 Representación gráfica de ecuaciones en polares

Describir la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en polares. Verificar cada descripción pasando a una ecuación rectangular.

a) $r = 2$ b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ c) $r = \sec \theta$

Solución: (Véase Figura 9.39.)

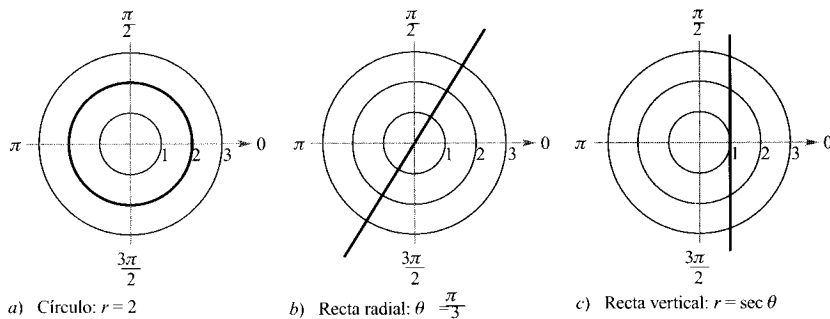


FIGURA 9.39

a) La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ está formada por todos los puntos que distan 2 unidades del polo. En otras palabras, la gráfica es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Podemos confirmarlo usando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

b) La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ contiene todos los puntos de la semirrecta radial que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo. Podemos confirmarlo usando la relación $\text{tg } \theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{Ecuación rectangular}$$

c) La gráfica de la ecuación polar $r = \sec \theta$ no es evidente por simple inspección, por lo que podemos comenzar por pasarla a forma rectangular usando la relación $r \cos \theta = x$.

$$r = \sec \theta \quad \text{Ecuación polar}$$

$$r \cos \theta = 1$$

$$x = 1 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

A la vista de la ecuación rectangular, deducimos que la gráfica es una recta vertical. □

Nota. Un método para representar a mano la gráfica de $r = 2 \cos 3\theta$ consiste en confeccionar una tabla de valores

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	2	0	-2	0	2

Extendiendo la tabla y marcando los puntos, obtendrá la curva del Ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Representación de una gráfica en polares

Con ayuda de una calculadora, representar la gráfica de $r = 2 \cos 3\theta$.

Solución: Comenzamos por escribir la ecuación en forma paramétrica.

$$x = 2 \cos 3\theta \cos \theta \quad \text{e} \quad y = 2 \cos 3\theta \sin \theta$$

Tras algunos ensayos, encontramos que la curva completa, que se llama **curva rosa** (o simplemente **rosa**), puede dibujarse haciendo variar θ de 0 a π , como muestra la Figura 9.41. Si intenta reproducir esta gráfica con una calculadora, encontrará que, al hacer variar θ de 0 a 2π , lo que ocurre realmente es que la curva se recorre *dos veces*.

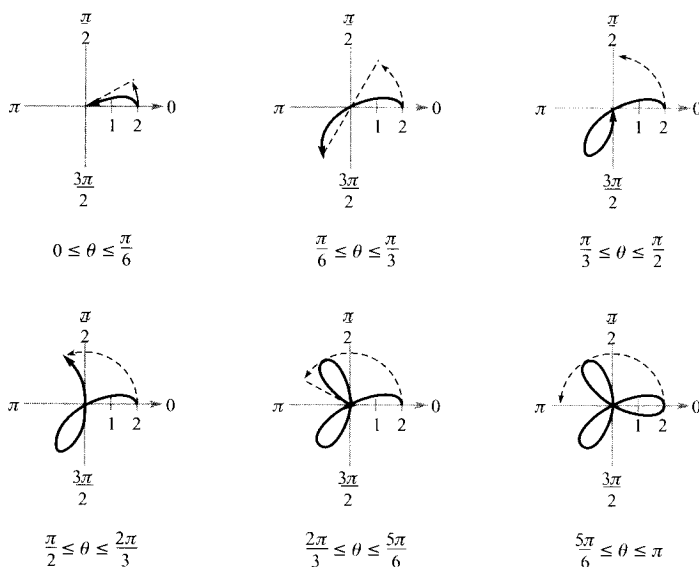


FIGURA 9.41 □

Si tiene acceso a algún programa gráfico, trate de usarlo para experimentar con otras rosas (son de la forma $r = a \cos n\theta$ o $r = a \sin n\theta$). Por ejemplo, la Figura 9.42 muestra las gráficas de otras dos rosas.

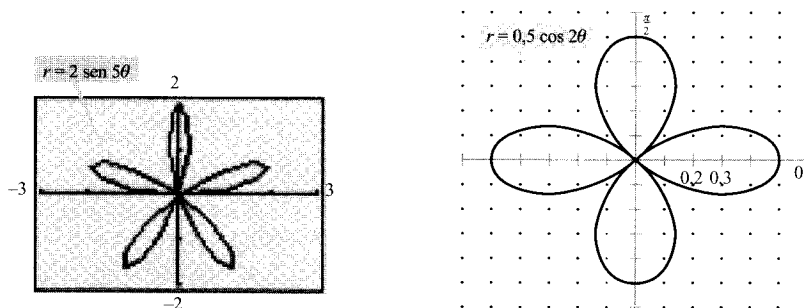


FIGURA 9.42
Rosas.

Pendiente y rectas tangentes

Para determinar la pendiente de una recta tangente a una gráfica en polares, consideremos una función derivable $r = f(\theta)$. Para pasar a polares, utilizamos las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

Usando la forma paramétrica de dy/dx dada en el Teorema 9.7, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

lo que permite establecer el siguiente teorema.

TEOREMA 9.11 PENDIENTE EN POLARES

Si f es una función derivable de θ , la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ) . (Véase Figura 9.43.)

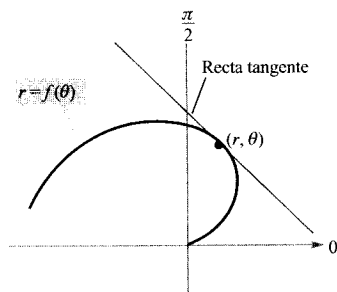


FIGURA 9.43
Recta tangente a una curva en polares.

A partir del Teorema 9.11, podemos hacer las siguientes observaciones.

1. Las soluciones de $\frac{dy}{d\theta} = 0$ conducen a tangentes horizontales, siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$.
2. Las soluciones de $\frac{dx}{d\theta} = 0$ conducen a tangentes verticales, siempre que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Si $dy/d\theta$ y $dx/d\theta$ se anulan simultáneamente, no se puede extraer ninguna conclusión sobre las rectas tangentes.

EJEMPLO 5 Rectas tangentes horizontales o verticales

Hallar las tangentes horizontales y las verticales de $r = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solución: Primero escribimos la ecuación en forma paramétrica.

$$x = r \cos \theta = \sin \theta \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta = \sin \theta \sin \theta = \sin^2 \theta$$

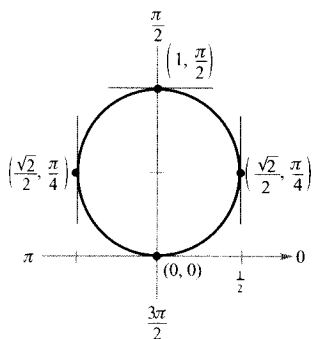


FIGURA 9.44

Tangentes horizontales y verticales de $r = \text{sen } \theta$.

A continuación, derivamos x e y con respecto a θ e igualamos a 0 cada derivada.

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \text{sen } \theta \cos \theta = \text{sen } 2\theta = 0 \implies \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la gráfica posee tangentes verticales en $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ y $(\sqrt{2}/2, 3\pi/4)$, y tangentes horizontales en $(0, 0)$ y $(1, \pi/2)$, como vemos en la Figura 9.44. \square

EJEMPLO 6 Rectas tangentes horizontales o verticales

Hallar las tangentes horizontales y las verticales a la gráfica de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Solución: Derivamos $y = r \text{sen } \theta$ e igualamos $dy/d\theta$ a 0:

$$y = r \text{sen } \theta = 2(1 - \cos \theta) \text{sen } \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[(1 - \cos \theta)(\cos \theta) + \text{sen } \theta(\text{sen } \theta)]$$

$$= -2(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

Entonces, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos \theta = 1$, y podemos concluir que $dy/d\theta = 0$ en $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ y 0. Análogamente, usando $x = r \cos \theta$, se tiene

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \text{sen } \theta + 4 \cos \theta \text{sen } \theta = 2 \text{sen } \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$$

Así pues, $\text{sen } \theta = 0$ o $\cos \theta = \frac{1}{2}$, luego $dx/d\theta = 0$ en $\theta = 0, \pi, \pi/3$ y $5\pi/3$. De estos resultados y de la Figura 9.45, concluimos que la gráfica tiene tangentes horizontales en $(3, 2\pi/3)$ y $(3, 4\pi/3)$, y tangentes verticales en $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$ y $(4, \pi)$. Esta gráfica recibe el nombre de **cardioides**. Observemos que las dos derivadas ($dy/d\theta$ y $dx/d\theta$) se anulan en $\theta = 0$. A partir de esta única información no podemos saber si la gráfica tiene tangente horizontal o vertical en el polo. En la Figura 9.45, sin embargo, vemos que la gráfica tiene un punto cúspide (o punto anguloso) en el polo. \square

El Teorema 9.11 tiene una importante consecuencia. Supongamos que la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo cuando $\theta = \alpha$ y que $f'(\alpha) \neq 0$. Entonces, la fórmula de dy/dx se simplifica como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha) \text{sen } \alpha + f(\alpha) \cos \alpha}{f'(\alpha) \cos \alpha - f(\alpha) \text{sen } \alpha} = \frac{f'(\alpha) \text{sen } \alpha + 0}{f'(\alpha) \cos \alpha - 0} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$$

Por consiguiente, la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica en el polo $(0, \alpha)$.

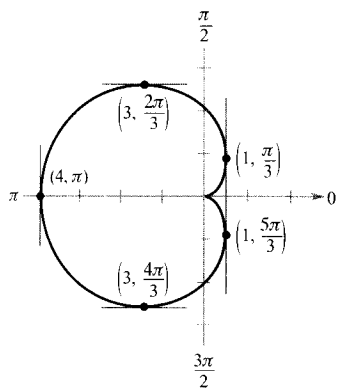


FIGURA 9.45

Tangentes horizontales y verticales de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

TEOREMA 9.12

RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, la recta $\theta = \alpha$ es tangente en el polo a la gráfica de $r = f(\theta)$.

El Teorema 9.12 es útil porque establece que se pueden usar los ceros de $r = f(\theta)$ para hallar las rectas tangentes en el polo. Observemos que, debido a que una curva puede pasar por el polo más de una vez, puede tener más de una recta tangente en el polo. Por ejemplo, la rosa

$$f(\theta) = 2 \cos 3\theta$$

posee tres rectas tangentes en el polo (Figura 9.46). En esta curva, $f(\theta) = 2 \cos 3\theta$ se anula cuando θ es $\pi/6$, $\pi/2$ y $5\pi/6$. Además, la derivada $f'(\theta) = -6 \sin 3\theta$ no es 0 para estos valores de θ .

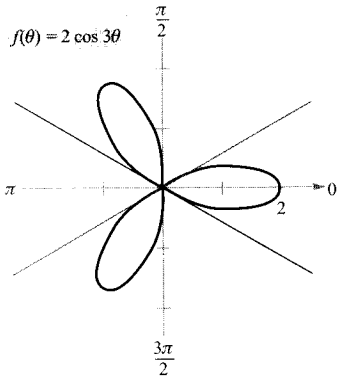


FIGURA 9.46

Esta rosa tiene tres rectas tangentes ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 5\pi/6$) en el polo.

Gráficas en polares especiales

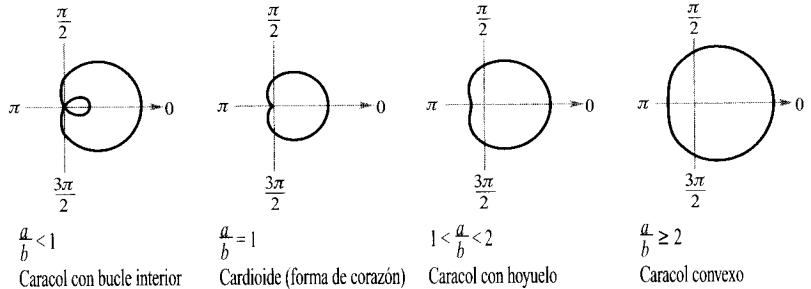
Varios tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más sencillas en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia de radio a centrada en el origen es simplemente $r = a$. Más adelante llegaremos a apreciar esta ventaja. Por ahora, resumiremos otros tipos de gráficas cuyas ecuaciones son más sencillas en forma polar. (Las cónicas se considerarán en la Sección 9.6.)

Caracoles

$$r = a \pm b \cos \theta$$

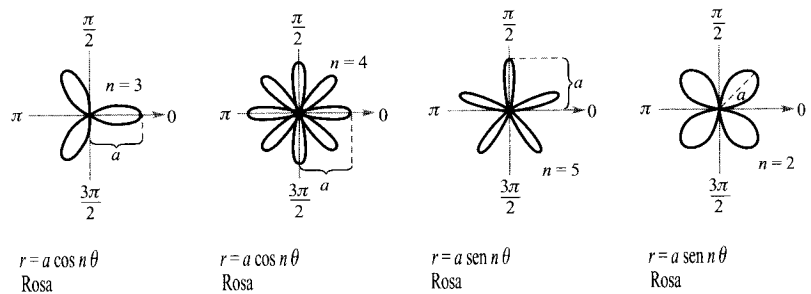
$$r = a \pm b \sin \theta$$

($a > 0, b > 0$)

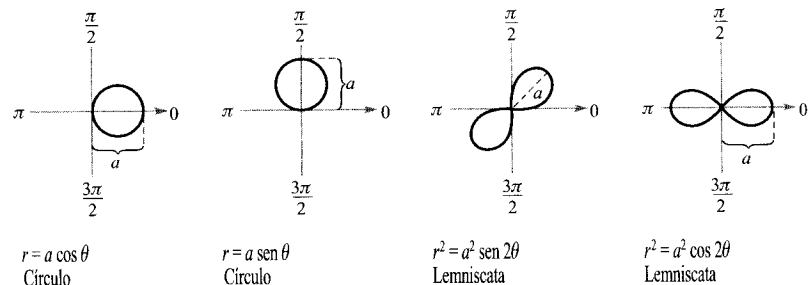


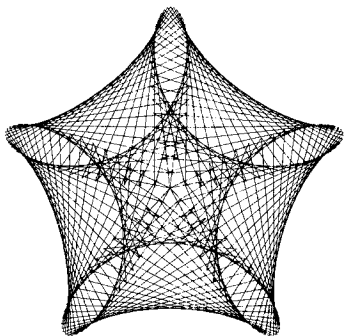
Rosas

n pétalos si n es impar
 $2n$ pétalos si n es par
 ($n \geq 2$)



Círculos y lemniscatas





Las rosas descritas anteriormente son de la forma $r = a \cos n\theta$, o $r = a \sin n\theta$, donde n es un entero mayor o igual que 2. Intente representar con una calculadora la gráfica de $r = a \cos n\theta$ o de $r = a \sin n\theta$ para algunos valores no enteros de n . ¿Son también rosas estas gráficas? Por ejemplo, trate de representar la gráfica de $r = \cos \frac{2}{3}\theta$, $0 \leq \theta \leq 6\pi$.

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre las rosas y otras curvas relacionadas véase el artículo «A Rose is a Rose...» de Peter M. Maurer, publicado en *The American Mathematical Monthly*, agosto-septiembre de 1987. (La gráfica adjunta, generada por ordenador, es el resultado de un algoritmo que Maurer llama «La Rosa».)

Ejercicios de la Sección 9.4

En los Ejercicios 1-6, representar el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas cartesianas correspondientes.

- | | |
|------------------------|-------------------|
| 1. $(4, 3\pi/6)$ | 2. $(-1, 5\pi/4)$ |
| 3. $(-4, -\pi/3)$ | 4. $(0, -7\pi/6)$ |
| 5. $(\sqrt{2}, 2, 36)$ | 6. $(-3, -1, 57)$ |

En los Ejercicios 7-10, utilizar una calculadora para encontrar las coordenadas cartesianas del punto dado en coordenadas polares. Representar el punto.

- | | |
|------------------|---------------------|
| 7. $(5, 3\pi/4)$ | 8. $(-2, 11\pi/6)$ |
| 9. $(-3.5, 2.5)$ | 10. $(8, 25, 1, 3)$ |

En los Ejercicios 11-14 se dan las coordenadas cartesianas de un punto. Representar el punto y determinar dos pares de coordenadas polares del mismo con $0 \leq \theta < 2\pi$.

- | | |
|---------------|---------------|
| 11. $(1, 1)$ | 12. $(0, -5)$ |
| 13. $(-3, 4)$ | 14. $(3, -1)$ |

En los Ejercicios 15-18, usar una calculadora para hallar unas coordenadas polares del punto dado en coordenadas cartesianas.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 15. $(3, -2)$ | 16. $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ |
| 17. $(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$ | 18. $(0, -5)$ |

19. Representar el punto $(4, 3, 5)$ si está dado en coordenadas $a)$ cartesianas y $b)$ polares.

20. Razonamiento gráfico

- Usando coordenadas cartesianas en la pantalla de una calculadora, situar el cursor en cualquier punto fuera de los ejes. Desplazarlo horizontalmente y describir los cambios que experimentan las coordenadas mostradas de los puntos. Repetir el proceso desplazando el cursor verticalmente.
- Repetir el apartado $a)$, usando coordenadas polares en la pantalla de la calculadora.
- ¿Por qué son diferentes los resultados de $a)$ y $b)$?

En los Ejercicios 21-28, pasar la ecuación rectangular a forma polar y esbozar su gráfica.

- | | |
|-----------------------|--|
| 21. $x^2 + y^2 = a^2$ | 22. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ |
| 23. $y = 4$ | 24. $x = 10$ |
| 25. $3x - y + 2 = 0$ | 26. $xy = 4$ |
| 27. $y^2 = 9x$ | 28. $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$ |

En los Ejercicios 29-36, pasar la ecuación polar a forma rectangular y esbozar su gráfica.

- | | |
|-------------------------|---|
| 29. $r = 3$ | 30. $r = -2$ |
| 31. $r = \sin \theta$ | 32. $r = 3 \cos \theta$ |
| 33. $r = 0$ | 34. $\theta = \frac{5\pi}{6}$ |
| 35. $r = 3 \sec \theta$ | 36. $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$ |
37. Pasar la ecuación

$$r = 2(h \cos \theta + k \sin \theta)$$

a forma rectangular y comprobar que corresponde a una circunferencia. Hallar el radio y las coordenadas cartesianas del centro.

38. Fórmula de la distancia

- a) Verificar que la fórmula de la distancia entre los dos puntos en coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

- b) Describir la posición relativa de los puntos si $\theta_1 = \theta_2$. Simplificar la fórmula de la distancia para este caso. ¿Es la simplificación esperada? Explicar la respuesta.
- c) Simplificar la fórmula de la distancia para $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$. ¿Es la simplificación esperada? Explicar la respuesta.
- d) Seleccionar dos puntos del sistema de coordenadas polares y hallar la distancia entre ellos. Después, escoger representaciones polares distintas de los mismos puntos y aplicar de nuevo la fórmula de la distancia. Discutir el resultado.

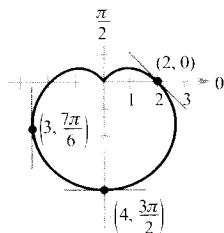
En los Ejercicios 39-42, usar el resultado del Ejercicio 38 para estimar la distancia entre los dos puntos dados en coordenadas polares.

39. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 40. $\left(10, \frac{7\pi}{6}\right), (3, \pi)$

41. $(2, 0.5), (7, 1.2)$ 42. $(4, 2.5), (12, 1)$

En los Ejercicios 43 y 44, hallar dy/dx y las pendientes de las rectas tangentes mostradas en la gráfica de la ecuación en polares.

43. $r = 2 + 3 \sin \theta$ 44. $r = 2(1 - \sin \theta)$



En los Ejercicios 45-48, usar una calculadora para a) representar gráficamente la ecuación, b) trazar la recta tangente en el valor de θ dado, y c) hallar dy/dx en ese valor de θ . (Ayuda: Tomar el incremento de los valores de θ igual a $\pi/24$.)

45. $r = 3(1 - \cos \theta), \theta = \frac{\pi}{2}$ 46. $r = 3 - 2 \cos \theta, \theta = 0$

47. $r = 3 \sin \theta, \theta = \frac{\pi}{3}$ 48. $r = 4, \theta = \frac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 49 y 50, hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical (si existen) de la curva en polares.

49. $r = 1 + \sin \theta$ 50. $r = a \sin \theta$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar los puntos de tangencia horizontal (si existen) de la curva en polares.

51. $r = 2 \operatorname{cosec} \theta + 3$ 52. $r = a \sin \theta \cos^2 \theta$

En los Ejercicios 53-56, usar una calculadora para representar gráficamente la ecuación y hallar todos los puntos de tangencia horizontal.

53. $r = 4 \sin \theta \cos^2 \theta$ 54. $r = 3 \cos 2\theta \sec \theta$

55. $r = 2 \operatorname{cosec} \theta + 5$ 56. $r = 2 \cos(3\theta - 2)$

En los Ejercicios 57-62 esbozar la gráfica de la ecuación y determinar las tangentes en el polo.

57. $r = 3 \sin \theta$ 58. $r = 3(1 - \cos \theta)$

59. $r = 2 \cos 3\theta$ 60. $r = -\sin 5\theta$

61. $r = 3 \sin 2\theta$ 62. $r = 3 \cos 2\theta$

En los Ejercicios 63-70, esbozar la gráfica de la ecuación.

63. $r = 3 - 2 \cos \theta$ 64. $r = 5 - 4 \sin \theta$

65. $r = 3 \operatorname{cosec} \theta$ 66. $r = \frac{6}{2 \sin \theta - 3 \cos \theta}$

67. $r = 2\theta$ 68. $r = \frac{1}{\theta}$

69. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ 70. $r^2 = 4 \sin \theta$

En los Ejercicios 71-80, representar en una calculadora la gráfica de la ecuación. Hallar un intervalo de valores de θ sobre el cual la gráfica se recorra sólo una vez.

71. $r = 3 - 4 \cos \theta$ 72. $r = 2(1 - 2 \sin \theta)$

73. $r = 2 + \sin \theta$ 74. $r = 4 + 3 \cos \theta$

75. $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ 76. $r = \frac{2}{4 - 3 \sin \theta}$

77. $r = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ 78. $r = 3 \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)$

79. $r^2 = 4 \sin 2\theta$ 80. $r^2 = \frac{1}{\theta}$

En los Ejercicios 81-84, representar en una calculadora la gráfica de la ecuación y probar que la recta indicada es una asíntota de la gráfica.

Nombre de la gráfica	Ecuación polar	Asíntota
81. Concoide	$r = 2 - \sec \theta$	$x = -1$
82. Concoide	$r = 2 + \operatorname{cosec} \theta$	$y = 1$
83. Espiral hiperbólica	$r = 2/\theta$	$y = 2$
84. Estrofoide	$r = 2 \cos 2\theta \sec \theta$	$x = -2$

85. Esbozar la gráfica de $r = 4 \sin \theta$ en cada intervalo.

a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ c) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

86. **Para pensar** Utilizando una calculadora, representar gráficamente la ecuación $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para a) $\phi = 0$, b) $\phi = \pi/4$ y c) $\phi = \pi/2$. Usar las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ . Escribir la ecuación en función de $\sin \theta$ en el apartado c).

87. Comprobar que si se gira la curva de ecuación $r = f(\theta)$ un ángulo ϕ alrededor del polo, la curva resultante admite la ecuación $r = f(\theta - \phi)$.

88. Si la ecuación en polares de una curva es de la forma $r = f(\sin \theta)$, demostrar que la ecuación pasa a ser de la forma:

a) $r = f(-\cos \theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de $\pi/2$ radianes en sentido antihorario.

b) $r = f(-\sin \theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de π radianes en sentido antihorario.

c) $r = f(\cos \theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de $3\pi/2$ radianes en sentido antihorario.

En los Ejercicios 89-92, aplicar los resultados de los Ejercicios 87 y 88.

89. Escribir una ecuación para el caracol $r = 2 - \sin \theta$ una vez ha girado el ángulo indicado. Verificar los resultados representando en una calculadora el caracol girado.

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) $\frac{3\pi}{4}$

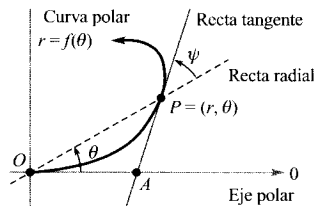
90. Escribir una ecuación para la rosa $r = 2 \sin 2\theta$ una vez ha girado el ángulo indicado. Verificar los resultados representando en una calculadora la rosa girada.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) π

91. Esbozar la gráfica de cada ecuación

a) $r = 1 - \sin \theta$ b) $r = 1 - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

92. Demostrar que la tangente del ángulo ψ ($0 \leq \psi \leq \pi/2$) entre la recta radial y la recta tangente en el punto (r, θ) de la gráfica de $r = f(\theta)$ (véase figura) viene dada por $\tan \psi = |r/(dr/d\theta)|$.



En los Ejercicios 93-98, usar el resultado del Ejercicio 92 para hallar el ángulo ψ entre las rectas radial y tangente a la gráfica para el valor de θ indicado. Usando una calculadora, representar gráficamente la ecuación en polares, la recta radial y la recta tangente para el valor de θ indicado. Identificar el ángulo ψ .

Ecuación polar	Valor de θ
----------------	-------------------

93. $r = 2(1 - \cos \theta)$ $\theta = \pi$

94. $r = 3(1 - \cos \theta)$ $\theta = 3\pi/4$

95. $r = 2 \cos 3\theta$ $\theta = \pi/6$

96. $r = 4 \sin 2\theta$ $\theta = \pi/6$

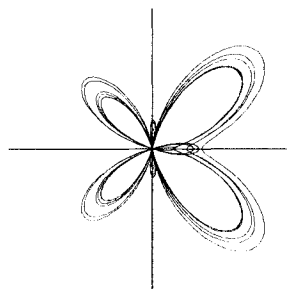
97. $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$ $\theta = 2\pi/3$

98. $r = 5$ $\theta = \pi/6$

99. **La curva mariposa** Con ayuda de una calculadora, obtener la curva mostrada abajo, de ecuación

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \sin^5 \frac{\theta}{12}$$

¿En qué intervalo debe variar θ para producir la curva?



PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre esta curva, puede consultarse el artículo «A Study in Step Size», de Temple H. Fay, en *Mathematics Magazine*, abril de 1997.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 100-103, determinar si la afirmación es correcta. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

- 100. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $|r_1| = |r_2|$.
- 101. Si (r, θ_1) y (r, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n .
- 102. Si $x \geq 0$ entonces el punto de coordenadas cartesianas (x, y) puede representarse por las coordenadas polares (r, θ) , siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctg(y/x)$.

- 103. Las ecuaciones en polares $r = \sen 2\theta$ y $r = -\sen 2\theta$ tienen la misma gráfica.
- 104. **De corazón a campana** Usando una calculadora, representar la ecuación

$$r = \cos 5\theta + n \cos \theta$$

para $0 \leq \theta < \pi$ y los enteros $n = -5$ a $n = 5$. ¿Qué valores de n producen el «corazón» de la curva? ¿Qué valores de n producen la «campana»? Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, apareció en el número de enero de 1994 de *The College Mathematics Journal*.



9.5

Área y longitud de arco en coordenadas polares

CONTENIDO ■

- Área de una región en polares ■
- Puntos de intersección de gráficas en polares ■
- Longitud de arco en polares ■
- Área de una superficie de revolución ■

Área de una región en polares

El proceso que culmina en una fórmula para el área de una región polar es paralelo al del área en coordenadas cartesianas, pero utiliza *sectores* circulares en lugar de rectángulos como elementos básicos. Observemos, en la Figura 9.47, que el área de un sector circular de radio r viene dada por $\frac{1}{2} \theta r^2$, en el supuesto de que θ se mida en radianes.

Consideremos la ecuación $r = f(\theta)$, con f continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La Figura 9.48 muestra la región acotada por la gráfica y por las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Para hallar el área de esta región, dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales.

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Aproximamos el área de la región por la suma de las áreas de los n sectores.

Radio del i -ésimo sector = $f(\theta_i)$

Ángulo central del i -ésimo sector = $\frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$

$$A \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$

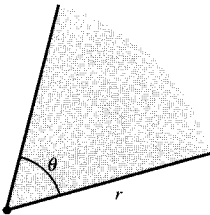


FIGURA 9.47

El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2} \theta r^2$.

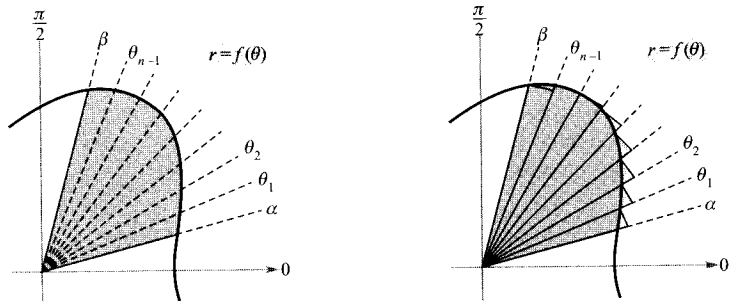


FIGURA 9.48

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\theta_i)]^2 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

lo que lleva a enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 9.13 ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, el área de la región limitada por la gráfica de $r = f(\theta)$ y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \end{aligned}$$

| Nota. La misma fórmula sirve para calcular el área de la región acotada por la gráfica de una función continua no positiva. Sin embargo, la fórmula no es necesariamente válida si f toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

EJEMPLO 1 Área de una región en polares

Hallar el área de un pétalo de la rosa de ecuación $r = 3 \cos 3\theta$.

Solución: En la Figura 9.49 vemos que el pétalo de la derecha se recorre cuando θ crece de $-\pi/6$ a $\pi/6$. Así pues, el área es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3 \cos 3\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{\sin 6\theta}{6} \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\pi}{4} \quad \square \end{aligned}$$

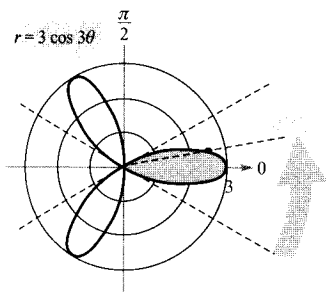


FIGURA 9.49

El área del pétalo de la rosa situado entre las rectas radiales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ es $3\pi/4$.

Para hallar el área de la región interior a los tres pétalos de la rosa del Ejemplo 1, no es correcto integrar entre 0 y 2π . Haciéndolo, se obtendría $9\pi/2$, que es el doble del área buscada. Esta duplicación se produce porque la rosa se recorre dos veces cuando θ crece de 0 a 2π .

EJEMPLO 2 Cálculo del área limitada por una curva

Hallar el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$.

Solución: En la Figura 9.50 observamos que el lazo interior se recorre cuando θ crece de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Por tanto, el área limitada por el lazo interior es

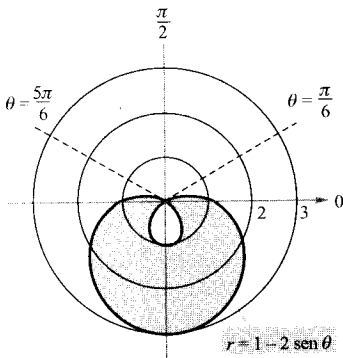


FIGURA 9.50
El área comprendida entre los lazos interior y exterior es aproximadamente 8,34.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2 \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 4 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1 - 4 \operatorname{sen} \theta + 4 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 - 4 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[3\theta + 4 \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

De forma similar, integrando de $5\pi/6$ a $13\pi/6$ obtenemos que el área limitada por el lazo exterior es $A_2 = 2\pi + (3\sqrt{3}/2)$. El área de la región comprendida entre ambos lazos es la diferencia entre A_2 y A_1 .

$$A = A_2 - A_1 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \pi + 3\sqrt{3} \approx 8,34 \quad \square$$

Puntos de intersección de gráficas en polares

Dado que cada punto admite diversas representaciones en coordenadas polares, hay que tener cuidado al determinar los puntos de intersección de dos gráficas en polares. Por ejemplo, consideremos los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 - 2 \cos \theta \quad \text{y} \quad r = 1$$

(Figura 9.51). Si intentáramos, como hacemos con las ecuaciones rectangulares, hallar los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, obtendríamos

$$\begin{array}{ll} r = 1 - 2 \cos \theta & \text{Primera ecuación} \\ 1 = 1 - 2 \cos \theta & \text{Sustituir } r = 1 \text{ de la segunda ecuación en la primera} \\ \cos \theta = 0 & \text{Simplificar} \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & \text{Despejar } \theta \end{array}$$

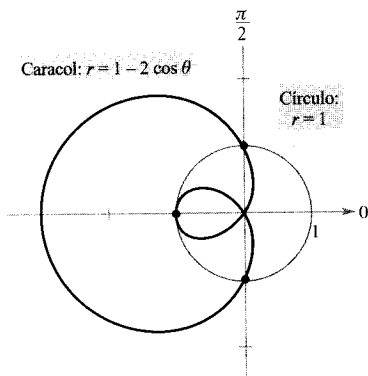


FIGURA 9.51
Tres puntos de intersección: $(1, \pi/2)$, $(-1, 0)$, $(1, 3\pi/2)$.

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre el uso de calculadoras en la búsqueda de puntos de intersección puede verse en el artículo «Finding Points of Intersection of Polar-Coordinate Graphs», de Warren W. Esty, en *Mathematics Teacher*, septiembre de 1991.

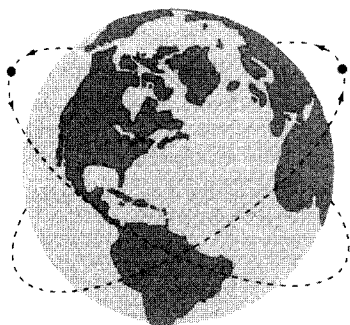


FIGURA 9.52

Las trayectorias de los satélites pueden cortarse sin que se produzcan colisiones.

Los correspondientes puntos de intersección son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Sin embargo, en la Figura 9.51, puede verse que existe un *tercer* punto de intersección que no aparecía al resolver las ecuaciones simultáneamente. (Ésta es una de las razones por las que insistimos en que se esboce una gráfica cuando se trate de hallar el área de una región en polares). El motivo por el que no se encontró el tercer punto es que no aparece con las mismas coordenadas en ambas gráficas. En la gráfica de $r = 1$, corresponde a las coordenadas $(1, \pi)$, mientras que en la de $r = 1 - 2 \cos \theta$, sus coordenadas son $(-1, 0)$.

El problema de determinar los puntos de intersección de dos gráficas en polares puede compararse con el de hallar los puntos de colisión de dos satélites terrestres cuyas órbitas se cortan entre sí, como ilustra la Figura 9.52. Los satélites no chocarán si alcanzan los puntos de intersección en instantes (valores de θ) diferentes. Solamente se producirán colisiones en los puntos de intersección que son «puntos simultáneos» —aquellos que se alcanzan en un mismo instante (valor de θ).

| Nota. Como el polo puede representarse por $(0, \theta)$, siendo θ cualquier ángulo, debe analizarse por separado cuando se buscan puntos de intersección.

EJEMPLO 3 Área de la región comprendida entre dos curvas

Hallar el área de la región común a las dos regiones limitadas por las siguientes curvas:

$r = -6 \cos \theta$ Círculo

$r = 2 - 2 \cos \theta$ Cardioide

Solución: Dado que ambas curvas son simétricas respecto al eje x , podemos trabajar en el semiplano superior, como muestra la Figura 9.53. La zona sombreada más oscura está limitada por la circunferencia y la recta radial $\theta = 2\pi/3$. Como la circunferencia tiene coordenadas $(0, \pi/2)$ en el polo, integramos entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ para obtener el área de esta región. La zona más oscura está acotada por las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$ y por la cardioide. Por tanto, podemos calcular su área integrando entre $2\pi/3$ y π . La suma de las dos integrales nos da el área de la región común situada *por encima* de la recta radial $\theta = \pi$

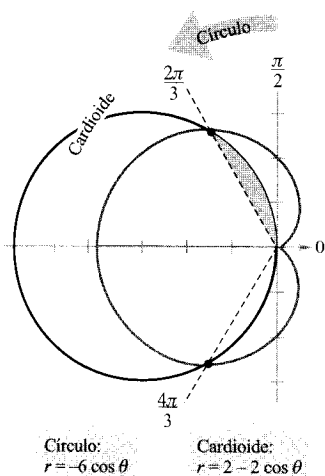


FIGURA 9.53

| Nota. Con el fin de comprobar el resultado obtenido en el Ejemplo 3, observemos que el área de la región circular es $\pi r^2 = 9\pi$. Parece, pues, razonable que el área de la región situada dentro de la circunferencia y de la cardioide sea 5π .

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6 \cos \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} (2 - 2 \cos \theta)^2 d\theta \\ &= 18 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} (4 - 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 9 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + \cos 2\theta) d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 - 4 \cos \theta + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 9 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \left[3\theta - 4 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= 9 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + \left(3\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por 2, concluimos que el área total es 5π . □

Para poder apreciar la ventaja del uso de coordenadas polares en el Ejemplo 3, consideremos la integral que da el área en coordenadas cartesianas:

$$\frac{A}{2} = \int_{-4}^{-3/2} \sqrt{2\sqrt{1-2x-x^2}-2x+2} dx + \int_{-3/2}^0 \sqrt{-x^2-6x} dx$$

Nota. Al aplicar la fórmula de la longitud de arco a una curva en polares, uno debe asegurarse de que la curva se recorre sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la rosa dada por $r = \cos 3\theta$ se recorre una vez en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, pero dos veces en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Con ayuda de un programa de integración, puede probarse que se obtiene el mismo resultado que en el Ejemplo 3.

Longitud de arco en polares

Es posible obtener la fórmula para la longitud de arco en polares a partir de la fórmula de la longitud de arco de una curva descrita mediante ecuaciones paramétricas (véase Ejercicio 58).

TEOREMA 9.14

LONGITUD DE ARCO EN POLARES

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ es

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de una curva en polares

Hallar la longitud del arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ de la cardioide

$$r = f(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$$

que se muestra en la Figura 9.54.

Solución: Como $f'(\theta) = 2 \sin \theta$, podemos calcular la longitud de arco como sigue.

$$\begin{aligned} s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta && \text{sen } \frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ &= 8 \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 8(1 + 1) \\ &= 16 \end{aligned}$$

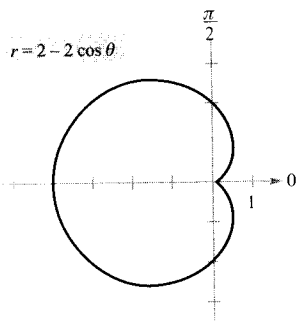


FIGURA 9.54

La longitud de arco de esta cardioide es 16.

En el quinto paso de la resolución, es legítimo escribir

$$\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 (\theta/2)} = \sqrt{2} \operatorname{sen} (\theta/2)$$

en lugar de $\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 (\theta/2)} = \sqrt{2} |\operatorname{sen} (\theta/2)|$ ya que $\operatorname{sen} (\theta/2) \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. \square

| Nota. A la vista de la Figura 9.54, parece que la respuesta es razonable, por comparación con la longitud de una circunferencia. Por ejemplo, una circunferencia de radio $5/2$ tiene una longitud de $5\pi \approx 15.7$.

Área de una superficie de revolución

La versión en coordenadas polares de las fórmulas para el área de una superficie de revolución pueden obtenerse a partir de las correspondientes versiones paramétricas dadas en el Teorema 9.9, empleando las ecuaciones $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$.

TEOREMA 9.15

ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. El área de la superficie generada por revolución de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ en torno a la recta indicada es la siguiente:

1. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \operatorname{sen} \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$ En torno al eje polar
2. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$ En torno a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

Nota. Al aplicar el Teorema 9.15, es necesario comprobar que la gráfica de $r = f(\theta)$ se recorre sólo una vez en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Por ejemplo, la circunferencia de ecuación $r = \cos \theta$ se recorre una vez en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

EJEMPLO 5 Área de una superficie de revolución

Hallar el área de la superficie generada por la circunferencia $r = f(\theta) = \cos \theta$ al girar en torno a la recta $\theta = \pi/2$ (Figura 9.55).

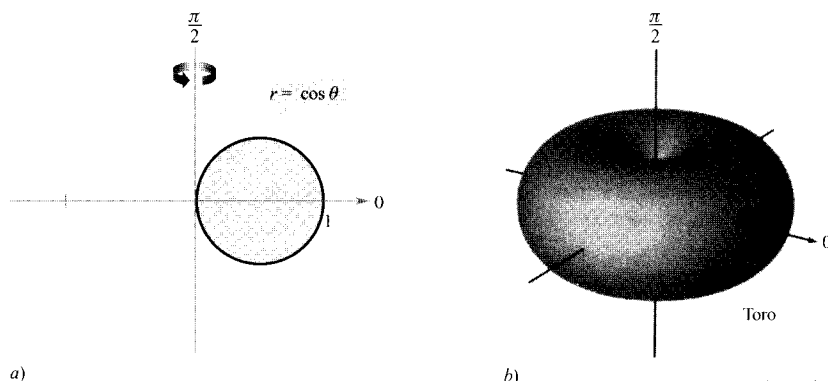


FIGURA 9.55
El área de este toro es π^2 .

Solución: Podemos aplicar la segunda fórmula del Teorema 9.15 con $f'(\theta) = -\text{sen } \theta$. Puesto que la circunferencia se recorre una vez cuando θ crece de 0 a π , tenemos

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos \theta (\cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \pi \left[\theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} = \pi^2 \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 9.5

En los Ejercicios 1 y 2, hallar el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación en polares *a*) mediante una fórmula geométrica y *b*) por integración.

1. $r = 8 \text{ sen } \theta$ 2. $r = 3 \text{ cos } \theta$

En los Ejercicios 3-8, calcular el área de la región.

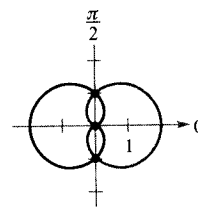
3. Un pétalo de $r = 2 \text{ cos } 3\theta$
 4. Un pétalo de $r = 4 \text{ sen } 2\theta$
 5. Un pétalo de $r = \text{cos } 2\theta$
 6. Un pétalo de $r = \text{cos } 5\theta$
 7. Interior de $r = 1 - \text{sen } \theta$
 8. Interior de $r = 1 - \text{sen } \theta$ (por encima del eje polar)

En los Ejercicios 9-12, representar la gráfica con ayuda de una calculadora y hallar el área de la región indicada.

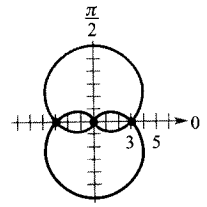
9. Bucle interior de $r = 1 + 2 \text{ cos } \theta$
 10. Bucle interior de $r = 3 + 4 \text{ sen } \theta$
 11. Entre los bucles de $r = 1 + 2 \text{ cos } \theta$
 12. Entre los bucles de $r = 2(1 + 2 \text{ sen } \theta)$

En los Ejercicios 13-22, encontrar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

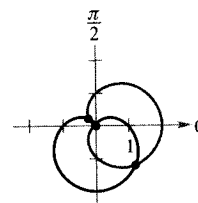
13. $r = 1 + \text{cos } \theta$
 $r = 1 - \text{cos } \theta$



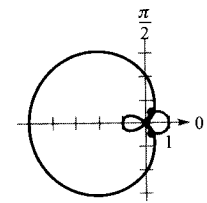
14. $r = 3(1 + \text{sen } \theta)$
 $r = 3(1 - \text{sen } \theta)$



15. $r = 1 + \text{cos } \theta$
 $r = 1 - \text{sen } \theta$



16. $r = 2 - 3 \text{ cos } \theta$
 $r = \text{cos } \theta$



$$17. \begin{aligned} r &= 4 - 5 \sin \theta \\ r &= 3 \sin \theta \end{aligned}$$


$$18. \begin{aligned} r &= 1 + \cos \theta \\ r &= 3 \cos \theta \end{aligned}$$

$$19. \begin{aligned} r &= \frac{\theta}{2} \\ r &= 2 \end{aligned}$$

$$20. \begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} \\ r &= 2 \end{aligned}$$


$$21. \begin{aligned} r &= 4 \sin 2\theta \\ r &= 2 \end{aligned}$$

$$22. \begin{aligned} r &= 3 + \sin \theta \\ r &= 2 \operatorname{cosec} \theta \end{aligned}$$

 En los Ejercicios 23 y 24, utilizar una calculadora para estimar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones en polares. Confirmar los resultados analíticamente.


$$23. \begin{aligned} r &= 2 + 3 \cos \theta \\ r &= \frac{\sec \theta}{2} \end{aligned}$$

$$24. \begin{aligned} r &= 3(1 - \cos \theta) \\ r &= \frac{6}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

 **Redacción** En los Ejercicios 25 y 26, determinar el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones en polares con ayuda de una calculadora. Explique por qué el polo no es un punto de intersección obtenido por la solución de las ecuaciones en forma simultánea.

$$25. \begin{aligned} r &= \cos \theta \\ r &= 2 - 3 \sin \theta \end{aligned}$$

$$26. \begin{aligned} r &= 4 \sin \theta \\ r &= 2(1 + \sin \theta) \end{aligned}$$

 En los Ejercicios 27-32, representar gráficamente en una calculadora la ecuación en polares y hallar el área de la región indicada.

27. Interior común de $r = 4 \sin 2\theta$ y $r = 2$

28. Interior común de $r = 3(1 + \sin \theta)$ y $r = 3(1 - \sin \theta)$

29. Interior común de $r = 3 - 2 \sin \theta$ y $r = -3 + 2 \sin \theta$

30. Interior común de $r = 3 - 2 \sin \theta$ y $r = 3 - 2 \cos \theta$

31. Interior común de $r = 4 \sin \theta$ y $r = 2$

32. Dentro de $r = 3 \sin \theta$ y fuera de $r = 2 - \sin \theta$.

En los Ejercicios 33-36, hallar el área de la región.


33. Dentro de $r = a(1 + \cos \theta)$ y fuera de $r = a \cos \theta$

34. Dentro de $r = 2a \cos \theta$ y fuera de $r = a$

35. Interior común de $r = a(1 + \cos \theta)$ y $r = a \sin \theta$

36. Región limitada por las gráficas de

$$r = \frac{ab}{a \sin \theta + b \cos \theta}, \quad \theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

 37. **Radiación de una antena** La radiación de una antena transmisora no es uniforme en todas las direcciones. La intensidad de una antena concreta admite el modelo

$$r = a \cos^2 \theta$$

- Pasar la ecuación a forma rectangular.
- Representar en una calculadora la gráfica del modelo para $a = 4$ y $a = 6$.
- Hallar el área de la región geográfica comprendida entre las dos curvas del apartado b).

38. **Área** El área que queda dentro de una o más de las circunferencias entrelazadas

$$r = 2a \cos \theta, \quad r = 2a \sin \theta \quad \text{y} \quad r = a$$

se divide en siete regiones. Hallar el área de cada región.

39. **Conjetura** Hallar el área de la región acotada por $r = a \cos(n\theta)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ Usar los resultados para formular una conjetura acerca de dicho área si n es par y si n es impar.

40. **Área** Esbozar la estrofoide

$$r = \sec \theta - 2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Pasar esta ecuación a coordenadas cartesianas. Calcular el área limitada por el lazo.

En los Ejercicios 41-44, determinar la longitud de la gráfica sobre el intervalo indicado.

<u>Ecuación polar</u>	<u>Intervalo</u>
41. $r = a$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
42. $r = 2a \cos \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
43. $r = 1 + \sin \theta$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
44. $r = 5(1 + \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los Ejercicios 45-50, usar una calculadora para representar gráficamente la ecuación en polares sobre el intervalo indicado. Mediante un programa de integración, estimar la longitud de la gráfica con una precisión de dos decimales.

<u>Ecuación polar</u>	<u>Intervalo</u>
45. $r = 2\theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
46. $r = \sec \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
47. $r = \frac{1}{\theta}$	$\pi \leq \theta \leq 2\pi$
48. $r = e^\theta$	$0 \leq \theta \leq \pi$
49. $r = \text{sen}(3 \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
50. $r = 2 \text{sen}(2 \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$

En los Ejercicios 51-54, hallar el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor de la recta dada.

<u>Ecuación polar</u>	<u>Intervalo</u>	<u>Eje de revolución</u>
51. $r = 2 \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	Eje polar
52. $r = a \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
53. $r = e^{a\theta}$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
54. $r = a(1 + \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$	Eje polar

En los Ejercicios 55 y 56, utilizar un programa de integración para estimar con dos cifras decimales exactas el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje polar.

<u>Ecuación polar</u>	<u>Intervalo</u>
55. $r = 4 \cos 2\theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
56. $r = \theta$	$0 \leq \theta \leq \pi$
57. Área de un toro Hallar el área del toro generado por la circunferencia $r = a$ al girar en torno de la recta $r = b \sec \theta$, donde $0 < a < b$. [Ayuda: Obtener la integral que proporciona el área de la superficie generada por revolución de la gráfica de $r = f(\theta)$ alrededor de la recta $r = b \sec \theta$.]	

58. Aplicando la fórmula de la longitud de arco de una curva en forma paramétrica, obtener la fórmula de la longitud de arco de una curva en polares.

59. **Área aproximada** Consideremos la circunferencia de ecuación $r = 8 \cos \theta$.

- Hallar el área del círculo correspondiente.
- Completar la tabla dando el área A del sector circular entre $\theta = 0$ y cada valor de θ de la tabla.

θ	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
A							

- Utilizar la tabla del apartado b) para estimar los valores de θ para los cuales el sector circular representa $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total del círculo.
- Con ayuda de una calculadora, estimar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los cuales el sector circular representa $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total del círculo.
- ¿Dependen los resultados del apartado d) del radio del círculo? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 60-63, averiguar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

60. El área de la región limitada por la circunferencia $r = \text{sen } \theta$ viene dada por la integral definida

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta \, d\theta$$

- Si $f(\theta) > 0$ y $g(\theta) < 0$ para todo θ , las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ no se cortan.
- Si $f(\theta) = g(\theta)$ para $\theta = 0, \pi/2$ y $3\pi/2$, las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ tienen al menos cuatro puntos de intersección.
- Si n es un entero par, el área de la región limitada por $r = \text{sen}(n\theta)$ es el doble que el área de la región limitada por $r = \text{sen}[(n+1)\theta]$.

9.6

Ecuaciones de las cónicas en polares y leyes de Kepler

- CONTENIDO ■
 Ecuaciones de las cónicas en polares ■
 Leyes de Kepler ■

EXPLORACIÓN

Representación gráfica de cónicas En una calculadora gráfica que trabaje en polares, introducir ecuaciones del tipo

$$r = \frac{a}{1 \pm b \cos \theta}$$

o

$$r = \frac{a}{1 \pm b \sin \theta}$$

Siempre que $a \neq 0$, la gráfica debe ser una cónica. Describir los valores de a y b que dan lugar a parábolas. ¿Qué valores producen elipses? ¿Cuáles producen hipérbolas?

Ecuaciones de las cónicas en polares

En este capítulo hemos visto que las ecuaciones rectangulares de las elipses y las hipérbolas adoptan formas sencillas cuando se toma el origen en sus *centros*. Pero ocurre que existen numerosas aplicaciones importantes de las cónicas en las que resulta más conveniente usar uno de los *focos* como el punto de referencia (el origen) del sistema de coordenadas. Por ejemplo, el Sol está situado en uno de los focos de la órbita de la Tierra. Análogamente, la fuente de luz en un reflector parabólico está en su foco. En esta sección, veremos que las ecuaciones en polares de las cónicas adoptan formas sencillas si uno de los focos está localizado en el polo.

El siguiente teorema utiliza el concepto de *excentricidad*, definido en la Sección 9.1, para clasificar los tres tipos básicos de cónicas. En el apéndice se da una demostración de este teorema.

TEOREMA 9.16 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS SEGÚN LA EXCENTRICIDAD

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a un punto fijo (*foco*) y a una recta fija (*directriz*) es constante es una cónica. La razón constante e es la *excentricidad* de la cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$.
2. La cónica es una parábola si $e = 1$.
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$.

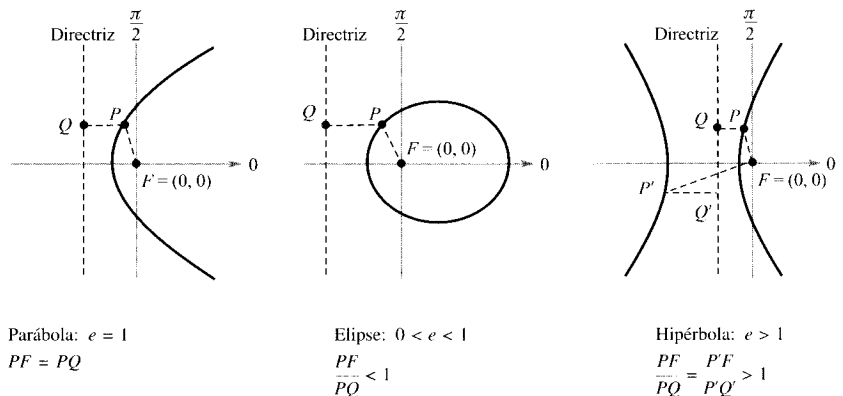


FIGURA 9.56

En la Figura 9.56, puede observarse que para cada tipo de cónica el polo corresponde al punto fijo (foco) de la definición. La ventaja de esta localización puede verse en la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 9.17 ECUACIONES EN POLARES DE LAS CÓNICAS

La gráfica de una ecuación en polares de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$$

es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $|d|$ la distancia entre el foco situado en el polo y su correspondiente directriz.

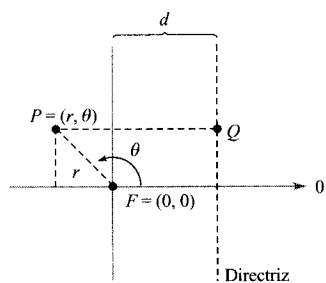


FIGURA 9.57

Demostración: Probemos el caso $r = ed/(1 + e \cos \theta)$ con $d > 0$. En la Figura 9.57, consideremos una directriz vertical situada d unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$. Si $P = (r, \theta)$ es un punto de la gráfica de $r = ed/(1 + e \cos \theta)$, puede probarse que la distancia entre P y la directriz es

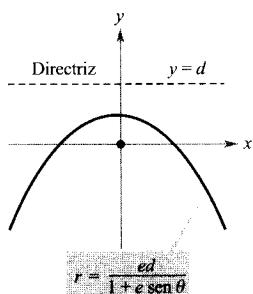
$$PQ = |d - x| = |d - r \cos \theta| = \left| \frac{r(1 + e \cos \theta)}{e} - r \cos \theta \right| = \left| \frac{r}{e} \right|$$

Como la distancia entre P y el polo es simplemente $PF = |r|$, el cociente entre PF y PQ es $PF/PQ = |r|/|r/e| = |e| = e$ y, de acuerdo con el Teorema 9.16, la gráfica de la ecuación debe ser una cónica. Las demostraciones de los otros casos son similares. \square

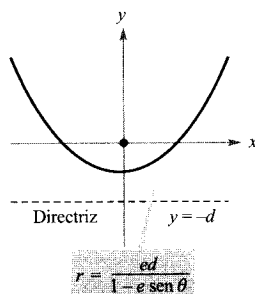
Los cuatro tipos de ecuaciones indicados del Teorema 9.17 admiten la siguiente clasificación, donde $d > 0$.

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) Directriz horizontal sobre el polo: | $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$ |
| b) Directriz horizontal bajo el polo: | $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$ |
| c) Directriz vertical a la derecha del polo: | $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ |
| d) Directriz vertical a la izquierda del polo: | $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ |

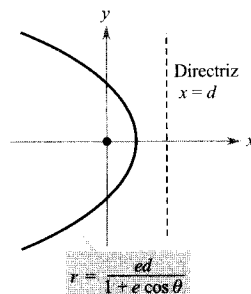
La Figura 9.58 ilustra estas cuatro posibilidades para una parábola.



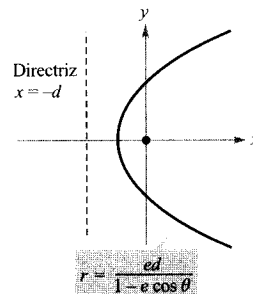
a)



b)



c)



d)

FIGURA 9.58

Los cuatro tipos de ecuaciones en polares de una parábola.

EJEMPLO 1 Determinación de una cónica a partir de su ecuación

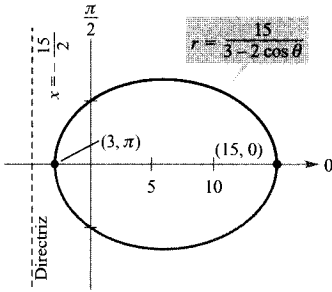


FIGURA 9.59

La gráfica de la cónica es una elipse con $e = \frac{2}{3}$.

Esbozar la gráfica de la cónica dada por $r = \frac{15}{3 - 2 \cos \theta}$.

Solución: Con el fin de determinar el tipo de cónica, escribimos la ecuación como

$$r = \frac{15}{3 - 2 \cos \theta} = \frac{5}{1 - (2/3) \cos \theta}$$

Por tanto, la gráfica es una elipse con $e = 2/3$. Podemos esbozar su mitad superior marcando puntos desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ (Figura 9.59). Después, utilizando la simetría respecto al eje polar, podemos dibujar la mitad inferior. \square

En la elipse de la Figura 9.59, el eje mayor es horizontal y los vértices están en $(15, 0)$ y $(3, \pi)$. Así pues, la longitud del eje *mayor* es $2a = 18$. Para hallar la longitud del eje *menor*, se puede recurrir a las ecuaciones $e = c/a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ y concluir que

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ea)^2 = a^2(1 - e^2) \quad \text{Elipse}$$

Como $e = \frac{2}{3}$, resulta ser

$$b^2 = 9^2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 45$$

así que $b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. En consecuencia, la longitud del eje menor es $2b = 6\sqrt{5}$. Un análisis análogo para las hipérbolas da

$$b^2 = c^2 - a^2 = (ea)^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1) \quad \text{Hipérbola}$$

EJEMPLO 2 Gráfica de una cónica a partir de su ecuación en polares

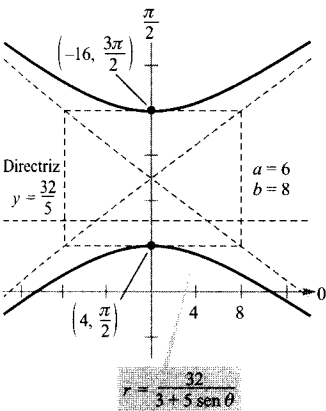


FIGURA 9.60

La gráfica de la cónica es una hipérbola con $e = \frac{5}{3}$.

Esbozar la gráfica de la ecuación en polares $r = \frac{32}{3 + 5 \sin \theta}$.

Solución: Dividiendo numerador y denominador por 3 resulta

$$r = \frac{32/3}{1 + (5/3) \sin \theta}$$

Como $e = \frac{5}{3} > 1$, la gráfica es una hipérbola. Dado que $d = \frac{32}{5}$, la directriz es la recta $y = \frac{32}{5}$. El eje transversal está en la recta $\theta = \pi/2$ y los vértices en

$$(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad (r, \theta) = \left(-16, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Como la longitud del eje transversal es 12, vemos que $a = 6$. Para hallar b , escribimos

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 6^2 \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \right] = 64$$

Por consiguiente, $b = 8$. Finalmente, podemos usar a y b para determinar las asíntotas de la hipérbola y obtener el dibujo aproximado de la Figura 9.60. \square

Leyes de Kepler



JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Kepler formuló sus tres leyes a partir de los datos extensivos recopilados por el astrónomo danés Tycho Brahe y de la observación directa de la órbita de Marte.

Las leyes de Kepler, que deben su nombre al astrónomo alemán Johannes Kepler, describen las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos.
2. El rayo del Sol al planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol*.

Aunque Kepler las obtuvo empíricamente, estas leyes fueron validadas posteriormente por Newton. De hecho, Newton fue capaz de demostrar que cada una de las leyes puede deducirse de un conjunto de leyes universales del movimiento y de la gravitación que gobiernan el movimiento de todos los cuerpos celestes, incluyendo cometas y satélites. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, relativo al cometa que lleva el nombre del matemático y físico inglés Edmund Halley (1656-1742).

EJEMPLO 3 El cometa Halley

El cometa Halley describe una órbita elíptica de excentricidad $e \approx 0,97$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 36,18 unidades astronómicas (una unidad astronómica se define como la distancia media entre la Tierra y el Sol, 93 millones de millas.) Hallar una ecuación en polares de la órbita. ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

Solución: Utilizando un eje vertical, podemos escoger una ecuación de la forma

$$r = \frac{ed}{(1 + e \sen \theta)}$$

* Si se usa la Tierra como referencia con un período de un año y una distancia de una unidad astronómica, la constante de proporcionalidad es 1. Por ejemplo, como Marte tiene una distancia media al Sol de $D = 1,523$ UA, su período P viene dado por $D^3 = P^3$. Así pues, el período de Marte es $P = 1,88$.

Puesto que los vértices de la elipse se dan en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, la longitud del eje mayor es la suma de los valores de r en los vértices, como muestra la Figura 9.61. Esto es,

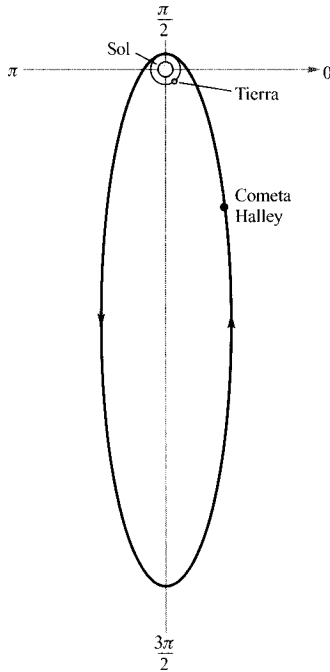


FIGURA 9.61

$$2a = \frac{0,97d}{1 + 0,97} + \frac{0,97d}{1 - 0,97}$$

$$36,18 \approx 32,83d$$

Por tanto, $d \approx 1,102$ y $ed \approx (0,97)(1,102) \approx 1,069$. Introduciendo este valor en la ecuación, se obtiene

$$r = \frac{1,069}{1 + 0,97 \text{ sen } \theta}$$

donde r se mide en unidades astronómicas. Para hallar el punto más próximo al Sol (el foco), podemos escribir $c = ea \approx (0,97)(18,09) \approx 17,55$. Como c es la distancia entre el foco y el centro, el punto más próximo es

$$a - c \approx 18,09 - 17,55$$

$$\approx 0,54 \text{ UA}$$

$$\approx 50.000.000 \text{ mi}$$

□

La segunda ley de Kepler establece que cuando un planeta se mueve alrededor del Sol, un rayo desde el Sol hasta el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley también se aplica a los cometas y asteroides con órbitas elípticas. Por ejemplo, la Figura 9.62 muestra la órbita del asteroide Apolo alrededor del Sol. Aplicando la segunda ley de Kepler a este asteroide, vemos que cuanto más cerca está del Sol, mayor es su velocidad, ya que un rayo corto debe moverse rápidamente para barrer tanto área como un rayo largo.

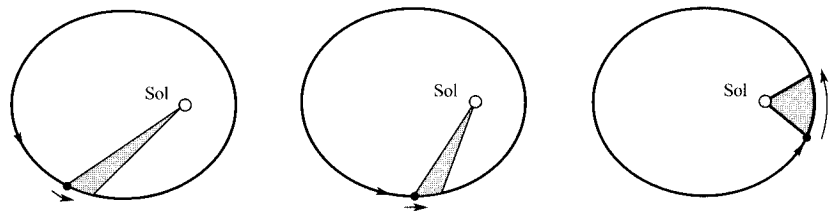


FIGURA 9.62

Un rayo del Sol al asteroide barre áreas iguales en tiempos iguales.

EJEMPLO 4 El asteroide Apolo

El asteroide Apolo tiene un período de 478 días terrestres, y su órbita se describe aproximadamente por la elipse

$$r = \frac{1}{1 + (5/9) \cos \theta} = \frac{9}{9 + 5 \cos \theta}$$

donde r se mide en unidades astronómicas. ¿Cuánto tiempo invierte Apolo en desplazarse desde la posición dada por $\theta = -\pi/2$ a $\theta = \pi/2$ (Figura 9.63)?

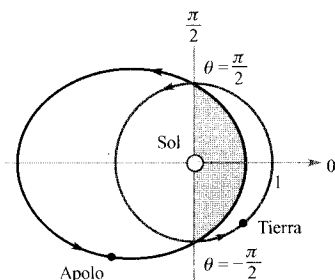


FIGURA 9.63

Solución: Comenzamos por hallar el área barrida cuando θ crece de $-\pi/2$ a $\pi/2$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{9}{9 + 5 \cos \theta} \right)^2 d\theta \end{aligned}$$

Empleando la sustitución $u = \operatorname{tg}(\theta/2)$, discutida en la Sección 7.6, obtenemos

$$A = \frac{81}{112} \left[\frac{-5 \operatorname{sen} \theta}{9 + 5 \cos \theta} + \frac{18}{\sqrt{56}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{56} \operatorname{tg}(\theta/2)}{14} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 0,90429$$

Dado que el eje mayor de la elipse tiene longitud $2a = 81/28$ y su excentricidad es $e = 5/9$, deducimos que $b = a\sqrt{1 - e^2} = 9/\sqrt{56}$. Por tanto, el área de la elipse es

$$\text{Área de la elipse} = \pi ab = \pi \left(\frac{81}{56} \right) \left(\frac{9}{\sqrt{56}} \right) \approx 5,46507$$

Como el tiempo requerido para completar la órbita es 478 días, de la segunda ley de Kepler se sigue que el tiempo necesario para desplazarse de la posición $\theta = -\pi/2$ a la $\theta = \pi/2$ viene dado por

$$\frac{t}{478} = \frac{\text{área del segmento elíptico}}{\text{área de la elipse}} \approx \frac{0,90429}{5,46507}$$

lo que implica $t \approx 79$ días. □

Ejercicios de la Sección 9.6

Razonamiento gráfico En los Ejercicios 1-4, representar en una calculadora la ecuación en polares si a) $e = 1$, b) $e = 0,5$ y c) $e = 1,5$. Identificar la cónica.

1. $r = \frac{2e}{1 + e \cos \theta}$

2. $r = \frac{2e}{1 - e \cos \theta}$

3. $r = \frac{2e}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$

4. $r = \frac{2e}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$

5. Consideremos la ecuación en polares

$$r = \frac{4}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

a) Usando una calculadora, representar la ecuación para $e = 0,1$, $e = 0,25$, $e = 0,5$, $e = 0,75$ y $e = 0,9$. Identificar la cónica y discutir cómo varía su forma cuando $e \rightarrow 1^-$ y $e \rightarrow 0^+$.

b) Representar asimismo la ecuación para $e = 1$. Identificar la cónica.

c) Representar la ecuación para $e = 1,1$, $e = 1,5$ y $e = 2$. Identificar la cónica y discutir cómo varía su forma cuando $e \rightarrow 1^+$ y $e \rightarrow \infty$.

6. Consideremos la ecuación en polares

$$r = \frac{4}{1 - 0,4 \cos \theta}$$

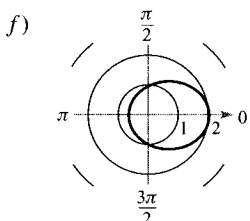
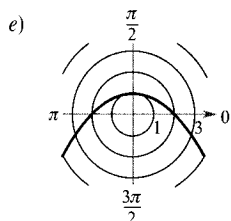
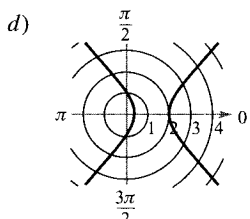
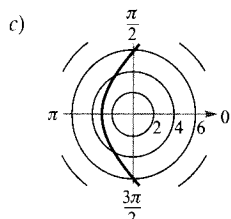
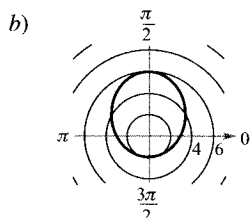
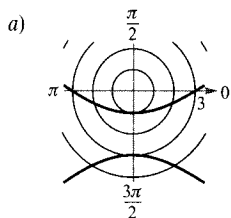
a) Identificar la cónica sin representar gráficamente la ecuación.

b) Sin representar gráficamente las siguientes ecuaciones, describir en qué difiere cada una de la ecuación en polares dada arriba.

$$r = \frac{4}{1 + 0,4 \cos \theta}, \quad r = \frac{4}{1 - 0,4 \operatorname{sen} \theta}$$

c) Comprobar gráficamente los resultados del apartado b).

En los Ejercicios 7-12, asociar a cada ecuación en polares su gráfica.



7. $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$

8. $r = \frac{2}{2 - \cos \theta}$

9. $r = \frac{3}{1 - 2 \sin \theta}$

10. $r = \frac{2}{1 + \sin \theta}$

11. $r = \frac{6}{2 - \sin \theta}$

12. $r = \frac{2}{2 + 3 \cos \theta}$

En los Ejercicios 13-22, esbozar e identificar la gráfica. Confirmar los resultados con ayuda de una calculadora.

13. $r = \frac{-1}{1 - \sin \theta}$

14. $r = \frac{6}{1 + \cos \theta}$

15. $r = \frac{6}{2 + \cos \theta}$

16. $r = \frac{3}{3 + 2 \sin \theta}$

17. $r(2 + \sin \theta) = 4$

18. $r(3 - 2 \cos \theta) = 6$

19. $r = \frac{5}{-1 + 2 \cos \theta}$

20. $r = \frac{-3}{2 + 4 \sin \theta}$

21. $r = \frac{3}{2 + 6 \sin \theta}$

22. $r = \frac{4}{1 + 2 \cos \theta}$

En los Ejercicios 23-26, representar en una calculadora la ecuación en polares. Identificar la gráfica.

23. $r = \frac{3}{-4 + 2 \sin \theta}$

24. $r = \frac{-3}{2 + 4 \sin \theta}$

25. $r = \frac{-1}{1 - \cos \theta}$

26. $r = \frac{2}{2 + 3 \sin \theta}$

En los Ejercicios 27-30, representar la cónica con ayuda de una calculadora. Describir en qué difiere la gráfica de la del ejercicio indicado.

27. $r = \frac{-1}{1 - \sin(\theta - \pi/4)}$ (Véase Ejercicio 13.)

28. $r = \frac{6}{1 + \cos(\theta - \pi/3)}$ (Véase Ejercicio 14.)

29. $r = \frac{6}{2 + \cos(\theta + \pi/6)}$ (Véase Ejercicio 15.)

30. $r = \frac{-3}{2 + 4 \sin(\theta + 2\pi/3)}$ (Véase Ejercicio 20.)

31. Escribir la ecuación de la elipse obtenida por rotación de $\pi/4$, en sentido antihorario, de la parábola $r = 5/(5 + 3 \cos \theta)$.

32. Escribir la ecuación de la parábola obtenida por rotación de $\pi/6$, en sentido horario, de la parábola $r = 2/(1 + \sin \theta)$.

En los Ejercicios 33-44, hallar una ecuación en polares de la cónica con su foco en el polo. (Por conveniencia, la ecuación de la directriz se da en forma rectangular.)

<u>Cónica</u>	<u>Excentricidad</u>	<u>Directriz</u>
33. Parábola	$e = 1$	$x = -1$
34. Parábola	$e = 1$	$y = 1$
35. Elipse	$e = \frac{1}{2}$	$y = 1$
36. Elipse	$e = \frac{3}{4}$	$y = -2$
37. Hipérbola	$e = 2$	$x = 1$
38. Hipérbola	$e = \frac{3}{2}$	$x = -1$

<u>Cónica</u>	<u>Vértices</u>
39. Parábola	$(1, -\pi/2)$
40. Parábola	$(5, \pi)$
41. Elipse	$(2, 0), (8, \pi)$
42. Elipse	$(2, \pi/2), (4, 3\pi/2)$
43. Hipérbola	$(1, 3\pi/2), (9, 3\pi/2)$
44. Hipérbola	$(2, 0), (10, 0)$

45. Demostrar que la ecuación en polares de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

46. Demostrar que la ecuación en polares de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es

$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

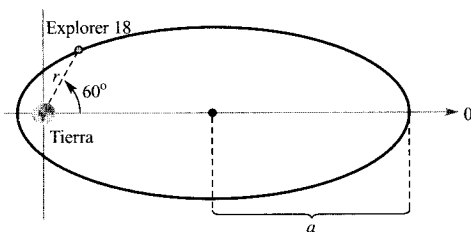
En los Ejercicios 47-50, utilizar los resultados de los Ejercicios 45 y 46 para escribir la ecuación de la cónica en polares.

47. Elipse: foco en $(4, 0)$; vértices en $(5, 0)$, $(5, \pi)$.
 48. Hipérbola: foco en $(5, 0)$; vértices en $(4, 0)$, $(4, \pi)$.
 49. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 50. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

En los Ejercicios 51 y 52, usar un programa de integración para estimar con dos cifras decimales exactas el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación en polares.

51. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$ 52. $r = \frac{2}{3 - 2 \sin \theta}$

53. **Explorer 18** El 26 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122.000 millas (véase figura). El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación en polares de la órbita y la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\theta = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4.000 millas.)



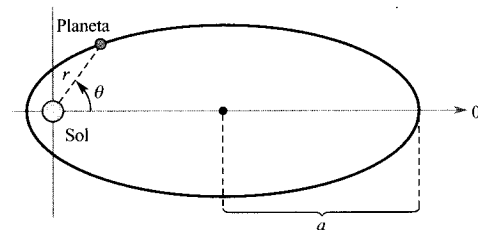
54. **Movimiento planetario** Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Supongamos que el foco está situado en el polo y el eje mayor en el eje polar, y que la longitud del eje mayor es $2a$ (véase figura).

- a) Probar que la ecuación en polares de la órbita viene dada por

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta}$$

donde e es la excentricidad.

- b) Usar el resultado del apartado a) para probar que la distancia mínima (*distancia del perihelio*) del Sol al planeta es $r = a(1 - e)$ y la distancia máxima (*distancia del afelio*) es $r = a(1 + e)$.



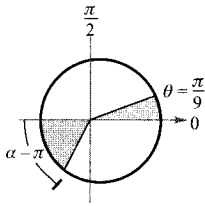
En los Ejercicios 55-58, utilizar el resultado del Ejercicio 54 para hallar la ecuación en polares del planeta, así como las distancias del perihelio y del afelio.

55. Tierra $a = 92,957 \times 10^6$ millas
 $e = 0,0167$
 56. Saturno $a = 1,427 \times 10^9$ km
 $e = 0,0543$
 57. Plutón $a = 5,900 \times 10^9$ km
 $e = 0,2481$
 58. Mercurio $a = 36,0 \times 10^6$ millas
 $e = 0,206$

59. **Movimiento planetario** En el Ejercicio 57, se halló la ecuación en polares de la órbita elíptica de Plutón. Usando la ecuación y un programa de integración:

- a) Estimar el área barrida por un rayo del Sol al planeta cuando θ crece de 0 a $\pi/9$. Utilizar este resultado para calcular cuántos años tarda el planeta en recorrer este arco si el período de una revolución alrededor del Sol es 248 años.
 b) Mediante ensayo y error, estimar el ángulo α tal que el área barrida por un rayo del Sol al planeta cuando θ crece de π hasta α sea igual al área encontrada en el apartado a) (véase figura en la página siguiente). ¿Barre el rayo un ángulo mayor o menor para generar el mismo área? ¿Por qué?

- c) Estimar las distancias recorridas por el planeta en los apartados a) y b). Utilizar estas distancias para calcular aproximadamente el número medio de kilómetros que viaja el planeta por año en los dos casos.



60. ¿Qué sección cónica representa la siguiente ecuación?

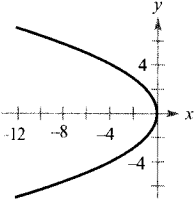
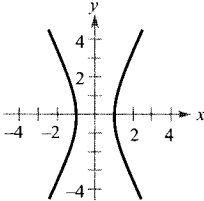
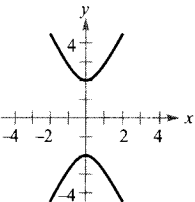
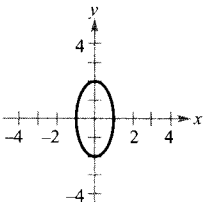
$$r = a \operatorname{sen} \theta + b \operatorname{cos} \theta$$

61. Probar que las gráficas de la siguientes ecuaciones se cortan perpendicularmente.

$$r = \frac{ed}{1 + \operatorname{sen} \theta} \quad \text{y} \quad r = \frac{ed}{1 - \operatorname{sen} \theta}$$

Ejercicios de repaso del Capítulo 9

En los Ejercicios 1-4, asociar a cada ecuación su gráfica.

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
1. $4x^2 + y^2 = 4$ 2. $4x^2 - y^2 = 4$
3. $y^2 = -4x$ 4. $y^2 - 4x^2 = 4$

En los Ejercicios 5-10, analizar cada ecuación y esbozar su gráfica. Confirmar los resultados con una calculadora.

5. $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$
6. $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$
7. $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$
8. $4x^2 + y^2 - 16x + 15 = 0$
9. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$
10. $4x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 11 = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, hallar una ecuación de la parábola.

11. Vértice: (0, 2) 12. Vértice: (4, 2)
Directriz: $x = -3$ Foco: (4, 0)

En los Ejercicios 13 y 14, hallar una ecuación de la elipse.

13. Vértices: (-3, 0), (7, 0); Focos: (0, 0), (4, 0).

14. Centro: (0, 0); Puntos solución: (1, 2), (2, 0).

En los Ejercicios 15 y 16, estimar el perímetro de la elipse con una calculadora.

15. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 16. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

17. Hallar la ecuación de una recta que es tangente a la parábola $y = x^2 - 2x + 2$ y perpendicular a la recta $y = x - 2$.

18. **Antena de recepción de un satélite** La sección de una gran antena parabólica admite el modelo $y = x^2/200$, $-100 \leq x \leq 100$. El equipo de recepción y transmisión está situado en el foco. Hallar a) las coordenadas del foco, b) el área de la antena.

19. Consideremos un camión de bomberos con un tanque de agua de 16 pies de longitud cuyas secciones verticales son elipses descritas por la ecuación $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

- a) Calcular el volumen del tanque.
b) Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo del tanque cuando está lleno de agua. (La densidad del agua es 62,4 libras por pie cúbico.)
c) Hallar la profundidad del agua si el tanque está lleno a 3/4 de su capacidad y el camión está al nivel del suelo.
d) Estimar el área de la superficie del tanque.

20. Consideremos la región acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{excentricidad } e = c/a$$

- a) Probar que su área es πab .

- b) Probar que el sólido generado al hacerla girar en torno al eje menor de la elipse (elipsoide de revolución oblongo) tiene un volumen de $V = 4\pi a^2 b/3$ y que el área de su superficie es

$$S = 2\pi a^2 + \pi \left(\frac{b^2}{e} \right) \ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right)$$

- c) Probar que el sólido generado por revolución de la región alrededor del eje mayor de la elipse (elipsoide de revolución prolato) tiene un volumen de $V = 4\pi ab^2/3$ y que el área de su superficie es

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi \left(\frac{ab}{e} \right) \operatorname{arcsen} e$$

- d) Utilizando los resultados de los apartados b) y c), hallar los volúmenes y áreas de los esferoides prolato y oblongo generados por revolución de la región limitada por la gráfica de

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

alrededor del eje apropiado.

En los Ejercicios 21-30, a) hallar dy/dx y todos los puntos de tangencia horizontal, b) eliminar el parámetro cuando sea posible, y c) esbozar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

21. $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t$ 22. $x = t + 4, y = t^2$

23. $x = \frac{1}{t}, y = 2t + 3$ 24. $x = \frac{1}{t}, y = t^2$

25. $x = \frac{1}{2t + 1}$ 26. $x = 2t - 1$
 $y = \frac{1}{t^2 - 2t}$ $y = \frac{1}{t^2 - 2t}$

27. $x = 3 + 2 \cos \theta$ 28. $x = 6 \cos \theta$
 $y = 2 + 5 \sin \theta$ $y = 6 \sin \theta$

29. $x = \cos^3 \theta$ 30. $x = e^t$
 $y = 4 \sin^3 \theta$ $y = e^{-t}$

En los Ejercicios 31 y 32, usar una calculadora para a) dibujar la curva definida por las ecuaciones paramétricas, b) hallar $dx/d\theta, dy/d\theta$ y dy/dx para $\theta = \pi/6$, y c) dibujar la recta tangente a la curva en $\theta = \pi/6$.

31. $x = \operatorname{ctg} \theta$ 32. $x = 2\theta - \operatorname{sen} \theta$
 $y = \operatorname{sen} 2\theta$ $y = 2 - \cos \theta$

En los Ejercicios 33-36, encontrar una representación paramétrica de la recta o cónica.

33. Recta que pasa por $(-2, 6)$ y $(3, 2)$.
 34. Circunferencia de centro en $(5, 3)$ y radio 2.
 35. Elipse de centro $(-3, 4)$, eje mayor horizontal de longitud 8 y eje menor de longitud 6.
 36. Hipérbola: Vértices en $(0, \pm 4)$; foco en $(0, \pm 5)$.

37. **Motor rotatorio** El motor rotatorio fue desarrollado por Felix Wankel en los años cincuenta (véase página 276). Su rotor, en forma de triángulo equilátero modificado, se mueve en una cámara que, en dos dimensiones, es una epitrocoide. Con ayuda de una calculadora, representar gráficamente el modelo para la cámara dado por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos 3\theta + 5 \cos \theta \quad e \quad y = \sin 3\theta + 5 \sin \theta$$

38. **Hipocicloides** Una hipocicloide tiene ecuaciones paramétricas

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{a - b}{b} t \right)$$

e

$$y = (a - b) \sin t - b \sin \left(\frac{a - b}{b} t \right)$$

Representarla, usando una calculadora, para los siguientes valores de a y b .

- a) $a = 2, b = 1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = 4, b = 1$
 d) $a = 10, b = 1$ e) $a = 3, b = 2$ f) $a = 4, b = 3$

39. **Cicloides** Eliminar el parámetro de

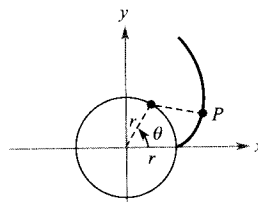
$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad e \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

para demostrar que la ecuación rectangular de una cicloide es

$$x = a \arccos \left(\frac{a - y}{a} \right) \pm \sqrt{2ay - y^2}$$

40. **Involuta de una circunferencia** La involuta de una circunferencia es la curva descrita por el extremo P de una cuerda que se mantiene tensa mientras se va desenrollando de una polea que no gira (véase figura). Probar que una representación paramétrica de la involuta es

$$x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta) \quad e \quad y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta)$$



En los Ejercicios 41 y 42, hallar la longitud de la curva representada por las ecuaciones paramétricas sobre el intervalo dado.

$$\begin{array}{ll} 41. & x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta) & 42. & x = 6 \cos \theta \\ & y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta) & & y = 6 \operatorname{sen} \theta \\ & 0 \leq \theta \leq \pi & & 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

En los Ejercicios 43 y 44, se dan las coordenadas cartesianas de un punto. Representar el punto y hallar *dos* conjuntos de coordenadas polares del mismo para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$43. (4, -4) \qquad 44. (-1, 3)$$

En los Ejercicios 45-52, pasar la ecuación en polares a forma rectangular.

$$\begin{array}{ll} 45. & r = 3 \cos \theta & 46. & r = 10 \\ 47. & r = -2(1 + \cos \theta) & 48. & r = \frac{1}{2 - \cos \theta} \\ 49. & r^2 = \cos 2\theta & 50. & r = 4 \sec \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \\ 51. & r = 4 \cos 2\theta \sec \theta & 52. & \theta = \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

En los Ejercicios 53-56, pasar la ecuación rectangular a forma polar.

$$\begin{array}{ll} 53. & (x^2 + y^2)^2 = ax^2y & 54. & x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 55. & x^2 + y^2 = a^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)^2 & 56. & (x^2 + y^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)^2 = a^2 \end{array}$$

En los Ejercicios 57-70, dibujar aproximadamente la gráfica de la ecuación en polares.

$$\begin{array}{ll} 57. & r = 4 & 58. & \theta = \frac{\pi}{12} \\ 59. & r = -\sec \theta & 60. & r = 3 \operatorname{cosec} \theta \\ 61. & r = -2(1 + \cos \theta) & 62. & r = 3 - 4 \cos \theta \\ 63. & r = 4 - 3 \cos \theta & 64. & r = 2\theta \\ 65. & r = -3 \cos 2\theta & 66. & r = \cos 5\theta \\ 67. & r^2 = 4 \operatorname{sen}^2 2\theta & 68. & r^2 = \cos 2\theta \\ 69. & r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta} & 70. & r = \frac{4}{5 - 3 \cos \theta} \end{array}$$

En los Ejercicios 71-74, representar la gráfica de la ecuación en polares en una calculadora.

$$\begin{array}{ll} 71. & r = \frac{3}{\cos(\theta - \pi/4)} & 72. & r = 2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \\ 73. & r = 4 \cos 2\theta \sec \theta & 74. & r = 4(\sec \theta - \cos \theta) \end{array}$$

En los Ejercicios 75 y 76, a) hallar las tangentes en el polo, b) hallar todos los puntos de tangencia horizontal o vertical, y c) usando una calculadora, representar la gráfica de la ecuación y dibujar una recta tangente a la gráfica en $\theta = \pi/6$.

$$75. r = 1 - 2 \cos \theta \qquad 76. r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$$

En los Ejercicios 77 y 78, demostrar que las gráficas de las ecuaciones en polares son ortogonales en los puntos de intersección. Confirmar los resultados gráficamente con ayuda de una calculadora.

$$\begin{array}{ll} 77. & r = 1 + \cos \theta & 78. & r = a \operatorname{sen} \theta \\ & r = 1 - \cos \theta & & r = a \cos \theta \end{array}$$

79. Hallar el ángulo entre la circunferencia $r=3 \operatorname{sen} \theta$ y el caracol $r=4-5 \operatorname{sen} \theta$ en el punto de intersección $(3/2, \pi/6)$.

80. ¿Verdadero o falso? Existe una única representación en coordenadas polares para cada punto del plano. (Explicar la respuesta.)

En los Ejercicios 81-88, utilizar una calculadora para representar gráficamente la ecuación en polares. Plantear una integral para hallar el área de la región indicada y usar un programa de integración para estimar el valor de la integral con una precisión de dos cifras decimales.

- 81. Interior de $r = 2 + \cos \theta$
- 82. Interior de $r = 5(1 - \operatorname{sen} \theta)$
- 83. Interior de $r = \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$
- 84. Interior de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$
- 85. Interior de $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$
- 86. Interior común a $r = 3$ y $r^2 = 18 \operatorname{sen} 2\theta$
- 87. Interior común a $r = 4 \cos \theta$ y $r = 2$
- 88. Región limitada por el eje polar y $r = e^\theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

En los Ejercicios 89 y 90, hallar la longitud de la curva dada por la ecuación en polares.

$$89. r = a(1 - \cos \theta) \qquad 90. r = a \cos 2\theta$$

En los Ejercicios 91-96, encontrar una ecuación en polares para la recta o la cónica.

- 91. Círculo Centro: $(5, \pi/2)$
Punto solución: $(0, 0)$
- 92. Recta Punto solución: $(0, 0)$
Pendiente: $\sqrt{3}$
- 93. Parábola Vértice: $(2, \pi)$
Foco: $(0, 0)$
- 94. Parábola Vértice: $(2, \pi/2)$
Foco: $(0, 0)$
- 95. Elipse Vértices: $(5, 0), (1, \pi)$
Un foco: $(0, 0)$
- 96. Hipérbola Vértices: $(1, 0), (7, 0)$
Un foco: $(0, 0)$

Capítulo 10

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

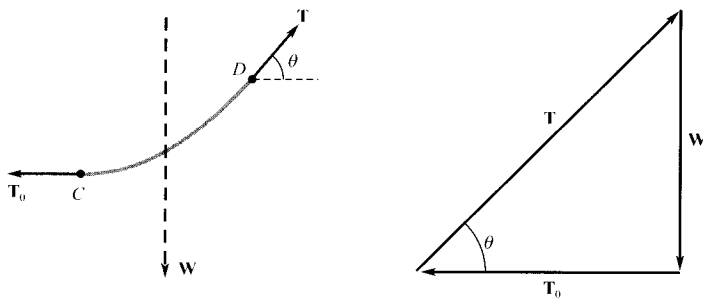
Los puentes más antiguos todavía en uso son similares en diseño al puente Clapper, en Devon (Inglaterra), que se supone construido en el siglo XIII.

Puentes suspendidos

Los puentes existen desde el momento mismo en que el hombre primitivo colocó un tronco para poder cruzar un río. El puente más antiguo del que se tiene noticia estaba construido con losas de piedra. Desde siempre, los ingenieros se han ocupado en la construcción de puentes cada vez mayores, más resistentes y más estéticos.

Uno de los diseños más frecuentes es el de los puentes suspendidos, sobre todo en situaciones que requieren un puente largo de una pieza. La calzada pende de cables soportados por torres fijas. Los puentes suspendidos de diseño adecuado, como el Golden Gate o el de Brooklyn, son utilizables durante muchos años. Por el contrario, un diseño defectuoso puede terminar en tragedia. Para que un puente suspendido sea estable, las fuerzas que actúan sobre sus cables principales han de estar en equilibrio. El deseado equilibrio se consigue con cables parabólicos.

Joseph Strauss diseñó en 1930 el Golden Gate de San Francisco, considerado aún hoy como una de las obras maestras de la ingeniería civil.



Las fuerzas que actúan sobre los cables principales se han representado en la figura como segmentos dirigidos que indican a la vez la magnitud y la dirección de las fuerzas. En el centro del cable parabólico, la tensión T_0 es horizontal. T es la tensión en el punto D , dirigida según la tangente en D . La carga, uniformemente distribuida, que soporta la sección CD viene representada por w .

CUESTIONES

1. Las fuerzas ejercidas sobre el cable están relacionadas por un «triángulo de fuerzas», como ilustra la figura de la derecha en la página anterior. Relacione, usando funciones trigonométricas, las magnitudes $\|\mathbf{T}_0\|$, $\|\mathbf{T}\|$, y $\|\mathbf{W}\|$ de los vectores \mathbf{T}_0 , \mathbf{T} , y \mathbf{W} .
2. El cable principal del Golden Gate está suspendido, en cada extremo, de torres de 520 pies sobre la calzada, que mide 4.200 pies. El punto más bajo, en el centro del cable, está 6 pies por encima de la calzada. Supuesto que el cable cuelga en forma de parábola, halle una ecuación que describa su forma.
3. Con esa ecuación, calcule el ángulo agudo θ de la tensión \mathbf{T} en un punto que dista horizontalmente 400 pies del centro del puente. Expresé la magnitud de \mathbf{T} en términos de \mathbf{T}_0 y \mathbf{W} .
4. Calcule el ángulo y la magnitud de \mathbf{T} en un punto que dista horizontalmente 200 pies del centro.
5. En general, ¿dónde cabe esperar que sea máxima la tensión \mathbf{T} ? ¿Y dónde mínima? Explique las respuestas.

Vectores y geometría del espacio

CONTENIDO

- Expresión de un vector en componentes
- Operaciones con vectores
- Vectores unitarios canónicos
- Aplicaciones de los vectores

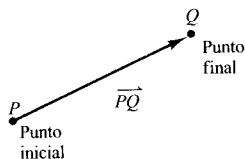


FIGURA 10.1
Un segmento dirigido.

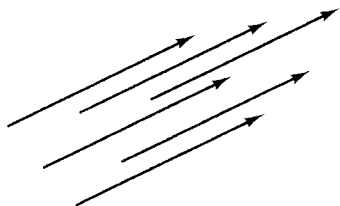


FIGURA 10.2
Segmentos dirigidos equivalentes.

10.1

Vectores en el plano

Expresión de un vector en componentes

Muchas magnitudes geométricas o físicas, como área, volumen, temperatura, masa y tiempo, se pueden caracterizar mediante números reales en una escala adecuada de medida. Se les denomina **magnitudes escalares**, y el número real asociado con cada una de ellas se llama un **escalar**.

Otras magnitudes, como fuerza, velocidad y aceleración, involucran un valor numérico y una dirección, de modo que no se pueden representar completamente por un número real. Como muestra la Figura 10.1, para representar tales magnitudes se utiliza un **segmento (recto) dirigido**. La **longitud** del segmento dirigido \vec{PQ} , con **punto inicial** P y **punto final** Q , se denota por $\|\vec{PQ}\|$. Segmentos como los de la Figura 10.2, de igual longitud y dirección, se dice que son **equivalentes**. El conjunto de todos los segmentos dirigidos equivalentes a un segmento dirigido dado \vec{PQ} es un **vector en el plano** y se denota por $\mathbf{v} = \vec{PQ}$. En los libros suelen utilizarse letras en negrita, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , ... para denotar los vectores. Sin embargo, cuando se escribe a mano suelen denotarse colocando sobre las letras una flecha, digamos \vec{u} , \vec{v} , y \vec{w} .

Es importante tener presente que un vector en el plano admite representación mediante muchos segmentos dirigidos distintos, concretamente todos los que tienen su misma longitud y apuntan en su misma dirección.

EJEMPLO 1 Representación de vectores por segmentos dirigidos

Sea \mathbf{v} el vector representado por el segmento dirigido que va de $(0, 0)$ a $(3, 2)$, y \mathbf{u} el representado por el segmento dirigido que va de $(1, 2)$ a $(4, 4)$. Probar que $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Solución: En la Figura 10.3 se han denotado por $P(0, 0)$ y $Q(3, 2)$ los puntos inicial y final de \mathbf{v} , y por $R(1, 2)$ y $S(4, 4)$ los de \mathbf{u} . La fórmula de la distancia nos permite verificar que \vec{PQ} y \vec{RS} tienen la *misma longitud*, ya que

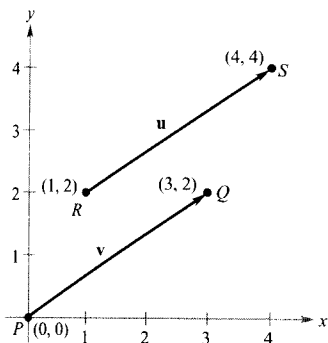


FIGURA 10.3
Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son iguales.

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{13} \quad \text{Longitud de } \vec{PQ}$$

$$\|\vec{RS}\| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13} \quad \text{Longitud de } \vec{RS}$$

Además, ambos segmentos tienen la *misma dirección*, porque apuntan hacia la derecha y hacia arriba sobre rectas de igual pendiente:

$$\text{Pendiente de } \vec{PQ} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

y

$$\text{Pendiente de } \vec{RS} = \frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Como \vec{PQ} y \vec{RS} tienen la misma longitud y la misma dirección, concluimos que los dos vectores son iguales, es decir,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}$$

□

El segmento dirigido con punto inicial en el origen suele resultar el representante más conveniente de un conjunto de segmentos dirigidos equivalentes como el de la Figura 10.3. Este representante de \mathbf{v} se dice que está en **posición canónica**. Un segmento dirigido cuyo punto inicial es el origen puede caracterizarse dando sólo las coordenadas de su punto final $Q(v_1, v_2)$, como indica la Figura 10.4.

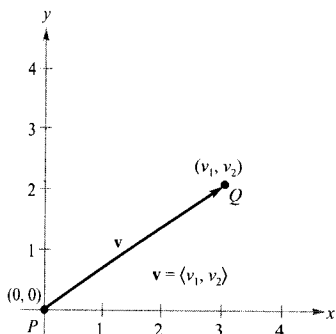


FIGURA 10.4
Posición canónica de un vector.

DEFINICIÓN DE LAS COMPONENTES DE UN VECTOR EN EL PLANO

Si \mathbf{v} es un vector en el plano con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2) , la **expresión en componentes** de \mathbf{v} viene dada por

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Las coordenadas v_1 y v_2 se llaman las **componentes de \mathbf{v}** . Si tanto el punto inicial como el final son el origen, \mathbf{v} se llama el **vector cero** (o **vector nulo**) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Esta definición implica que dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son iguales si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Para pasar de segmentos dirigidos a componentes, o viceversa, deben seguirse estos procedimientos:

1. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos inicial y final de un segmento dirigido, la expresión en componentes del vector \mathbf{v} , representado por \vec{PQ} es $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle$. Además, la **longitud de \mathbf{v}** es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

Longitud de un vector

2. Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, \mathbf{v} puede ser representado por el segmento dirigido, en posición canónica, que va de $P(0, 0)$ a $Q(v_1, v_2)$.

La longitud de \mathbf{v} se llama también **norma de \mathbf{v}** . Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, se dice que \mathbf{v} es un **vector unitario**. Por otra parte, $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si \mathbf{v} es el vector cero $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 2 Componentes y longitud de un vector

Hallar la expresión en componentes y calcular la longitud del vector \mathbf{v} con punto inicial $(3, -7)$ y punto final $(-2, 5)$.

Solución: Denotemos $P(3, -7) = (p_1, p_2)$ y $Q(-2, 5) = (q_1, q_2)$. Entonces, las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son

$$v_1 = q_1 - p_1 = -2 - 3 = -5$$

$$v_2 = q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12$$

Así pues, como muestra la Figura 10.5, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$, y la longitud de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

□

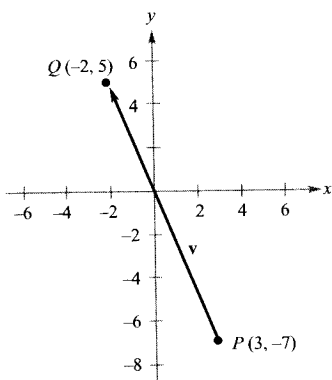


FIGURA 10.5

Expresión en componentes de \mathbf{v} : $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$.

Operaciones con vectores

DEFINICIÓN DE LA SUMA DE VECTORES Y DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores en el plano y k un escalar.

1. La **suma vectorial** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.
2. El **múltiplo escalar** de k y \mathbf{u} es el vector $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2 \rangle$.
3. El **negativo** de \mathbf{v} es el vector $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle$.
4. La **diferencia** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$.

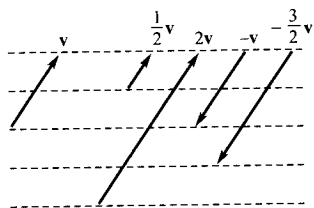


FIGURA 10.6

La multiplicación escalar de \mathbf{v} .

Gráficamente, el producto de un vector \mathbf{v} por un escalar k es un vector que tiene longitud igual a k veces la de \mathbf{v} (Figura 10.6). Si k es positivo, $k\mathbf{v}$ apunta en la misma dirección que \mathbf{v} . Si k es negativo, $k\mathbf{v}$ apunta en la dirección opuesta a la de \mathbf{v} .

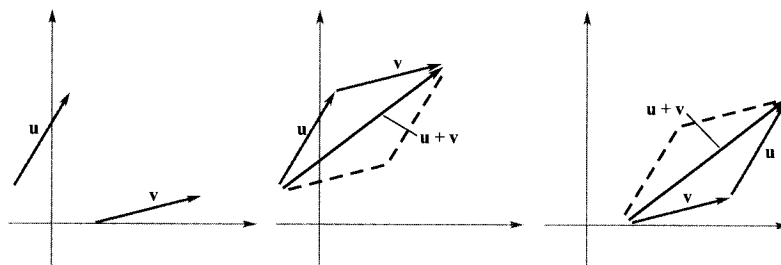
Para sumar dos vectores gráficamente, se colocan (sin cambiar sus longitudes y direcciones) con el punto inicial de uno coincidiendo con el punto final del otro, como en la Figura 10.7. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, llamado **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene a \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados adyacentes.

La Figura 10.8 ilustra la equivalencia de las definiciones geométrica y algebraica de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar y presenta (a la derecha) una interpretación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.



WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865)

Uno de los pioneros en el manejo de los vectores fue el matemático irlandés William Rowan Hamilton, quien dedicó muchos años al desarrollo del sistema de los cuaterniones, cantidades de tipo vectorial. Aunque estaba convencido de la utilidad de los cuaterniones, las operaciones que definió no constituyeron un modelo adecuado para los fenómenos físicos. Hubo que esperar hasta la segunda mitad del siglo XIX a que el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructurase la teoría de los cuaterniones de Hamilton de una forma útil para representar magnitudes físicas como fuerza, velocidad o aceleración.

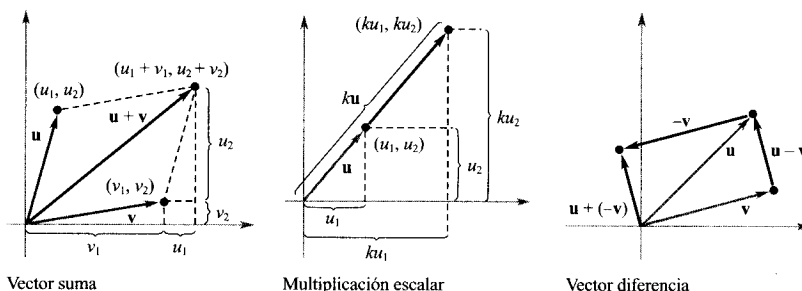


Para hallar $u + v$

1) Hacer coincidir el punto inicial de v con el punto final de u , o bien

2) Hacer coincidir el punto inicial de u con el punto final de v

FIGURA 10.7



Vector suma

Multiplicación escalar

Vector diferencia

FIGURA 10.8

EJEMPLO 3 Operaciones con vectores

Dados $v = \langle -2, 5 \rangle$ y $w = \langle 3, 4 \rangle$, calcular los vectores

- a) $\frac{1}{2}v$ b) $w - v$ c) $v + 2w$

Solución:

a) $\frac{1}{2}v = \left\langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5) \right\rangle = \left\langle -1, \frac{5}{2} \right\rangle$

b) $w - v = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2 \rangle = \langle 3 - (-2), 4 - 5 \rangle = \langle 5, -1 \rangle$

c) Al ser $2w = \langle 6, 8 \rangle$, se obtiene

$$v + 2w = \langle -2, 5 \rangle + \langle 6, 8 \rangle = \langle -2 + 6, 5 + 8 \rangle = \langle 4, 13 \rangle \quad \square$$

La suma de vectores y el producto por un escalar comparten muchas propiedades con la aritmética ordinaria, como pone de manifiesto el próximo teorema.

TEOREMA 10.1 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores en el plano, y sean c , d escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Propiedad conmutativa
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Propiedad asociativa
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ Identidad aditiva
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ Inversa aditiva
5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ Propiedad distributiva
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Propiedad distributiva
8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Demostración: La demostración de la *propiedad asociativa* para la suma de vectores utiliza la propiedad análoga para la suma de números reales.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle] + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle \\ &= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

Del mismo modo, la demostración de la *propiedad distributiva* se apoya en su homónima para números reales.

$$\begin{aligned}(c + d)\mathbf{u} &= (c + d)\langle u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle (c + d)u_1, (c + d)u_2 \rangle \\ &= \langle cu_1 + du_1, cu_2 + du_2 \rangle \\ &= \langle cu_1, cu_2 \rangle + \langle du_1, du_2 \rangle = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}\end{aligned}$$

Las demás se demuestran de forma similar. □



EMMY NOETHER (1882-1935)

La matemática alemana Emmy Noether contribuyó decisivamente al conocimiento de los sistemas de axiomas y está considerada la mujer más relevante en la historia reciente de la Matemática.

Cualquier conjunto de vectores (con un conjunto acompañante de escalares) que satisfaga las propiedades enunciadas en el Teorema 10.1 constituye un **espacio vectorial**. Esas ocho propiedades son los *axiomas de la estructura de espacio vectorial*. Así pues, ese teorema establece que el conjunto de todos los vectores en el plano (junto con el conjunto de los números reales) es un espacio vectorial. Para más información acerca de los espacios vectoriales, puede verse el libro *Elementary Linear Algebra*, 3.^a edición, de Larson y Edwards (Boston: Houghton Mifflin Company, 1996).

TEOREMA 10.2 LONGITUD DE UN MÚLTIPLO ESCALAR

Para todo vector \mathbf{v} y todo escalar c se cumple que

$$\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\| \quad |c| \text{ es el valor absoluto de } c$$

Demostración: Como $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2 \rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{v}\| &= \|\langle cv_1, cv_2 \rangle\| = \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2v_1^2 + c^2v_2^2} \\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= |c|\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ &= |c| \|\mathbf{v}\| \end{aligned} \quad \square$$

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre Emmy Noether, véase el artículo «Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician» de Clark Kimberling en *The Mathematics Teacher*, marzo 1982.

En muchas aplicaciones de los vectores es necesario hallar un vector unitario en la dirección de un vector conocido. El próximo teorema enseña cómo lograrlo.

TEOREMA 10.3 VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE \mathbf{v}

Si \mathbf{v} es un vector no nulo en el plano, el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} .

Demostración: Por ser $1/\|\mathbf{v}\|$, es positivo y $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, concluimos que \mathbf{u} tiene la misma dirección que \mathbf{v} . Para ver que $\|\mathbf{u}\| = 1$, basta observar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v} \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, \mathbf{u} tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} . □

El vector \mathbf{u} del Teorema 10.3 se dice que es un **vector unitario en la dirección de \mathbf{v}** . El proceso de multiplicar \mathbf{v} por $1/\|\mathbf{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización** de \mathbf{v} .

EJEMPLO 4 Construcción de un vector unitario

Hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$ y comprobar que tiene longitud 1.

Solución: De acuerdo con el Teorema 10.3, el vector unitario en la dirección de \mathbf{v} es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -2, 5 \rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}} \langle -2, 5 \rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

Este vector tiene, en efecto, longitud 1, ya que

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1 \quad \square$$

En general, la longitud de una suma de vectores no es igual a la suma de sus longitudes, como se aprecia en la Figura 10.9. Considerando a \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados de un triángulo, podemos ver que la longitud del tercer lado es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, y se tiene

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

La igualdad ocurre cuando los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la *misma* dirección. Este resultado se conoce como la **desigualdad triangular** para vectores (véase el Ejercicio 67 de la Sección 10.3).

Vectores unitarios canónicos

Los vectores unitarios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ se llaman **vectores unitarios canónicos** del plano y se denotan por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Vectores unitarios canónicos

En términos de estos vectores, que se muestran en la Figura 10.10, se puede expresar cualquier vector del plano como sigue:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, 0 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle = v_1 \langle 1, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

El vector $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$ se llama una **combinación lineal** de \mathbf{i} y \mathbf{j} . Los escalares v_1 y v_2 se llaman, respectivamente, **componente horizontal** y **componente vertical** de \mathbf{v} .

EJEMPLO 5 Expresión de un vector como combinación lineal de vectores unitarios

Sea \mathbf{u} el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto final $(-1, 3)$, y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Escribir los siguientes vectores como combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

a) \mathbf{u} b) $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

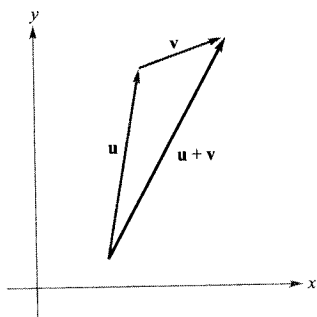


FIGURA 10.9
Desigualdad triangular.

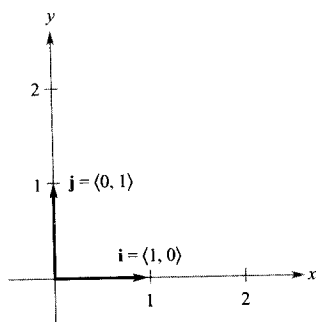


FIGURA 10.10
Vectores unitarios canónicos \mathbf{i} , \mathbf{j} .

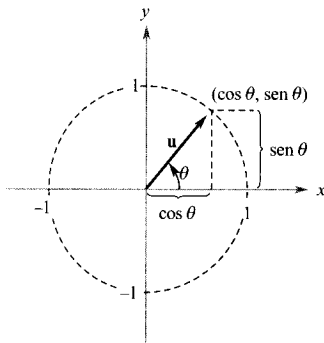


FIGURA 10.11
El ángulo θ desde el semieje x positivo hasta el vector \mathbf{u} .

Solución:

$$a) \quad \mathbf{u} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle = \langle -1 - 2, 3 - (-5) \rangle = \langle -3, 8 \rangle = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \mathbf{w} &= 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ &= -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ &= -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j} \end{aligned}$$

□

Si \mathbf{u} es un vector unitario y θ el ángulo, en sentido antihorario, desde el semieje x positivo hasta \mathbf{u} , el punto final de \mathbf{u} está en el círculo unidad (Figura 10.11) y se tiene

$$\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \text{sen } \theta \rangle = \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j} \quad \text{Vector unitario}$$

Además, cualquier otro vector no nulo \mathbf{v} que forme con el semieje x positivo un ángulo θ tiene la misma dirección que \mathbf{u} , de manera que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \langle \cos \theta, \text{sen } \theta \rangle = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta \mathbf{j}$$

EJEMPLO 6 Expresión de un vector conocidas su longitud y su dirección

El vector \mathbf{v} tiene longitud 3 y forma un ángulo de $30^\circ (= \pi/6$ radianes) con el semieje x positivo. Escribir \mathbf{v} como combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Solución: Puesto que el ángulo entre \mathbf{v} y el semieje x positivo es $\theta = \pi/6$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta \mathbf{j} = 3 \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + 3 \text{sen } \frac{\pi}{6} \mathbf{j} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

□

Aplicaciones de los vectores

Los vectores encuentran abundantes aplicaciones en Física e Ingeniería. Cerramos la sección con un par de ejemplos.

EJEMPLO 7 Fuerza resultante

Dos remolcadores arrastran un barco, como muestra la Figura 10.12, ejerciendo cada uno de ellos una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?

Solución: A la vista de la Figura 10.12, podemos representar las fuerzas ejercidas por los dos remolcadores por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= 400 \langle \cos 20^\circ, \text{sen } 20^\circ \rangle \\ &= 400 \cos (20^\circ) \mathbf{i} + 400 \text{sen } (20^\circ) \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2 &= 400 \langle \cos (-20^\circ), \text{sen } (-20^\circ) \rangle \\ &= 400 \cos (20^\circ) \mathbf{i} - 400 \text{sen } (20^\circ) \mathbf{j} \end{aligned}$$

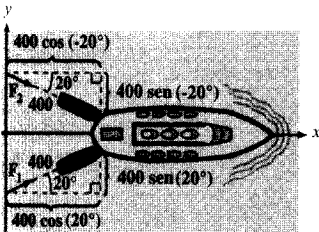


FIGURA 10.12
La fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente de 752 libras en la dirección del semieje x positivo.

La fuerza resultante se obtiene sumando esas dos fuerzas.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} + 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j} + 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} - 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j} \\ &= 800 \cos(20^\circ)\mathbf{i} \\ &\approx 752\mathbf{i} \end{aligned}$$

Así pues, la fuerza resultante es de aproximadamente 752 libras en la dirección del semieje x positivo. \square

EJEMPLO 8 Cálculo de la velocidad

Un avión se mueve a altitud constante y con influencia despreciable del viento en dirección 30° norte-oeste (véase Figura 10.13) a una velocidad de 500 millas/h. Al llegar a cierto punto, el avión encuentra un viento que sopla a 70 millas/h en dirección 45° norte-este. ¿Cuál es la velocidad resultante y su dirección?

Solución: La Figura 10.13 indica que podemos representar la velocidad del avión por el vector

$$\mathbf{v}_1 = 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j}$$

La velocidad del viento, a su vez, se puede representar por el vector

$$\mathbf{v}_2 = 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j}$$

La velocidad resultante del avión es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j} + 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j} \\ &\approx -200,5\mathbf{i} + 482,5\mathbf{j} \end{aligned}$$

Con el fin de hallar la magnitud y dirección del vector \mathbf{v} , escribimos $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j})$. Como

$$\|\mathbf{v}\| \approx \sqrt{(-200,5)^2 + (482,5)^2} \approx 522,5$$

podemos escribir

$$\mathbf{v} \approx 522,5 \left(\frac{-200,5}{522,5}\mathbf{i} + \frac{482,5}{522,5}\mathbf{j} \right) \approx 522,5[\cos(112,6^\circ)\mathbf{i} + \sin(112,6^\circ)\mathbf{j}]$$

La nueva velocidad del avión, por influencia del viento, es de unas 522,5 millas/h y en una dirección que forma un ángulo de $112,6^\circ$ con el semieje x positivo. \square

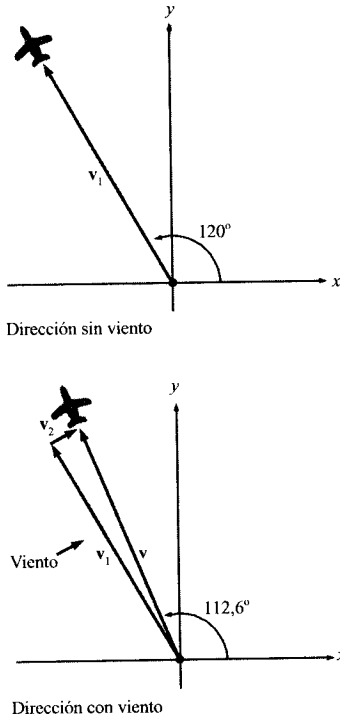
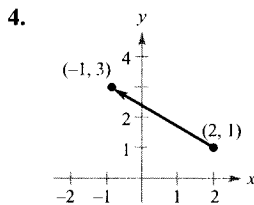
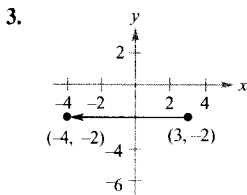
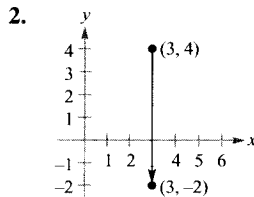
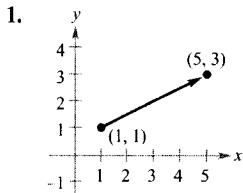


FIGURA 10.13

Ejercicios de la Sección 10.1

En los Ejercicios 1-4, *a)* expresar el vector \mathbf{v} en componentes, y *b)* dibujar \mathbf{v} con punto inicial en el origen.



En los Ejercicios 5-12, se dan los puntos inicial y final de un vector \mathbf{v} . *a)* Dibujar el segmento dirigido asociado a \mathbf{v} , *b)* expresar \mathbf{v} en componentes, y *c)* dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

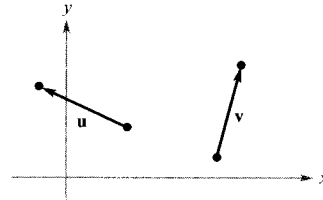
<u>Punto inicial</u>	<u>Punto final</u>
5. (1, 2)	(5, 5)
6. (3, -5)	(4, 7)
7. (10, 2)	(6, -1)
8. (0, -4)	(-5, -1)
9. (6, 2)	(6, 6)
10. (7, -1)	(-3, -1)
11. $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
12. (0, 12, 0, 60)	(0, 84, 1, 25)

En los Ejercicios 13 y 14, dibujar el múltiplo escalar de \mathbf{v} .

13. $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$ a) $2\mathbf{v}$ b) $-3\mathbf{v}$ c) $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ d) $\frac{2}{3}\mathbf{v}$

14. $\mathbf{v} = \langle -1, 5 \rangle$ a) $4\mathbf{v}$ b) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ c) $0\mathbf{v}$ d) $-6\mathbf{v}$

En los Ejercicios 15-18, usar la figura para dibujar el vector indicado.



15. $-\mathbf{u}$

16. $2\mathbf{u}$

17. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

18. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

En los Ejercicios 19-22, hallar el vector \mathbf{v} , siendo $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, 2 \rangle$. Ilustrar las operaciones gráficamente.

19. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$

20. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

21. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$

22. $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

En los Ejercicios 23-28, determinar a y b de manera que $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$, siendo $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -1 \rangle$

23. $\mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$

24. $\mathbf{v} = \langle 0, 3 \rangle$

25. $\mathbf{v} = \langle 3, 0 \rangle$

26. $\mathbf{v} = \langle 3, 3 \rangle$

27. $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

28. $\mathbf{v} = \langle -1, 7 \rangle$

En los Ejercicios 29 y 30, se dan un vector \mathbf{v} y su punto inicial. Hallar su punto final.

29. $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$, punto inicial (4, 2)

30. $\mathbf{v} = \langle 4, -9 \rangle$ punto inicial (3, 2)

En los Ejercicios 31-36, calcular la longitud de \mathbf{v} .

31. $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$

32. $\mathbf{v} = \langle 12, -5 \rangle$

33. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

34. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

35. $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

36. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los Ejercicios 37-40, calcular

a) $\|\mathbf{u}\|$ b) $\|\mathbf{v}\|$ c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

d) $\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\|$ e) $\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\|$ f) $\left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right\|$

37. $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$

38. $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

39. $\mathbf{u} = \left\langle 1, \frac{1}{2} \right\rangle$ 40. $\mathbf{u} = \langle 2, -4 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 5, 5 \rangle$

En los Ejercicios 41 y 42, verificar la desigualdad triangular para los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

41. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$ 42. $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 5, 4 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$

En los Ejercicios 43-46, hallar el vector \mathbf{v} cuya magnitud se especifica y con la misma dirección que \mathbf{u} .

Magnitud	Dirección
43. $\ \mathbf{v}\ = 4$	$\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$
44. $\ \mathbf{v}\ = 4$	$\mathbf{u} = \langle -1, 1 \rangle$
45. $\ \mathbf{v}\ = 2$	$\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3 \rangle$
46. $\ \mathbf{v}\ = 3$	$\mathbf{u} = \langle 0, 3 \rangle$

En los Ejercicios 47-50, hallar un vector unitario a) paralelo a, y b) normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto indicado.

Función	Punto
47. $f(x) = x^3$	(1, 1)
48. $f(x) = x^3$	(-2, -8)
49. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$	(3, 4)
50. $f(x) = \operatorname{tg} x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

En los Ejercicios 51-54, expresar \mathbf{v} en componentes, conociendo su magnitud y el ángulo que forma con el semieje x positivo.

Magnitud	Ángulo
51. $\ \mathbf{v}\ = 3$	$\theta = 0^\circ$
52. $\ \mathbf{v}\ = 1$	$\theta = 45^\circ$
53. $\ \mathbf{v}\ = 2$	$\theta = 150^\circ$
54. $\ \mathbf{v}\ = 1$	$\theta = 3,5^\circ$

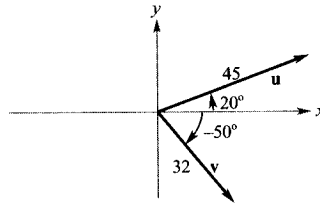
En los Ejercicios 55-58, expresar en componentes $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, dadas las longitudes de \mathbf{u} y \mathbf{v} así como los ángulos que \mathbf{u} y \mathbf{v} forman con el semieje x positivo.

55. $\ \mathbf{u}\ = 1, \theta_u = 0^\circ$ $\ \mathbf{v}\ = 3, \theta_v = 45^\circ$	56. $\ \mathbf{u}\ = 4, \theta_u = 0^\circ$ $\ \mathbf{v}\ = 2, \theta_v = 60^\circ$
57. $\ \mathbf{u}\ = 2, \theta_u = 4$ $\ \mathbf{v}\ = 1, \theta_v = 2$	58. $\ \mathbf{u}\ = 5, \theta_u = -0,5$ $\ \mathbf{v}\ = 5, \theta_v = 0,5$

En los Ejercicios 59 y 60, expresar \mathbf{v} en componentes, dadas las magnitudes de \mathbf{u} y de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, así como los ángulos que \mathbf{u} y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ forman con el semieje x positivo.

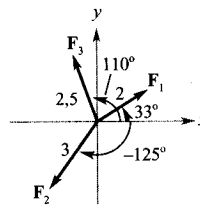
59. $\|\mathbf{u}\| = 1, \theta = 45^\circ$ 60. $\|\mathbf{u}\| = 4, \theta = 30^\circ$
 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \theta = 90^\circ$ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 6, \theta = 120^\circ$

61. **Programación** Escribir un programa que, dadas las longitudes y los ángulos que forman \mathbf{u} y \mathbf{v} con el semieje x positivo, calcule
 a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
 b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
 c) El ángulo que forma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ con el semieje x positivo.
62. Usando el programa del ejercicio anterior, calcular la longitud y la dirección de la resultante de los vectores.

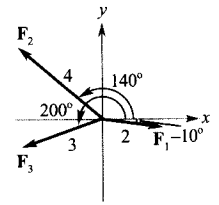


- En los Ejercicios 63 y 64, usar calculadora gráfica para hallar la longitud y la dirección de la resultante de los vectores.

63.



64.



65. **Para pensar** Dos fuerzas de igual magnitud actúan sobre un mismo punto.
 a) Si la magnitud de la resultante es la suma de sus magnitudes, enunciar una conjetura sobre el ángulo entre ellas.
 b) Si la resultante de las dos fuerzas es $\mathbf{0}$, enunciar una conjetura acerca del ángulo que forman entre sí.
 c) ¿Puede ser la magnitud de la resultante mayor que la suma de las magnitudes de las dos fuerzas? Explicar la respuesta.
66. **Razonamiento gráfico** Consideremos las dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = \langle 20, 0 \rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 10 \langle \cos \theta, \operatorname{sen} \theta \rangle$.
 a) Hallar $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|$.
 b) Calcular la magnitud de la resultante en función de θ . Representar en una calculadora la función para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

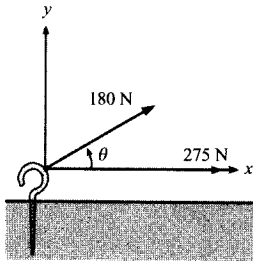
- c) Usar esa gráfica para determinar el recorrido de la función. ¿Cuál es el máximo y en qué valor de θ se alcanza? ¿Cuál es el mínimo y en qué valor de θ se alcanza?
- d) Explicar por qué la magnitud de la resultante nunca es 0.

67. **Análisis numérico y gráfico** Sobre la alcañata de la figura actúan dos fuerzas de 180 y 250 newtons que forman entre sí un ángulo de θ grados.

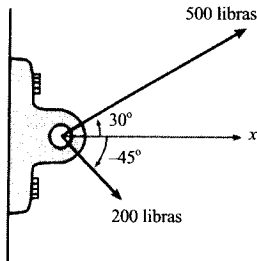
- a) Si $\theta = 30^\circ$, hallar la dirección y magnitud de la fuerza resultante (suma de vectores).
- b) Expresar la magnitud M de la resultante y su dirección α en función de θ , con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
- c) Usar una calculadora para completar la tabla.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

- d) Representar en la calculadora las funciones M y α .
- e) Explicar por qué sólo una de esas dos funciones decrece al crecer θ .



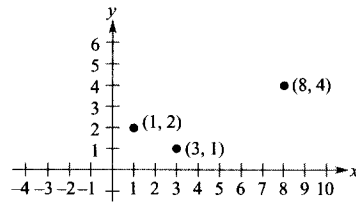
68. **Fuerza resultante** Calcular la magnitud y la dirección de la fuerza resultante de las que se muestran en la figura adjunta.



69. **Fuerza resultante** Tres fuerzas de 75, 100 y 125 libras actúan sobre un objeto formando ángulos respectivos de 30° , 45° y 120° con el semieje x positivo. Calcular la magnitud y dirección de la resultante.

70. **Fuerza resultante** Tres fuerzas de 300, 180 y 250 newtons actúan sobre un punto formando ángulos respectivos de -30° , 45° y 135° con el semieje x positivo. Calcular la magnitud y dirección de la resultante.

71. Tres vértices de un paralelogramo son $(1, 2)$, $(3, 1)$ y $(8, 4)$. Hallar los tres candidatos a cuarto vértice (véase figura).



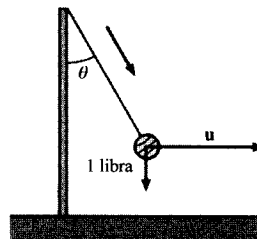
72. Usando vectores, hallar los puntos de trisección del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(7, 5)$.

73. **Análisis numérico y gráfico** Una pelota que pesa una libra se aparta del mástil de sujeción (véase figura) mediante una fuerza horizontal \mathbf{u} hasta que la cuerda forma un ángulo θ con el mástil.

- a) Calcular la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de \mathbf{u} para $\theta = 30^\circ$.
- b) Escribir la tensión T de la cuerda y la magnitud de \mathbf{u} en función de θ . Determinar el dominio de esas dos funciones.
- c) Usar una calculadora para completar la tabla.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T							
$\ \mathbf{u}\ $							

- d) Representar en la calculadora las gráficas de las dos funciones para $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$.
- e) Comparar T y $\|\mathbf{u}\|$ cuando θ crece.
- f) Calcular, si es posible, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} T$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \|\mathbf{u}\|$. ¿Esperaba estos resultados? Explique la respuesta.

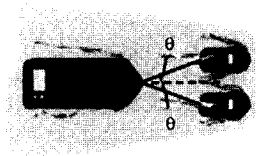


74. Análisis numérico y gráfico Una gabarra cargada es arrastrada por dos remolcadores y la fuerza resultante es de 6.000 libras en la dirección del eje de la gabarra (véase figura). El cable de cada remolcador forma un ángulo θ con ese eje.

- Calcular la tensión en los cables de los remolcadores para $\theta = 20^\circ$.
- Expresar la tensión T de cada uno de ellos como función de θ y determinar el dominio de la función.
- Completar la tabla con ayuda de una calculadora.

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T						

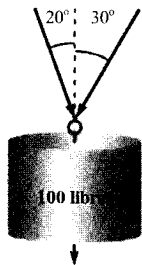
- Representar en la calculadora la función obtenida.
- Explicar por qué la tensión crece al crecer θ .



75. Movimiento de un proyectil Un rifle, que imprime a la bala una velocidad inicial de 1.200 pies/s, se dispara con un ángulo de elevación de 6° . Hallar las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

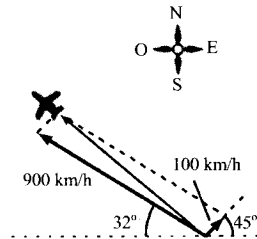
76. Carga compartida Dos trabajadores transportan una carga de 100 libras tirando de dos cuerdas en la disposición que indica la figura.

- Si la fuerza resultante es vertical, hallar la tensión en cada una de las dos cuerdas.
- Calcular la componente vertical de la fuerza de cada trabajador.



77. Navegación aérea Un avión vuela en dirección 32° norte-oeste con una velocidad relativa al aire de

900 km/h. El viento sopla del sudoeste a 100 km/h (véase figura). ¿Cuál es la verdadera dirección de vuelo y la velocidad respecto del suelo?



78. Navegación aérea Un avión vuela hacia el este con velocidad constante, respecto del suelo, de 450 millas/h y de repente encuentra un viento que sopla del noroeste a 50 millas/h. Hallar la velocidad y dirección del avión con las que conseguirá mantener la velocidad respecto del suelo y la dirección este que llevaba.

79. Si $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$, hallar T_2 y T_3 .
 $\mathbf{F}_1 = -3.600\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = T_2(\cos 35^\circ\mathbf{i} - \sin 35^\circ\mathbf{j})$.
 $\mathbf{F}_3 = T_3(\cos 92^\circ\mathbf{i} + \sin 92^\circ\mathbf{j})$

80. Demostrar que $\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ son vectores unitarios para cualquier valor del ángulo θ .

81. Geometría Usando vectores, probar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene longitud mitad de la de éste.

82. Geometría Usando vectores, demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

83. Demostrar que el vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ biseca el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 84-89, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

84. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la misma magnitud y dirección, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

85. Si \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} , entonces $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

86. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $a^2 + b^2 = 1$.

87. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0}$, entonces $a = -b$.

88. Si $a = b$, entonces $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}a$.

89. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la misma magnitud y direcciones opuestas, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

- CONTENIDO ■
- Coordenadas en el espacio ■
- Vectores en el espacio ■
- Aplicaciones ■



10.2 Coordenadas y vectores en el espacio

Coordenadas en el espacio

Hasta ahora hemos manejado casi exclusivamente sistemas de coordenadas en dos dimensiones. Buena parte de lo que resta por hacer exige sistemas de coordenadas en tres dimensiones.

Antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, introducimos un **sistema de coordenadas tridimensional**, colocando un eje z perpendicular en el origen a los ejes x e y . La Figura 10.14 muestra los tres semiejes positivos. Tomados por parejas, los ejes coordenados determinan tres **planos coordenados**: el **plano xy** , el **plano xz** y el **plano yz** . Estos tres planos dividen el espacio en ocho **octantes**. El primer octante es aquel en el cual las tres coordenadas son positivas. En este sistema tridimensional, un punto P del espacio viene determinado por un trío ordenado (x, y, z) , donde

x = distancia dirigida de P al plano yz

y = distancia dirigida de P al plano xz

z = distancia dirigida de P al plano xy

La Figura 10.15 muestra varios puntos localizados en el espacio.

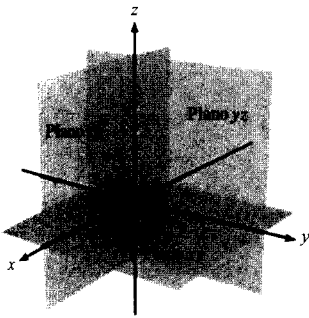


FIGURA 10.14
Sistema de coordenadas en tres dimensiones.

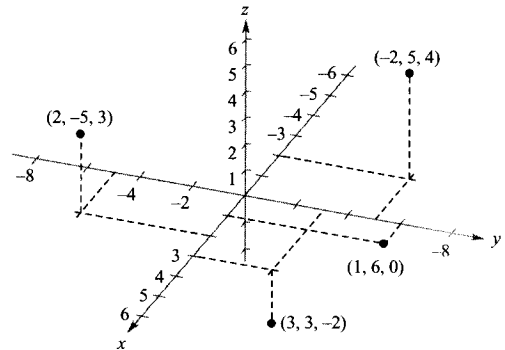


FIGURA 10.15
En un sistema de coordenadas tridimensional los puntos se representan por tríos ordenados.

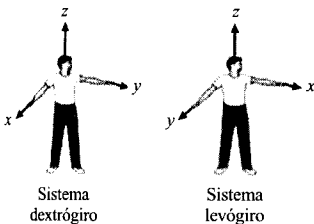


FIGURA 10.16

Un sistema de coordenadas tridimensional puede ser de **orientación levógiro** o **dextrógiro**. Para determinar la orientación de un sistema, imagine que está de pie con los brazos señalando las direcciones de los semiejes positivos x e y , y con el eje z hacia arriba, como en la Figura 10.16. El sistema es dextrógiro o levógiro dependiendo de qué mano señala el semieje x positivo. En este libro trabajaremos únicamente con sistemas dextrógiros.

Muchas de las fórmulas válidas en el sistema de coordenadas bidimensional se pueden generalizar a tres dimensiones. Por ejemplo, para calcular la distancia entre dos puntos en el espacio, basta aplicar dos veces el teorema de Pitágoras, como muestra la Figura 10.17. Con ello se obtiene la fórmula para la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

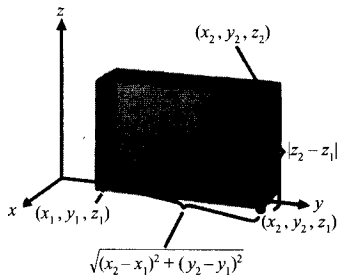


FIGURA 10.17

Distancia entre dos puntos en el espacio.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Fórmula de la distancia

EJEMPLO 1 Distancia entre dos puntos en el espacioLa distancia entre los puntos $(2, -1, 3)$ y $(1, 0, -2)$ es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

□

Una esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r se define como el conjunto de puntos (x, y, z) cuya distancia a (x_0, y_0, z_0) es r . Usando la fórmula de la distancia podemos hallar la **ecuación canónica de una esfera** de radio r centrada en (x_0, y_0, z_0) . Si (x, y, z) es un punto arbitrario de la esfera, la ecuación de la esfera es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Ecuación de la esfera

como muestra la Figura 10.18. Además, el punto medio del segmento recto que une los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) tiene por coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Regla del punto medio

EJEMPLO 2 Ecuación de una esfera

Hallar la ecuación canónica de la esfera que tiene al segmento que une $(5, -2, 3)$ y $(0, 4, -3)$ como uno de sus diámetros.

Solución: Por la regla del punto medio, el centro de esa esfera es

$$\left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 - 3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0 \right)$$

De la fórmula de la distancia se deduce que su radio es

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (4 - 1)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

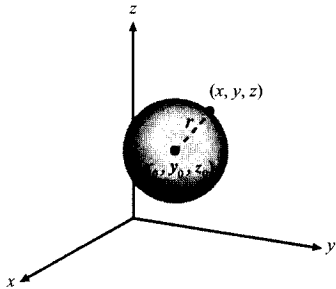


FIGURA 10.18

Por tanto, la ecuación canónica de la esfera es

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = \frac{97}{4} \quad \square$$

Vectores en el espacio

En el espacio los vectores se denotan por tríos ordenados $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. El vector cero se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Usando los vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ en la dirección positiva del eje z , la **notación canónica en términos de vectores unitarios** para \mathbf{v} es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

(véase la Figura 10.19). Si \mathbf{v} se representa mediante un segmento recto orientado que va de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, como en la Figura 10.20, su expresión en componentes se obtiene restando las coordenadas del punto inicial de las del punto final:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$$

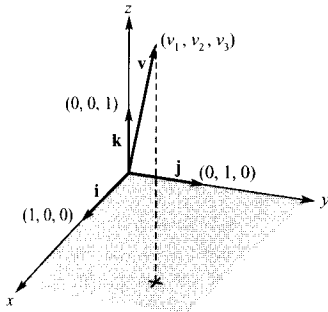


FIGURA 10.19

Los vectores unitarios canónicos en el espacio.

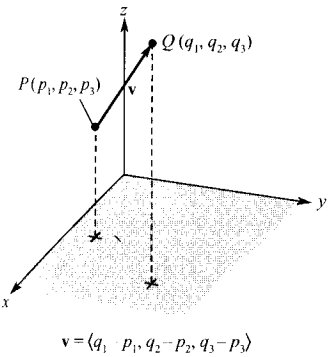


FIGURA 10.20

VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio, y c un escalar.

1. **Igualdad de vectores:** $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y sólo si $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, y $u_3 = v_3$
2. **Expresión en componentes:** Si \mathbf{v} viene representado por el segmento orientado que va de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$$

3. **Longitud:** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
4. **Vector unitario en la dirección de \mathbf{v} :** $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
5. **Suma de vectores:** $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$
6. **Multipliación por un escalar:** $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$

| Nota. Las propiedades de la suma y del producto por un escalar expuestas en el Teorema 10.1 siguen siendo válidas para vectores en el espacio.

EJEMPLO 3 Expresión en componentes de un vector en el espacio

Hallar la expresión en componentes y la longitud de un vector \mathbf{v} con punto inicial $(-2, 3, 1)$ y punto final $(0, -4, 4)$. Hallar un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

Solución: La expresión de \mathbf{v} en componentes viene dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle \\ &= \langle 2, -7, 3 \rangle\end{aligned}$$

así que su longitud es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (-7)^2 + (3)^2} = \sqrt{62}$$

El vector unitario en la dirección del \mathbf{v} es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{62}}(2, -7, 3) \quad \square$$

De la definición del producto por un escalar se sigue que los múltiplos escalares positivos de un vector no nulo \mathbf{v} tienen la misma dirección que \mathbf{v} , mientras que los múltiplos negativos tienen dirección opuesta a la de \mathbf{v} . En general, dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

DEFINICIÓN DE VECTORES PARALELOS

Dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

En la Figura 10.21, los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son paralelos, ya que $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4 Vectores paralelos

El vector \mathbf{w} tiene punto inicial $(2, -1, 3)$ y punto final $(-4, 7, 5)$. ¿Cuál de estos vectores es paralelo a \mathbf{w} ?

a) $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle$ b) $\mathbf{v} = \langle 12, -16, 4 \rangle$

Solución: En forma de componentes, el vector \mathbf{w} se escribe

$$\mathbf{w} = \langle -4 - 2, 7 - (-1), 5 - 3 \rangle = \langle -6, 8, 2 \rangle$$

a) Como $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle = -\frac{1}{2}\langle -6, 8, 2 \rangle = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$, podemos concluir que \mathbf{u} es paralelo a \mathbf{w} .

b) En este caso necesitaríamos un escalar c tal que

$$\langle 12, -16, 4 \rangle = c\langle -6, 8, 2 \rangle$$

$$12 = -6c \rightarrow c = -2$$

$$-16 = 8c \rightarrow c = -2$$

$$4 = 2c \rightarrow c = 2$$

Como ningún c satisface las tres condiciones exigidas, los vectores no son paralelos. \square

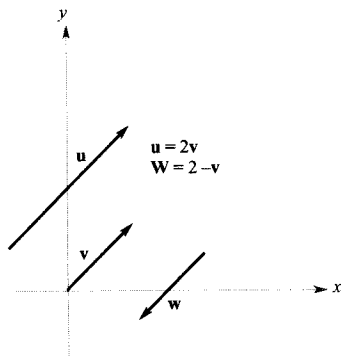


FIGURA 10.21
Vectores paralelos.

EJEMPLO 5 Puntos colineales

Determinar si los puntos $P(1, -2, 3)$, $Q(2, 1, 0)$, y $R(4, 7, -6)$ están sobre una misma recta.

Solución: Las expresiones en componentes de \vec{PQ} y \vec{PR} son

$$\vec{PQ} = \langle 2 - 1, 1 - (-2), 0 - 3 \rangle = \langle 1, 3, -3 \rangle$$

y

$$\vec{PR} = \langle 4 - 1, 7 - (-2), -6 - 3 \rangle = \langle 3, 9, -9 \rangle$$

Estos dos vectores tienen un punto inicial común. Por tanto, P , Q y R están sobre una misma recta si y sólo si \vec{PQ} y \vec{PR} son paralelos. Y lo son, ya que $\vec{PR} = 3\vec{PQ}$, como se ilustra en la Figura 10.22. \square

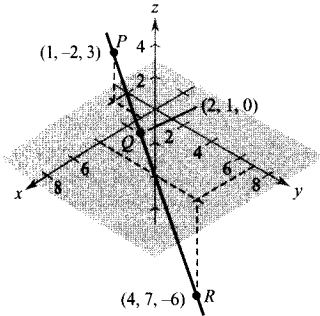


FIGURA 10.22

Los puntos P , Q y R son colineales.

EJEMPLO 6 Notación de vectores unitarios canónicos

- Expresar el vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ en componentes.
- Calcular el punto final del vector $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, cuyo punto inicial es $P(-2, 3, 5)$.

Solución:

- Como falta \mathbf{j} , su componente es 0, luego

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k} = \langle 4, 0, -5 \rangle$$

- Hemos de encontrar un $Q(q_1, q_2, q_3)$, tal que $\mathbf{v} = \vec{PQ} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Eso implica que $q_1 - (-2) = 7$, $q_2 - 3 = -1$, y $q_3 - 5 = 3$. La solución de esas tres ecuaciones es $q_1 = 5$, $q_2 = 2$, y $q_3 = 8$. Por tanto, Q es $(5, 2, 8)$. \square

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Magnitud de una fuerza

Una cámara de televisión de 120 libras está colocada sobre un trípode (Figura 10.23). Representar en forma de vector la fuerza ejercida sobre cada una de las patas del trípode, suponiendo que el peso se distribuye uniformemente entre las tres.

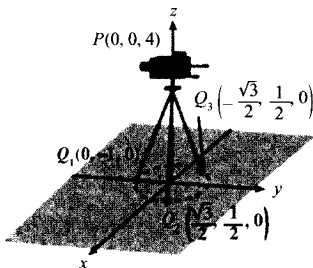


FIGURA 10.23

Solución: Sean los vectores \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 que representan las fuerzas ejercidas sobre los tres puntos de apoyo. De la Figura 10.23 se pueden deducir las direcciones de \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 :

$$\vec{PQ}_1 = \langle 0 - 0, -1 - 0, 0 - 4 \rangle = \langle 0, -1, -4 \rangle$$

$$\vec{PQ}_2 = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4 \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle$$

$$\vec{PQ}_3 = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4 \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle$$

Puesto que las tres patas tienen la misma longitud y la fuerza se reparte uniformemente entre ellas, $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}_3\|$. Por tanto, existe una constante c tal que

$$\mathbf{F}_1 = c\langle 0, -1, -4 \rangle, \quad \mathbf{F}_2 = c\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle, \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_3 = c\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle$$

dado que la fuerza total ejercida por la cámara es $\mathbf{F} = -120\mathbf{k}$, de

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

se sigue que \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 tienen cada uno de ellos una componente vertical igual a -40 . Eso implica que $c(-4) = -40$, luego $c = 10$. En consecuencia, las fuerzas ejercidas sobre las tres patas del trípode vienen representadas por los vectores

$$\mathbf{F}_1 = \langle 0, -10, -40 \rangle$$

$$\mathbf{F}_2 = \langle 5\sqrt{3}, 5, -40 \rangle$$

$$\mathbf{F}_3 = \langle -5\sqrt{3}, 5, -40 \rangle \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 10.2

En los Ejercicios 1-4, situar los puntos en un sistema de coordenadas tridimensional.

1. a) $(2, 1, 3)$ b) $(-1, 2, 1)$

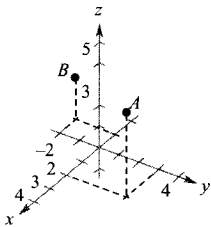
2. a) $(3, -2, 5)$ b) $\left(\frac{3}{2}, 4, -2\right)$

3. a) $(5, -2, 2)$ b) $(5, -2, -2)$

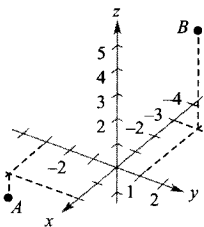
4. a) $(0, 4, -5)$ b) $(4, 0, 5)$

En los Ejercicios 5 y 6, aproximar las coordenadas de los puntos.

5.



6.



8. El punto está siete unidades delante del plano yz , dos a la izquierda del plano xz y una por debajo del plano xy .
9. El punto está en el eje x , diez unidades delante del plano yz .
10. El punto está en el plano yz , tres unidades a la derecha del plano xz y dos por encima del plano xy .
11. **Para pensar** ¿Cuál es la coordenada z de cualquier punto del plano xy ?
12. **Para pensar** ¿Cuál es la coordenada x de cualquier punto del plano yz ?

En los Ejercicios 13-16, determinar la localización de los puntos que satisfacen las condiciones impuestas.

13. $xy > 0, z = -3$

14. $xy < 0, z = 4$

15. $xyz < 0$

16. $xyz > 0$

En los Ejercicios 7-10, hallar las coordenadas del punto.

7. El punto está tres unidades detrás del plano yz , cuatro a la derecha del plano xz y cinco sobre el plano xy .

En los Ejercicios 17-20, calcular las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices se especifican y discutir si el triángulo es recto, isósceles o ninguna de las dos cosas.

17. $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(2, -4, 4)$
 18. $(5, 3, 4)$, $(7, 1, 3)$, $(3, 5, 3)$
 19. $(1, -3, -2)$, $(5, -1, 2)$, $(-1, 1, 2)$
 20. $(5, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, -3)$

21. **Para pensar** El triángulo del Ejercicio 17 se traslada cinco unidades hacia arriba por el eje z . Calcular las coordenadas del triángulo trasladado.
 22. **Para pensar** El triángulo del Ejercicio 18 se traslada tres unidades hacia la derecha por el eje y . Calcular las coordenadas del triángulo trasladado.

En los Ejercicios 23 y 24, hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une los dos puntos dados.

23. $(5, -9, 7)$, $(-2, 3, 3)$ 24. $(4, 0, -6)$, $(8, 8, 20)$

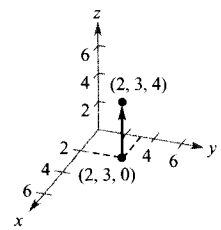
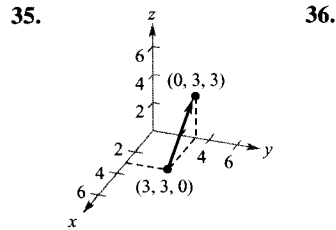
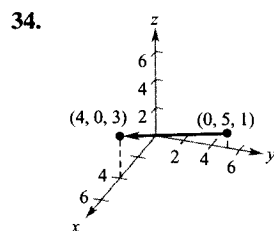
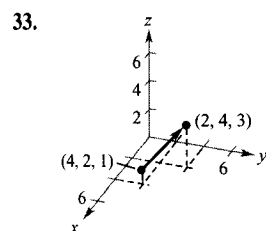
En los Ejercicios 25-28, escribir en forma canónica la ecuación de la esfera.

25. Centro $(0, 2, 5)$ y radio 2.
 26. Centro $(4, -1, 1)$ y radio 5.
 27. Puntos terminales de un diámetro: $(2, 0, 0)$ y $(0, 6, 0)$.
 28. Centro $(-2, 1, 1)$ y tangente al plano xy .

En los Ejercicios 29-32, completar el cuadrado para escribir la ecuación de la esfera en forma canónica. Hallar el centro y el radio de la esfera.

29. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$
 30. $x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 2y + 10z + 19 = 0$
 31. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$
 32. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 32y + 8z + 33 = 0$

En los Ejercicios 33-36, a) expresar en componentes el vector v , y b) dibujar el vector con el origen como punto inicial.



En los Ejercicios 37 y 38 se dan los puntos inicial y final de un vector. a) Dibujar el segmento dirigido, b) expresar el vector en componentes, y c) dibujar el vector con el origen como punto inicial.

37. Punto inicial: $(-1, 2, 3)$
 Punto final: $(3, 3, 4)$
 38. Punto inicial: $(2, -1, -2)$
 Punto final: $(-4, 3, 7)$

En los Ejercicios 39 y 40, se dan un vector v y su punto inicial. determinar el punto final.

39. $v = \langle 3, -5, 6 \rangle$
 Punto inicial: $(0, 6, 2)$
 40. $v = \left\langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle$
 Punto inicial: $\left(3, 0, -\frac{2}{3} \right)$

En los Ejercicios 41 y 42, dibujar cada múltiplo escalar de v .

41. $v = \langle 1, 2, 2 \rangle$
 a) $2v$ b) $-v$ c) $\frac{3}{2}v$ d) $0v$
 42. $v = \langle 2, -2, 1 \rangle$
 a) $-v$ b) $2v$ c) $\frac{1}{2}v$ d) $\frac{5}{2}v$

En los Ejercicios 43-48, calcular el vector z , siendo $u = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $v = \langle 2, 2, -1 \rangle$, y $w = \langle 4, 0, -4 \rangle$

43. $z = u - v$
 44. $z = u - v + 2w$
 45. $z = 2u + 4v - w$
 46. $z = 5u - 3v - \frac{1}{2}w$
 47. $2z - 3u = w$
 48. $2u + v - w + 3z = 0$

En los Ejercicios 49-52, averiguar cuál de los vectores es paralelo a z . Confirmar los resultados mediante una gráfica en calculadora.

49. $z = \langle 3, 2, -5 \rangle$

a) $\langle -6, -4, 10 \rangle$ b) $\left\langle 2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3} \right\rangle$
 c) $\langle 6, 4, 10 \rangle$ d) $\langle 1, -4, 2 \rangle$

50. $z = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{3}{4}\mathbf{k}$

a) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ b) $-\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} - \frac{3}{2}\mathbf{k}$
 c) $12\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$ d) $\frac{3}{4}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{9}{8}\mathbf{k}$

51. z tiene punto inicial $(1, -1, 3)$ y punto terminal $(-2, 3, 5)$

a) $-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ b) $4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

52. z tiene punto inicial $(3, 2, -1)$ y punto terminal $(-1, -3, 5)$

a) $\langle 0, 5, -6 \rangle$ b) $\langle 8, 10, -12 \rangle$

En los Ejercicios 53-56, usar vectores para decidir si los puntos son colineales.

53. $(0, -2, -5), (3, 4, 4), (2, 2, 1)$

54. $(1, -1, 5), (0, -1, 6), (3, -1, 3)$

55. $(1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)$

56. $(0, 0, 0), (1, 3, -2), (2, -6, 4)$

En los Ejercicios 57 y 58, usar vectores para probar que los puntos son vértices de un paralelogramo.

57. $(2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)$

58. $(1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)$

En los Ejercicios 59-64, hallar la longitud de v .

59. $v = \langle 0, 0, 0 \rangle$

60. $v = \langle 1, 0, 3 \rangle$

61. $v = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

62. $v = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

63. Punto inicial de v : $(1, -3, 4)$
 Punto final de v : $(1, 0, -1)$

64. Punto inicial de v : $(0, -1, 0)$
 Punto final de v : $(1, 2, -2)$

En los Ejercicios 65-68, hallar un vector unitario a) en la dirección de u , y b) en la dirección opuesta a la de u .

65. $u = \langle 2, -1, 2 \rangle$

66. $u = \langle 6, 0, 8 \rangle$

67. $u = \langle 3, 2, -5 \rangle$

68. $u = \langle 8, 0, 0 \rangle$

69. **Programación** Se dan las expresiones en componentes de dos vectores u y v . Escribir un programa que produzca como resultado: a) la expresión en componentes de $u + v$, b) $\|u + v\|$, c) $\|u\|$, y d) $\|v\|$.

70. Aplicar el programa escrito en el ejercicio precedente a los vectores $u = \langle -1, 3, 4 \rangle$ y $v = \langle 5, 4, 5, -6 \rangle$

En los Ejercicios 71 y 72, determinar los valores de c que satisfacen la ecuación, siendo $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $v = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

71. $\|cv\| = 5$

72. $\|cu\| = 3$

En los Ejercicios 73-76, hallar el vector v de longitud y dirección dadas.

	<u>Magnitud</u>	<u>Dirección</u>
73.	10	$u = \langle 0, 3, 3 \rangle$
74.	3	$u = \langle 1, 1, 1 \rangle$
75.	$\frac{3}{2}$	$u = \langle 2, -2, 1 \rangle$
76.	$\sqrt{5}$	$u = \langle -4, 6, 2 \rangle$

En los Ejercicios 77 y 78, dibujar el vector v y expresarlo en componentes.

77. v está en el plano yz , tiene longitud 2 y forma un ángulo de 30° con el semieje y positivo.

78. v está en el plano xz , tiene longitud 5 y forma un ángulo de 45° con el semieje z positivo.

En los Ejercicios 79 y 80, usar vectores para hallar el punto que está a dos tercios del camino de P a Q .

79. $P(4, 3, 0), \quad Q(1, -3, 3)$

80. $P(1, 2, 5), \quad Q(6, 8, 2)$

81. Sean $u = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $v = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y $w = au + bv$

a) Dibujar u y v .

b) Si $w = \mathbf{0}$, probar que a y b deben ser nulos ambos.

c) Hallar a y b de manera que $w = \mathbf{i} + 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

d) Probar que ninguna elección de a y b hace posible que $w = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

82. **Para pensar** Los puntos inicial y final de un vector v son (x_1, y_1, z_1) y (x, y, z) . Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|v\| = 4$.

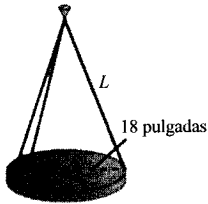
83. **Investigación numérica, gráfica y analítica** Los focos de un auditorio son discos de 24 libras y de 18 pulgadas de radio. Cada disco está colgado de tres cables

igualmente espaciados de L pulgadas de longitud (véase figura).

- Expresar la tensión T de cada cable como función de L . Especificar el dominio de esa función.
- Con ayuda de una calculadora y el modelo del apartado a), completar la tabla.

θ	20	25	30	35	40	45	50
T							

- Representar en la calculadora el modelo y determinar las asíntotas de su gráfica.
- Comprobar analíticamente las asíntotas obtenidas.
- Calcular la longitud mínima que pueden tener los cables si la máxima tensión que pueden soportar es de 10 libras.

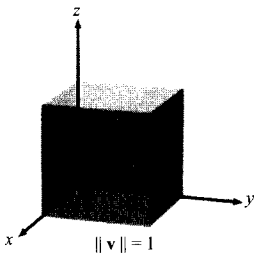


84. **Para pensar** Supongamos que cada uno de los cables del Ejercicio 83 tiene una longitud fija $x = a$ y que el radio de cada disco es r_0 pulgadas. Enunciar una conjetura acerca del límite

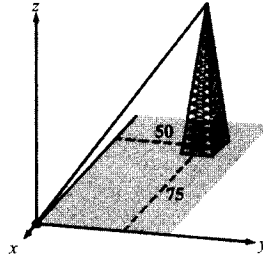
$$\lim_{r_0 \rightarrow a} T$$

y justificar la respuesta.

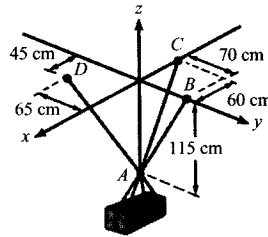
85. **Diagonal de un cubo** Expresar en componentes el vector unitario \mathbf{v} en la dirección de la diagonal del cubo de la figura.



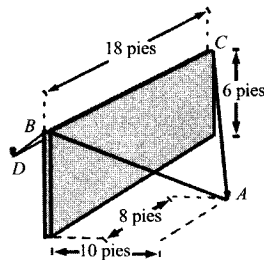
86. **Cable de anclaje** El cable de anclaje de una torre de 100 pies de altura soporta una tensión de 550 libras. Con los datos de la figura, expresar en componentes el vector \mathbf{F} que representa la tensión del cable.



87. **Cargas suspendidas** Calcular la tensión en cada uno de los cables de la figura si el peso del embalaje es de 500 newtons.



88. **Construcción de edificios** Un muro de hormigón precolado es mantenido temporalmente en posición vertical por cuerdas, como indica la figura. Calcular la fuerza total ejercida sobre la sujeción A si las tensiones en AB y AC son de 420 y 650 libras, respectivamente.

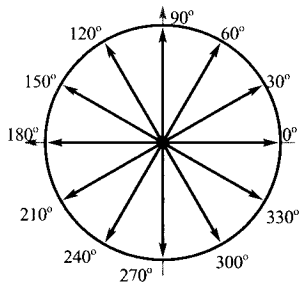


89. Escribir una ecuación cuya gráfica coincida con el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que distan de $A(0, -1, 1)$ doble que de $B(1, 2, 0)$.

- CONTENIDO ■
- El producto escalar ■
 - Ángulo entre dos vectores ■
 - Cosenos directores ■
 - Proyecciones y vectores componentes ■
 - Trabajo ■

EXPLORACIÓN

Interpretación de un producto escalar La figura muestra varios vectores en el círculo unidad. Calcular los productos escalares de varias parejas y el ángulo entre los vectores de cada pareja elegida. Enunciar una conjetura acerca de la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre ellos.



10.3

El producto escalar de dos vectores

El producto escalar

Hasta ahora hemos estudiado dos operaciones con vectores, la suma y la multiplicación por un escalar, que producen como resultado un vector. En esta sección introducimos una tercera operación, el **producto escalar**, cuyo resultado no es un vector, sino un escalar (un número).

DEFINICIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

| Nota. El producto escalar se llama también **producto interno**.

TEOREMA 10.4 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores en el plano o en el espacio, y c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ Propiedad conmutativa
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ Propiedad distributiva
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

Demostración: Para probar la primera propiedad, tomamos $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

En cuanto a la quinta, sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ &= (\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2})^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Las demostraciones de las restantes propiedades se dejan al cuidado del lector. □

EJEMPLO 1 Cálculo de productos escalares

Dados $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 8 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle$, calcular

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$ d) $\|\mathbf{w}\|^2$

Solución:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle = 2(5) + (-2)(8) = -6$

b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\langle -4, 3 \rangle = \langle 24, -18 \rangle$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12$

d) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle = (-4)(-4) + (3)(3) = 25$

Nótese que el resultado del apartado b) es un *vector*, mientras que los resultados restantes son *escalares*. \square

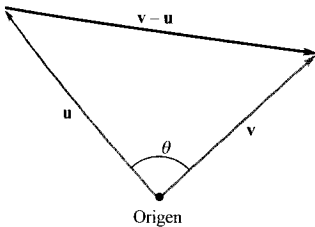


FIGURA 10.24
Ángulo entre dos vectores.

Ángulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores es el ángulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ entre sus respectivos vectores en posición canónica (Figura 10.24). El próximo teorema enseña cómo calcularlo mediante el producto escalar. (Téngase en cuenta que no está definido el ángulo entre el vector cero y otro vector.)

TEOREMA 10.5 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

El ángulo θ entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , ambos no nulos, viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Demostración: Consideremos el triángulo formado por los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ (Figura 10.24). Por la ley de los cosenos,

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Por las propiedades del producto escalar, el miembro de la izquierda se puede transformar así:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ley de los cosenos obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \\ -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \square \end{aligned}$$

Si se conoce el ángulo entre dos vectores, reescribiendo el Teorema 10.5 como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Forma alternativa del producto escalar

se dispone de un nuevo método para calcular el producto escalar. Es fácil darse cuenta de que, al ser $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre positivos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\cos\theta$ tendrán siempre el mismo signo. La Figura 10.25 muestra las posibles orientaciones de dos vectores.

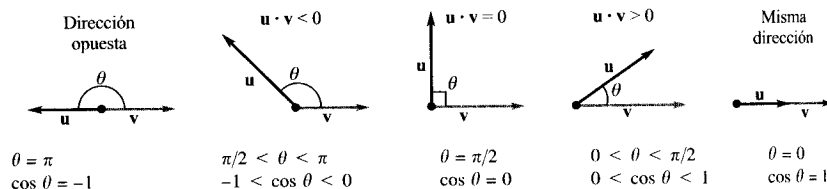


FIGURA 10.25

DEFINICIÓN DE VECTORES ORTOGONALES

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son **ortogonales** si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

De esta definición se sigue que el vector cero es ortogonal a todo vector \mathbf{u} , ya que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. Además, para $0 \leq \theta \leq \pi$, vemos que $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\theta = \pi/2$. Por tanto, el Teorema 10.5 nos lleva a la conclusión de que dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

EJEMPLO 2 Ángulo entre dos vectores

Dados $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1, -2 \rangle$, y $\mathbf{z} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, calcular el ángulo entre cada uno de los pares de vectores siguientes.

- a) \mathbf{u} y \mathbf{v} b) \mathbf{u} y \mathbf{w} c) \mathbf{v} y \mathbf{z} .

Solución:

$$a) \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-12 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-8}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{70}}$$

$$\text{Como } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0, \theta = \arccos \frac{-4}{\sqrt{70}} \approx 2,069 \text{ radianes}$$

! Nota. Las palabras «perpendicular», «ortogonal» y «normal» significan esencialmente lo mismo: formar ángulo recto. Sin embargo, suele decirse que dos vectores son *ortogonales*, que dos rectas o planos son *perpendiculares* y que un vector es *normal* a una recta o a un plano.

$$b) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{3 + 1 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{0}{2\sqrt{84}} = 0$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, \mathbf{u} y \mathbf{w} son *ortogonales*. Además, $\theta = \pi/2$.

$$c) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{z}\|} = \frac{-8 + 0 - 2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$$

En consecuencia, $\theta = \pi$. Nótese que \mathbf{v} y \mathbf{z} son paralelos, con $\mathbf{v} = -2\mathbf{z}$. \square

Cosenos directores

Para un vector en el plano hemos visto que es conveniente medir la dirección en términos del ángulo, medido en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, *desde* el semieje x positivo *hasta* el vector. En el espacio es conveniente medirla en términos de los ángulos entre el vector \mathbf{v} (no nulo) y los tres vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , como muestra la Figura 10.26. Los ángulos α , β , γ son los **ángulos de dirección** (o **ángulos directores**) de \mathbf{v} , y $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son los **cosenos directores** de \mathbf{v} . De

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{i}\| \cos \alpha = \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle = v_1$$

se sigue que $\cos \alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$. Por un argumento similar con los vectores \mathbf{j} y \mathbf{k} se obtiene

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \quad \alpha \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{i}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \quad \beta \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{j}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \quad \gamma \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{k}$$

Por consiguiente, cualquier vector \mathbf{v} no nulo en el espacio, tiene la forma normalizada

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{k} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

y como $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario, resulta

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

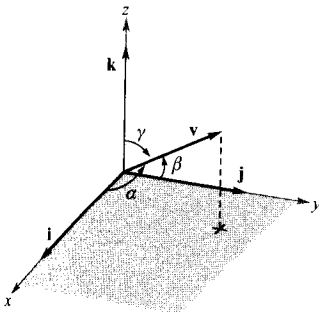


FIGURA 10.26
Ángulos directores.

EJEMPLO 3 Cálculo de los ángulos directores

Calcular los cosenos y ángulos directores del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y comprobar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Solución:

Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, tenemos

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 68,2^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 56,1^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 42,0^\circ$$

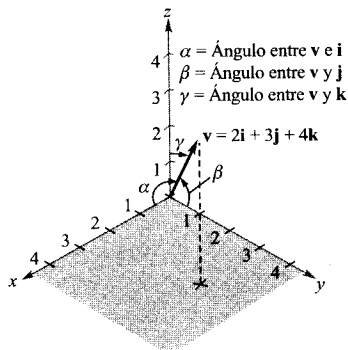


FIGURA 10.27
Ángulos directores de \mathbf{v} .

La suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} \\ &= \frac{29}{29} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Véase Figura 10.27.) □

Proyecciones y vectores componentes

Ya hemos tenido ocasión de sumar vectores para producir un nuevo vector. Muchas aplicaciones a la Física o a la Ingeniería plantean el problema inverso: descomponer un vector como suma de **vectores componentes**. La utilidad de este procedimiento se comprenderá mejor recurriendo a un ejemplo físico.

Consideremos la lancha sobre una rampa inclinada de la Figura 10.28. La fuerza de la gravedad \mathbf{F} empuja la lancha *hacia abajo* y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas, \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 , son ortogonales y se llaman los vectores componentes de \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{Vectores componentes de } \mathbf{F}$$

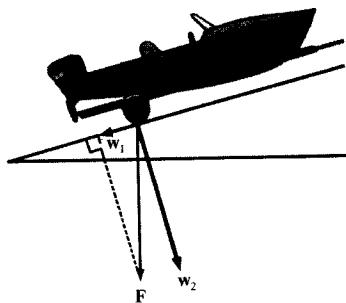


FIGURA 10.28
La fuerza de la gravedad empuja la lancha hacia abajo y contra la rampa.

Las fuerzas \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 ayudan a analizar el efecto de la gravedad sobre la lancha. Por ejemplo, \mathbf{w}_1 indica la fuerza necesaria para evitar que la lancha descienda por la rampa y \mathbf{w}_2 lo que deben soportar los neumáticos.

DEFINICIÓN DE PROYECCIÓN Y DE LOS VECTORES COMPONENTES

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores no nulos. Sea, además, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde \mathbf{w}_1 es paralelo a \mathbf{v} y \mathbf{w}_2 es ortogonal a \mathbf{v} (Figura 10.29).

- \mathbf{w}_1 se llama la **proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}** o el **vector componente de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v}** , y se denota por $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u}$.
- $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ se llama el **vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v}** .

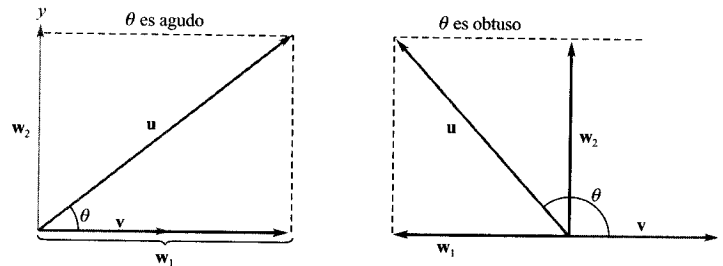


FIGURA 10.29

$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u} =$ proyección de \mathbf{u} sobre $\mathbf{v} =$ vector componente de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} .
 $\mathbf{w}_2 =$ vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} .

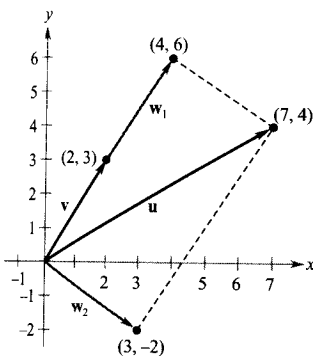


FIGURA 10.30

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

EJEMPLO 4 Cálculo del vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v}

Calcular el vector componente de $\mathbf{u} = \langle 7, 4 \rangle$ ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$, siendo $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u} = \langle 4, 6 \rangle$ y

$$\mathbf{u} = \langle 7, 4 \rangle = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

Solución: Como $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde \mathbf{w}_1 es paralelo a \mathbf{v} , se sigue que \mathbf{w}_2 es el vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} . Así pues,

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \langle 7, 4 \rangle - \langle 4, 6 \rangle = \langle 3, -2 \rangle$$

Compruebe como ejercicio que \mathbf{w}_2 es ortogonal a \mathbf{v} , tal como muestra la Figura 10.30. \square

El Ejemplo 4 pone de manifiesto que es fácil hallar el vector componente \mathbf{w}_2 una vez conocida la proyección \mathbf{w}_1 de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} . Para calcular esta proyección el teorema siguiente utiliza el producto escalar (para su demostración véase el Ejercicio 68).

TEOREMA 10.6 LA PROYECCIÓN MEDIANTE PRODUCTO ESCALAR

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores no nulos, la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} viene dada por

$$\text{proy}_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \right) \mathbf{v}$$

| Nota. Nótese la distinción entre los términos «componente» y «vector componente». Por ejemplo, usando los vectores unitarios canónicos con $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$, u_1 es la componente de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{i} y $u_1 \mathbf{i}$ es el vector componente de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{i} .

La proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} se puede escribir como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} :

$$\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (k)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\| \cos \theta$$

El número k se llama la **componente de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v}** .

EJEMPLO 5 Descomposición de un vector en vectores componentes

Hallar la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} y el vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} , para los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Véase Figura 10.31.)

Solución: La proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{12}{54}\right)(7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$$

El vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} es el vector

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - \left(\frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}\right) = \frac{13}{9}\mathbf{i} - \frac{47}{9}\mathbf{j} + \frac{22}{9}\mathbf{k} \quad \square$$

EJEMPLO 6 Cálculo de una fuerza

Una lancha de 600 libras se encuentra sobre una rampa con 30° de inclinación (Figura 10.32). ¿Qué fuerza es necesaria para evitar que la lancha ruede cuesta abajo?

Solución: Como la fuerza de la gravedad es vertical y hacia abajo, puede representarse por el vector $\mathbf{F} = -600\mathbf{j}$. Para hallar la fuerza requerida para impedir que la lancha descienda por la rampa, proyectamos \mathbf{F} sobre un vector unitario \mathbf{v} en la dirección de la rampa:

$$\mathbf{v} = \cos 30^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \quad \text{Vector unitario en la dirección de la rampa}$$

Por tanto, la proyección de \mathbf{F} sobre \mathbf{v} es

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = (-600)\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v} = -300\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)$$

La magnitud de esta fuerza es 300, así que la fuerza pedida es de 300 libras. \square

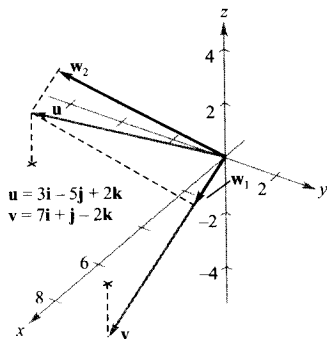


FIGURA 10.31
 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

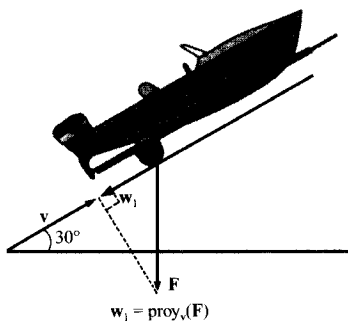


FIGURA 10.32

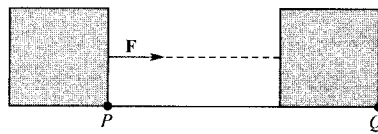
Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{F} que actúa a lo largo de la recta de movimiento de un objeto viene dado por

$$W = (\text{magnitud de la fuerza}) (\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\|$$

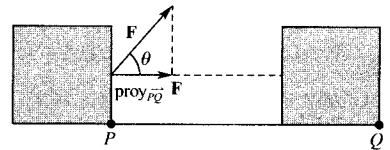
como se muestra en la Figura 10.33a. Si la fuerza constante \mathbf{F} no está dirigida en la dirección del movimiento, la Figura 10.33b indica que el trabajo W realizado por la fuerza es

$$W = \|\text{proy}_{\vec{PQ}} \mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\| = (\cos \theta) \|\mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\| = \mathbf{F} \cdot \vec{PQ}$$



$$\text{Trabajo} = \|\mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\|$$

a) La fuerza actúa en la dirección del movimiento



$$\text{Trabajo} = \|\text{proy}_{\vec{PQ}} \mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\|$$

b) La fuerza actúa formando un ángulo θ con la dirección del movimiento

FIGURA 10.33

Resumimos esta noción de trabajo en el cuadro siguiente.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{F} cuando su punto de aplicación se desplaza a lo largo del vector \vec{PQ} viene dada por una de estas expresiones:

1. $W = \|\text{proy}_{\vec{PQ}} \mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\|$ Forma de proyección
2. $W = \mathbf{F} \cdot \vec{PQ}$ Forma de producto escalar

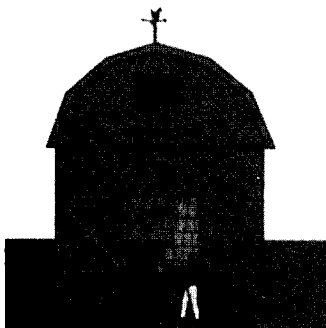


FIGURA 10.34

EJEMPLO 7 Trabajo

Para cerrar una puerta corredera, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras con un ángulo de 60° (Figura 10.34). Calcular el trabajo realizado para mover la puerta 12 pies hasta que queda cerrada.

Solución: Por proyección podemos hallar el trabajo realizado haciendo

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\vec{PQ}} \mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\| \\ &= \cos(60^\circ) \|\mathbf{F}\| \|\vec{PQ}\| \\ &= \frac{1}{2} (50)(12) \\ &= 300 \text{ libras-pies} \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 10.3

En los Ejercicios 1-6, calcular $a) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $b) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $c) \|\mathbf{u}\|^2$, $d) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, y $e) \mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$

1. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle 5, 12 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle 0, 6, 5 \rangle$

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$

$\mathbf{v} = \mathbf{i}$

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

7. **Ingresos** El vector $\mathbf{u} = \langle 3.240, 1.450, 2.235 \rangle$ da el número de unidades de los productos X, Y, Z y el vector $\mathbf{v} = \langle 2, 22, 1, 85, 3, 25 \rangle$ da el precio, en dólares, por unidad de cada uno de esos productos. Calcular el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explicar qué información ofrece.

8. **¿Verdadero o falso?** Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces ¿es necesariamente cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

En los Ejercicios 9 y 10, calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

9. $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\pi/3$.

10. $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $5\pi/6$.

En los Ejercicios 11-18, hallar el ángulo θ entre los vectores.

11. $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

13. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$

16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. **Programación** Escribir un programa que, dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en forma de componentes, calcule $a) \|\mathbf{u}\|$, $b) \|\mathbf{v}\|$, y $c)$ el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

20. Usando el Ejercicio 19 hallar el ángulo entre los vectores

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -7, 5 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$

En los Ejercicios 21-28, averiguar si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, paralelos o ninguna de ambas cosas.

21. $\mathbf{u} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle 2, 18 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6} \right\rangle$

23. $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

24. $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

27. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta, -1 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle \sin \theta, -\cos \theta, \theta \rangle$

29. Probar, usando vectores, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

30. **Ángulo de enlace** Consideremos un tetraedro regular con vértices $(0, 0, 0)$, $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde k denota un número real positivo.

a) Dibujar el tetraedro.

b) Calcular la longitud de sus aristas.

c) Hallar, mediante el producto escalar, el ángulo entre dos aristas.

d) Calcular el ángulo entre los segmentos que van del centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos vértices. Éste es el **ángulo de enlace** para una molécula tal como CH_4 , o PbCl_4 , cuya estructura tiene forma de tetraedro.

31. **Para pensar** ¿Qué se puede decir acerca del ángulo θ entre dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} , si

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

32. **¿Verdadero o falso?** Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales a \mathbf{w} , ¿es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ortogonal a \mathbf{w} ? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, explicar por qué es falso o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

33. Consideremos los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \sin \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcular su producto escalar y usarlo para demostrar la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

34. Hallar los vectores tangentes unitarios a las curvas $y_1 = x^2$ e $y^2 = x^{1/3}$ en sus puntos de intersección. Calcular los ángulos entre las curvas en esos puntos.

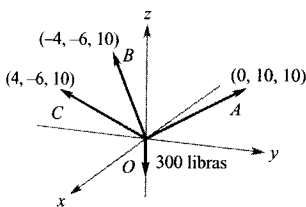
En los Ejercicios 35-38, hallar los cosenos directores de \mathbf{u} y verificar que la suma de sus cuadrados es 1.

35. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 36. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 37. $\mathbf{u} = \langle 0, 6, -4 \rangle$ 38. $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$

- En los Ejercicios 39 y 40, usar una calculadora gráfica para hallar la magnitud y los ángulos directores de la resultante de las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 con puntos iniciales en el origen. Se dan la magnitud y el punto terminal de cada vector.

Vector	Magnitud	Punto final
39. \mathbf{F}_1	50 lb	(10, 5, 3)
\mathbf{F}_2	80 lb	(12, 7, -5)
40. \mathbf{F}_1	300 N	(-20, -10, 5)
\mathbf{F}_2	100 N	(5, 15, 0)

41. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.
 42. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.
 43. **Cables que soportan carga** Una carga está suspendida de tres cables, como muestra la figura. Calcular los ángulos directores del cable OA .



44. **Cables que soportan carga** Hallar el peso de la carga en el Ejercicio 43 si la tensión en el cable OA es de 200 newtons.

En los Ejercicios 45-48, a) proyectar \mathbf{u} sobre \mathbf{v} , y b) calcular el vector componente de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} .

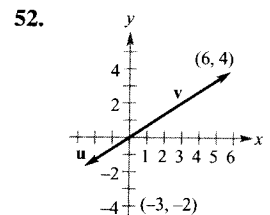
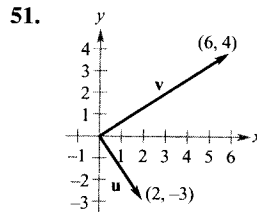
45. $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$ 46. $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 2 \rangle$
 47. $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 2 \rangle$ 48. $\mathbf{u} = \langle 0, 4, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 4 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 0, 2, 3 \rangle$

49. **Programación** Dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en forma de componentes, escribir un programa que exprese en componentes la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

50. Usar el programa del ejercicio anterior para calcular la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

- a) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2 \rangle$
 b) $\mathbf{u} = \langle 5, 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 4 \rangle$

Para pensar En los Ejercicios 51 y 52, usar la figura para hallar mentalmente la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} . (Se dan las coordenadas de los puntos terminales en posición canónica.) Verificar los resultados analíticamente.



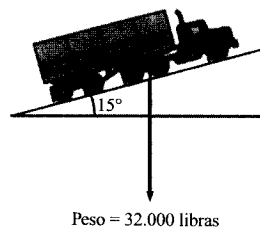
53. **Para pensar** a) ¿Qué se puede decir de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} sabiendo que la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es \mathbf{u} ? b) ¿Y si es $\mathbf{0}$?
 54. **Para pensar** Si la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} tiene la misma longitud que la proyección de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} , ¿es cierto que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$?

En los Ejercicios 55-58, hallar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector \mathbf{u} . (La solución no es única.)

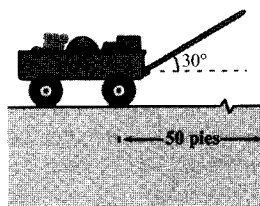
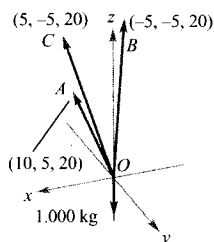
55. $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ 56. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -2 \rangle$ 58. $\mathbf{u} = \langle 0, -3, 6 \rangle$

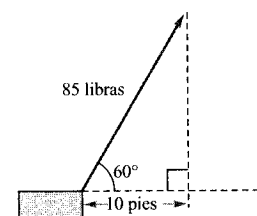
59. **Fuerza de los frenos** Un camión de 32.000 libras está aparcado en una calle con 15° de pendiente (figura). Supuesto que la única fuerza actuante es la de la gravedad, calcular a) la fuerza requerida para impedir que el camión ruede cuesta abajo, y b) la fuerza perpendicular al suelo.



60. **Cables que soportan carga** Calcular la magnitud de la proyección del cable OA de la figura de la página siguiente sobre el semieje z positivo.



61. **Trabajo** Se arrastra 10 pies por el suelo un objeto aplicando una fuerza de 85 libras. Calcular el trabajo realizado si la dirección de la fuerza forma un ángulo de 60° con la horizontal, como indica la figura.



62. **Trabajo** Un vagón de juguete es arrastrado por un niño que tira con una fuerza de 15 libras de una varilla que forma 30° con la horizontal (véase figura). Calcular el trabajo realizado al arrastrarlo 50 pies.

Trabajo En los Ejercicios 63 y 64, calcular el trabajo realizado al mover la partícula de P a Q si la magnitud y la dirección de la fuerza vienen dadas por \mathbf{v} .

63. $P(0, 0, 0)$, $Q(4, 7, 5)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 8 \rangle$
 64. $P(1, 3, 0)$, $Q(-3, 5, 10)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
 65. Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
 66. Probar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.
 67. Demostrar la desigualdad triangular $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
 68. Demostrar el Teorema 10.6.

CONTENIDO ■

El producto vectorial ■

El producto mixto (o producto escalar triple) ■



10.4

El producto vectorial de dos vectores en el espacio

El producto vectorial

En muchos problemas de Física, Ingeniería y Geometría se hace necesario calcular un vector ortogonal a dos vectores dados. En esta sección presentamos un producto que produce un vector así. Se denomina **producto vectorial** y se define fácilmente utilizando los vectores unitarios canónicos.

DEFINICIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en el espacio. El producto vectorial de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

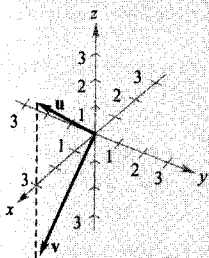
| Nota. Esta definición es aplicable solamente a vectores en tres dimensiones. El producto vectorial de vectores en el plano no está definido.

Una manera conveniente de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ consiste en usar determinantes. (Esta forma de determinante 3×3 se usa sólo como ayuda para memorizar la

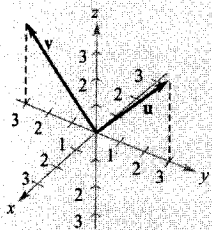
EXPLORACIÓN

Propiedad geométrica del producto vectorial En las figuras adjuntas se muestran tres pares de vectores. Usando la definición, calcule el producto vectorial de cada par. Dibuje los vectores resultantes en un espacio tridimensional. Describa cualquier relación que aprecie entre esos tres vectores. Apoyándose en esa descripción, enuncie una conjetura acerca de \mathbf{u} , \mathbf{v} , y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

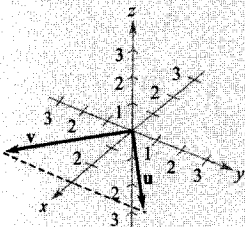
a) $\mathbf{u} = \langle 3, 0, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -3 \rangle$



b) $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, -3, 3 \rangle$



c) $\mathbf{u} = \langle 3, 3, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3, 0 \rangle$



fórmula del producto vectorial, pero no es técnicamente un determinante, ya que sus entradas no son números reales.)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Colocar «u» en la fila 2} \\ &\quad \leftarrow \text{Colocar «v» en la fila 3} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Nótese el signo negativo que antecede a la componente \mathbf{j} . Cada uno de estos determinantes 2×2 se calcula, como es bien sabido, haciendo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ e & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

EJEMPLO 1 Cálculo del producto vectorial

Dados $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, hallar:

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ c) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (4 - 1)\mathbf{i} - (-2 - 3)\mathbf{j} + (1 + 6)\mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (1 - 4)\mathbf{i} - (3 + 2)\mathbf{j} + (-6 - 1)\mathbf{k} \\ &= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Nótese que este resultado es el negativo del obtenido en el apartado a).

$$\text{c) } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

□

NOTACIÓN PARA EL PRODUCTO ESCALAR Y PARA EL PRODUCTO VECTORIAL

La notación utilizada para estos dos productos fue introducida por el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839–1903). A comienzos de los 1880, Gibbs elaboró el «cálculo vectorial» para representar magnitudes físicas. Este sistema fue el punto de partida de la teoría de los cuaterniones de Hamilton.

Los resultados del Ejemplo 1 sugieren algunas propiedades algebraicas interesantes del producto vectorial, como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Estas propiedades, y varias más, se resumen en el próximo teorema.

TEOREMA 10.7 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} vectores en el espacio, y c un escalar.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

Demostración: Para demostrar la propiedad 1, consideremos $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} - (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k}$$

de manera que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Las restantes se dejan como ejercicio (véanse Ejercicios 45-48). \square

La propiedad 1 del Teorema 10.7 nos pone sobre aviso de que el producto vectorial *no es conmutativo*. En particular, esta propiedad indica que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen igual longitud pero direcciones opuestas. El próximo teorema recoge otras propiedades *geométricas* del producto vectorial.

TEOREMA 10.8 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} dos vectores no nulos en el espacio, y sea θ el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a ambos, \mathbf{u} y \mathbf{v} .
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$.
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son múltiplos escalares uno de otro.
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{área del paralelogramo que tiene a } \mathbf{u} \text{ y a } \mathbf{v} \text{ como lados adyacentes.}$

Demostración: Para probar la propiedad 2, observemos que de $\cos \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \end{aligned}$$

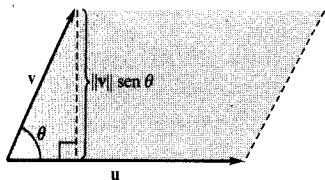


FIGURA 10.35
Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son
lados adyacentes de un paralelogramo.

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2} \\ &= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 4, nos referiremos al paralelogramo de la Figura 10.35, con lados adyacentes \mathbf{u} y \mathbf{v} . Puesto que la altura del paralelogramo es $\|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta$, el área es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{base})(\text{altura}) \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \end{aligned}$$

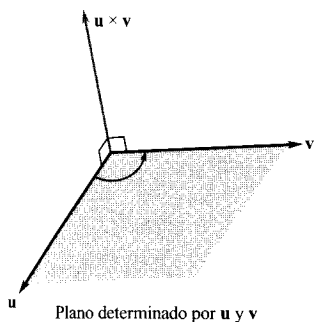
Se deja como ejercicio probar las propiedades 1 y 3 (véase Ejercicios 49 y 50). □

| Nota. De las propiedades 1 y 2 del Teorema 10.8 se deduce que si \mathbf{n} es un vector unitario ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} , entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \pm(\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{sen } \theta)\mathbf{n}$$

Ambos, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, son perpendiculares al plano determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} . Una forma de recordar la orientación de los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} , y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ consiste en compararlos con los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , y $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, como sugiere la Figura 10.36. Los tres vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} , y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman un *sistema dextrógiro*, mientras que \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ constituyen un *sistema levógiro*.

EJEMPLO 2 Utilización del producto vectorial



Plano determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v}

Hallar un vector unitario ortogonal a

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Solución: El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como muestra la Figura 10.37, es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k} \end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{134}$, un vector unitario ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} es

$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k} \quad \square$$

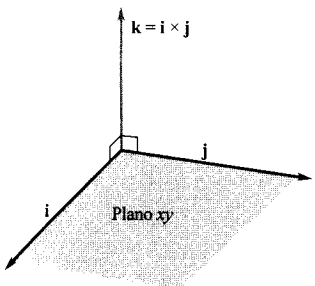


FIGURA 10.36
Sistemas dextrógiros.

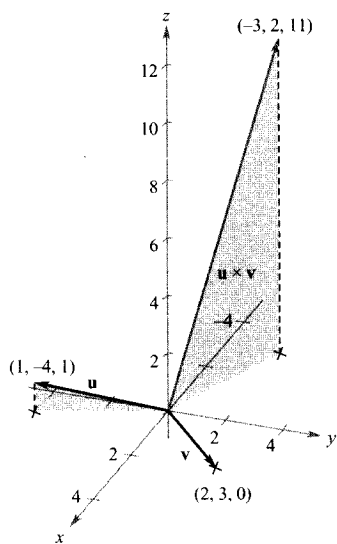


FIGURA 10.37

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a ambos, \mathbf{u} y \mathbf{v} .

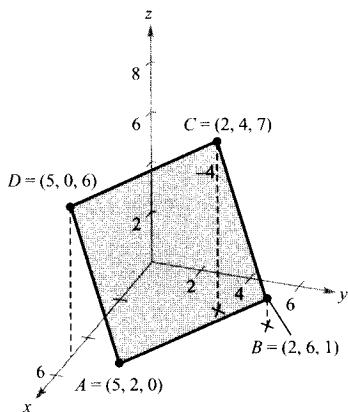


FIGURA 10.38

El área del paralelogramo es aproximadamente 32,19.

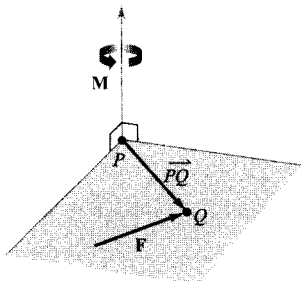


FIGURA 10.39

El momento de \mathbf{F} respecto de P .

| Nota. En el Ejemplo 2 podíamos haber utilizado $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ para construir un vector unitario ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} . Con esa elección, el resultado hubiera sido el negativo del obtenido en el ejemplo.

EJEMPLO 3 Aplicación geométrica del producto vectorial

Probar que el cuadrilátero con vértices en los siguientes puntos es un paralelogramo y calcular su área.

$$A = (5, 2, 0) \quad B = (2, 6, 1)$$

$$C = (2, 4, 7) \quad D = (5, 0, 6)$$

Solución: En la Figura 10.38 vemos que los lados del cuadrilátero corresponden a los cuatro vectores siguientes:

$$\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \overrightarrow{CD} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad \overrightarrow{CB} = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = -\overrightarrow{AD}$$

Así pues, \overrightarrow{AB} es paralelo a \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{AD} es paralelo a \overrightarrow{CB} , y podemos concluir que el cuadrilátero es un paralelogramo con \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} como lados adyacentes. Además, como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

el área de ese paralelogramo es

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1.036} \approx 32,19$$

El paralelogramo ¿es un rectángulo? Para decidir si lo es o no, calcule el ángulo entre los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} . \square

En Física el producto vectorial sirve para medir el **momento \mathbf{M} de una fuerza \mathbf{F} respecto de un punto P** (Figura 10.39). Si el punto de aplicación de la fuerza es Q , el momento de \mathbf{F} respecto de P viene dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} \quad \text{Momento de } \mathbf{F} \text{ respecto de } P$$

La magnitud del momento mide la tendencia del vector \overrightarrow{PQ} a girar en sentido antihorario (regla de la mano derecha) en torno a un eje dirigido a lo largo del vector \mathbf{M} .

EJEMPLO 4 Una aplicación del producto vectorial

Se aplica una fuerza vertical de 50 libras al extremo de una palanca de 1 pie de longitud, ligada a un eje en el punto P (Figura 10.40). Calcular el momento de esa fuerza respecto del punto P cuando $\theta = 60^\circ$.

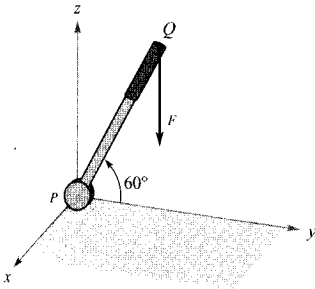


FIGURA 10.40
Una fuerza vertical de 50 libras se aplica en el punto Q.

Solución: Si representamos la fuerza por el vector $\mathbf{F} = -50\mathbf{k}$ y la palanca por

$$\vec{PQ} = \cos(60^\circ)\mathbf{j} + \sin(60^\circ)\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$$

el momento de \mathbf{F} respecto de P es

$$\mathbf{M} = \vec{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = -25\mathbf{i}$$

La magnitud de este momento es de 25 libras-pie. □

| Nota. En el Ejemplo 4 el momento (tendencia de la palanca a girar en torno al eje) depende del ángulo θ . El momento es $\mathbf{0}$ cuando $\theta = \pi/2$ y máximo cuando $\theta = 0$.

El producto mixto (o producto escalar triple)

Dados tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en el espacio, el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

se llama el **producto mixto** (o **producto escalar triple**) de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. La demostración del próximo teorema se deja como ejercicio (véase Ejercicio 53).

| Nota. El valor de un determinante queda multiplicado por -1 si se intercambian dos de sus filas. Tras dos de esos intercambios, el valor del determinante queda invariable. Por tanto, los siguientes productos mixtos son iguales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= \\ \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \end{aligned}$$

TEOREMA 10.9 EL PRODUCTO MIXTO

El producto mixto de $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ viene dado por

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ no son coplanarios, su producto mixto da el volumen del paralelepípedo (poliedro cuyas caras son paralelogramos) que tiene a \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{w} como lados adyacentes (Figura 10.41). Eso es lo que establece el teorema siguiente.

TEOREMA 10.10 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO MIXTO

El volumen de un paralelepípedo con lados adyacentes \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{w} , viene dado por

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

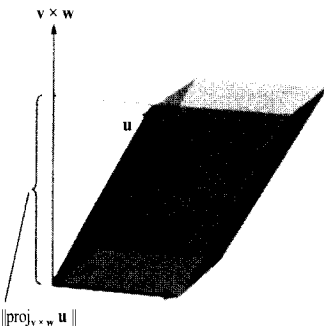


FIGURA 10.41
Área de la base = $\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|$.
Volumen del paralelepípedo = $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

Demostración: En la Figura 10.41 se observa que

$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \text{área de la base}$ y $\|\text{proy}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\| = \text{altura del paralelepípedo}$.
Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) = \|\text{proy}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= \left| \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \right| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \end{aligned}$$

□

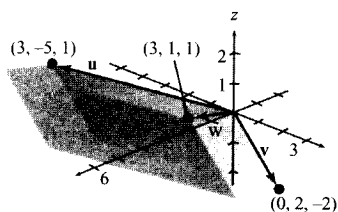


FIGURA 10.42

El paralelepípedo tiene volumen 36.

EJEMPLO 5 Cálculo de un volumen mediante el producto mixto

Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como aristas adyacentes (véase Figura 10.42).

Solución: Del Teorema 10.10 se sigue que

$$\begin{aligned} V &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4) + 5(6) + 1(-6) \\ &= 36 \end{aligned}$$

□

Del Teorema 10.10 se desprende que el volumen del paralelepípedo es 0 si y sólo si los tres vectores son coplanarios. Esto es, tres vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ con el mismo punto inicial están en un plano si y sólo si

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios de la Sección 10.4

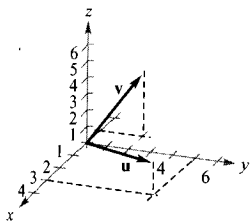
En los Ejercicios 1-6, hallar el producto vectorial de los vectores unitarios y dibujar el resultado.

1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$
2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$
3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$
4. $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$
5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$
6. $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

En los Ejercicios 7-12, calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y probar que es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

7. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, -2, 1 \rangle$
8. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 2 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 0 \rangle$
9. $\mathbf{u} = \langle 12, -3, 0 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle -2, 5, 0 \rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle -10, 0, 6 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 7, 0, 0 \rangle$
11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Para pensar En los Ejercicios 13-16, usar los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la figura para dibujar un vector en la dirección del producto vectorial indicado en un sistema dextrógiro.



13. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 14. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
15. $(-\mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ 16. $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

En los Ejercicios 17-20, usar una calculadora para hallar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y un vector unitario ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} .

17. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle$ 18. $\mathbf{u} = \langle -8, -6, 4 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle -1, 8, 4 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 10, -12, -2 \rangle$

19. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 20. $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{1}{10}\mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$

21. **Programación** Escribir un programa que, dados vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en forma de componentes, calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

22. Usar el programa anterior para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$
a) $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$ b) $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 10 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 3, 8, 5 \rangle$

Área En los Ejercicios 23-26, calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores dados como lados adyacentes. Verificar el resultado con una calculadora.

23. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ 24. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
25. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$ 26. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 0 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0 \rangle$

Área En los Ejercicios 27 y 28, comprobar que los puntos son vértices de un paralelogramo y calcular su área.

27. (1, 1, 1), (2, 3, 4), (6, 5, 2), (7, 7, 5)
28. (2, -1, 1), (5, 1, 4), (0, 1, 1), (3, 3, 4)

Área En los Ejercicios 29-32, calcular el área del triángulo cuyos vértices se especifican. (Ayuda: El área del triángulo con \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados adyacentes es $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.)

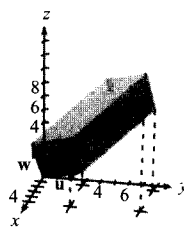
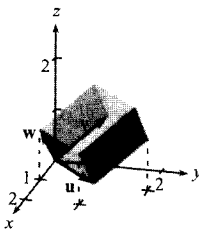
29. (0, 0, 0), (1, 2, 3), (-3, 0, 0)
30. (2, -3, 4), (0, 1, 2), (-1, 2, 0)
31. (1, 3, 5), (3, 3, 0), (-2, 0, 5)
32. (1, 2, 0), (-2, 1, 0), (0, 0, 0)

En los Ejercicios 33-36, calcular $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

33. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ 34. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 0 \rangle$
 $\mathbf{w} = \mathbf{k}$ $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$
35. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 1 \rangle$ 36. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 0 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
 $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ $\mathbf{w} = \langle 0, 2, 2 \rangle$

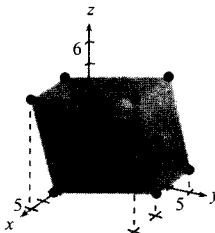
Volumen En los Ejercicios 37 y 38, usar el producto mixto para calcular el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .

37. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ 38. $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5 \rangle$
 $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \langle 4, 0, 4 \rangle$

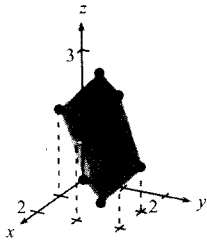


Volumen En los Ejercicios 39 y 40, calcular el volumen del paralelepípedo con los vértices dados (véase figuras).

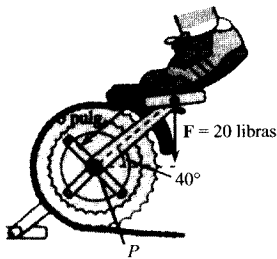
39. (0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (3, 5, 1)
(2, 0, 5), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)



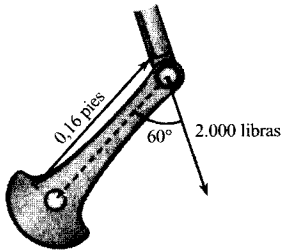
40. (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 1)
(2, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (2, 2, 3)



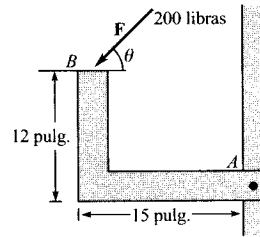
41. **Momento** Un niño frena una bicicleta aplicando una fuerza hacia abajo de 20 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 40° con la horizontal (figura). Calcular el momento respecto de P si la manivela tiene 6 pulgadas de longitud.



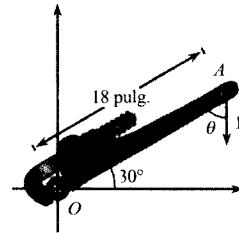
42. **Momento** Tanto la magnitud como la dirección de la fuerza sobre un cigüeñal cambian cuando éste va girando. Calcular el momento sobre el cigüeñal con los datos de la figura.



43. **Optimización** Una fuerza de 200 libras actúa sobre el soporte de la figura.
- Hallar el vector \vec{AB} y el vector \mathbf{F} que representa la fuerza (\mathbf{F} ha de darse en términos de θ).
 - Calcular la magnitud del momento respecto de A calculando $\|\vec{AB} \times \mathbf{F}\|$.
 - Determinar, usando el resultado del apartado b), la magnitud del momento cuando $\theta = 30^\circ$.
 - Hallar, usando el resultado de b), el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. Para ese ángulo, ¿qué relación hay entre los vectores \mathbf{F} y \vec{AB} ? ¿es la que esperaba? ¿Por qué?
 - Representar la función que da la magnitud del momento respecto de A para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Hallar el cero de la función en ese dominio e interpretar el significado de ese cero en el contexto del problema.



44. **Optimización** Una fuerza de 60 libras actúa sobre la llave inglesa de la figura.
- Calcular la magnitud del momento respecto de O evaluando $\|\vec{OA} \times \mathbf{F}\|$. Representar en una calculadora la función de θ resultante.
 - Usar el resultado del apartado a) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 45^\circ$.
 - Definir el ángulo θ , usando el apartado a), cuando la magnitud del momento sea máxima. ¿Es la respuesta que se esperaba? ¿Por qué?



En los Ejercicios 45-52, demostrar la propiedad del producto vectorial que se especifica.

- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
- $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$.
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a \mathbf{u} y a \mathbf{v} .
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son múltiplos escalares uno de otro.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales.
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
- Demstrar el Teorema 10.9.
- Para pensar** Si se doblan las longitudes de dos vectores, ¿cómo cambia la magnitud de su producto vectorial? Explicar la respuesta.
- Para pensar** Los vértices de un triángulo en el espacio son (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) . Explicar cómo se puede hallar un vector perpendicular al triángulo.

56. ¿Verdadero o falso? Se puede definir el producto vectorial de dos vectores en el plano. Explicar la respuesta.
57. Dados los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \sin \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$, calcular su producto vectorial y usar el resultado para probar que

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

58. **Redacción** Lea el artículo «Tooth Tables: Solution of a Dental Problem by Vector Algebra» de Gary Hosler Meisters en *Mathematics Magazine*, noviembre 1982. A continuación, escriba unas líneas explicando cómo se puede usar el álgebra vectorial en la construcción de implantes dentales.

- CONTENIDO ■
 Rectas en el espacio ■
 Planos en el espacio ■
 Trazado de planos en el espacio ■
 Distancias entre puntos, rectas y planos ■

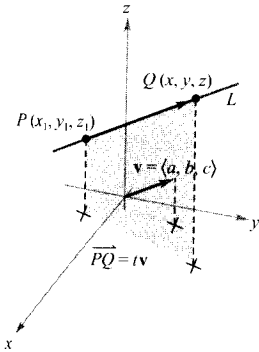


FIGURA 10.43
 La recta L y su vector director \mathbf{v} .



10.5

Rectas y planos en el espacio

Rectas en el espacio

En el plano, se usaba la *pendiente* para expresar la ecuación de una recta. En el espacio es más conveniente utilizar vectores para ello.

En la Figura 10.43, consideremos la recta L que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. El vector \mathbf{v} es el **vector de dirección** (o **vector director**) de la recta L , y a, b, c son sus **números de dirección** (o **números directores**). La recta L contiene precisamente los puntos $Q(x, y, z)$ para los que el vector \overrightarrow{PQ} es paralelo a \mathbf{v} . Eso significa que \overrightarrow{PQ} es un múltiplo escalar de \mathbf{v} , de modo que $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$, donde t es un escalar (un número real).

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle = t\mathbf{v}$$

Igualando las componentes correspondientes, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de una recta en el espacio.

TEOREMA 10.11 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

Una recta L paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ y que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ queda caracterizada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad y \quad z = z_1 + ct$$

Si los números directores a, b, c son todos distintos de cero, se puede eliminar el parámetro t , con lo que se obtienen las **ecuaciones simétricas** de la recta:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Ecuaciones simétricas

EJEMPLO 1 Ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta

Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para la recta L que pasa por el punto $(1, -2, 4)$ paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, 4, -4 \rangle$

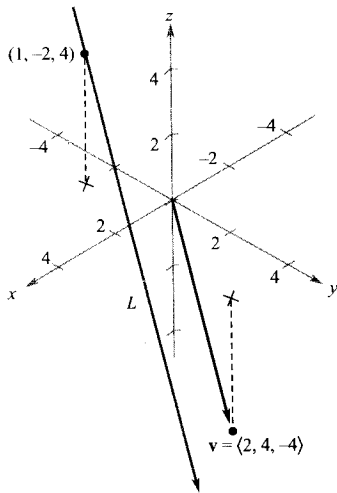


FIGURA 10.44
El vector \mathbf{v} es paralelo a la recta L .

Solución: Para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta usamos las coordenadas $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $z_1 = 4$ y los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ (Figura 10.44).

$$x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 4 - 4t \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Como a , b y c son todos no nulos, un conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4} \quad \text{Ecuaciones simétricas} \quad \square$$

Ni las ecuaciones paramétricas ni las simétricas de una recta son únicas. Así, en el Ejemplo 1, tomando $t = 1$ en las ecuaciones paramétricas se obtendrá el punto $(3, 2, 0)$. Usando este punto y los números de dirección $a = 2$, $b = 4$, $c = -4$ se llega a unas ecuaciones paramétricas diferentes:

$$x = 3 + 2t, y = 2 + 4t, z = -4t$$

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por dos puntos

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Solución: Con los puntos $P(-2, 1, 0)$ y $Q(1, 3, 5)$ construimos un vector director de la recta, a saber

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1 - (-2), 3 - 1, 5 - 0 \rangle = \langle 3, 2, 5 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Usando los números de dirección $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ y el punto $P(-2, 1, 0)$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + 3t, y = 1 + 2t, z = 5t \quad \square$$

| Nota. Al variar t sobre la recta real, las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 2 determinan los puntos (x, y, z) de la recta. En particular, $t = 0$ y $t = 1$ dan los puntos originales $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Planos en el espacio

Hemos visto que una ecuación para una recta en el espacio se puede obtener a partir de un punto y de un vector *paralelo* a ella. Ahora veremos que una ecuación para un plano en el espacio se puede deducir a partir de un punto y un vector *normal* (perpendicular) a él.

Consideremos el plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y con un vector normal no nulo $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, como muestra la Figura 10.45. Este plano consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los que el vector \overrightarrow{PQ} es perpendicular a \mathbf{n} . Usando el producto escalar, podemos escribir

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

La tercera ecuación del plano se dice que está en **forma canónica**.

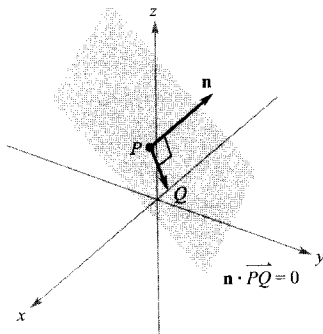


FIGURA 10.45
El vector normal \mathbf{n} es ortogonal a todos los vectores del \overrightarrow{PQ} plano.

TEOREMA 10.12 ECUACIÓN CANÓNICA DE UN PLANO EN EL ESPACIO

El plano que contiene el punto (x_1, y_1, z_1) y tiene un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ puede representarse en **forma canónica** por la ecuación

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Reagrupando términos, se obtiene la **forma general** de la ecuación de un plano en el espacio:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Ecuación general de un plano en el espacio

Dada la ecuación general de un plano es fácil hallar un vector normal a él. Basta usar los coeficientes de x , y , z y escribir $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano en el espacio

Hallar la ecuación general del plano que contiene los puntos $(2, 1, 1)$, $(0, 4, 1)$, y $(-2, 1, 4)$.

Solución: Para aplicar el Teorema 10.12 necesitamos un punto del plano y un vector normal al plano. Hay tres opciones para elegir el punto, pero el vector normal no nos ha sido dado. Con el fin de construir un vector normal, recurrimos al producto vectorial de los vectores que van del punto $(2, 1, 1)$ a los puntos $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$ (Figura 10.46). Las expresiones de \mathbf{u} y \mathbf{v} en componentes son

$$\mathbf{u} = \langle 0 - 2, 4 - 1, 1 - 1 \rangle = \langle -2, 3, 0 \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle -2 - 2, 1 - 1, 4 - 1 \rangle = \langle -4, 0, 3 \rangle$$

así que

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

$$= \langle a, b, c \rangle$$

es normal al plano dado. Usando los números de dirección de \mathbf{n} y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, llegamos a la ecuación del plano:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0 \quad \text{Forma canónica}$$

$$9x + 6y + 12z - 36 = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \quad \text{Forma general} \quad \square$$

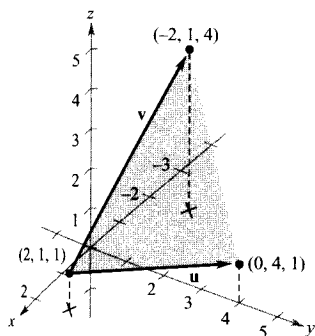


FIGURA 10.46

El plano determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} .

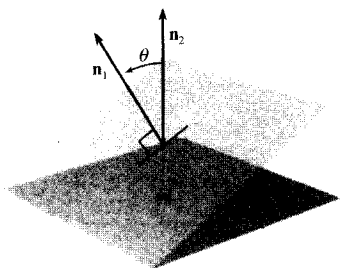


FIGURA 10.47
El ángulo θ entre dos planos.

| Nota. Compruebe que en el Ejemplo 3 cada uno de los tres puntos dados satisface la ecuación

Dos planos distintos en el espacio o son paralelos o se cortan en una recta. Si se cortan, el ángulo entre ellos lo da el ángulo que forman sus vectores normales (Figura 10.47). Así pues, si los vectores \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son normales a dos planos que se cortan, el ángulo θ entre los vectores normales es igual al ángulo entre los dos planos y viene dado por

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$$

Ángulo entre dos planos

En consecuencia, dos planos con vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son

1. *perpendiculares* si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.
2. *paralelos* si \mathbf{n}_1 es un múltiplo escalar de \mathbf{n}_2 .

EJEMPLO 4 Recta intersección de dos planos

Hallar el ángulo entre los planos

$$x - 2y + z = 0$$

Ecuación del plano 1

$$2x + 3y - 2z = 0$$

Ecuación del plano 2

y ecuaciones paramétricas de su recta intersección (Figura 10.48).

Solución: Los vectores normales a los planos son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, -2, 1 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 3, -2 \rangle$. Por consiguiente, el ángulo entre los planos viene dado por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} && \text{Coseno del ángulo entre } \mathbf{n}_1 \text{ y } \mathbf{n}_2 \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{6}\sqrt{17}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{102}} \\ &\approx 0,59409 && \theta \approx \arccos 0,59409 \end{aligned}$$

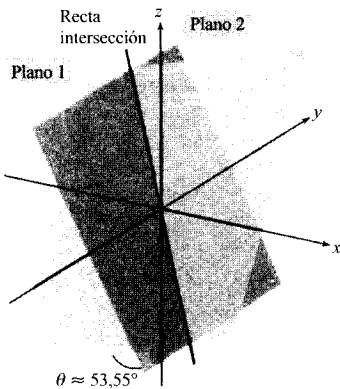


FIGURA 10.48
El ángulo entre los planos es aproximadamente $53,55^\circ$.

Esto implica que el ángulo entre los dos planos es $\theta \approx 53,55^\circ$. Podemos encontrar la recta intersección resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones lineales de los planos. Una manera de hacer esto consiste en multiplicar la primera ecuación por -2 y sumar el resultado a la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z = 0 & \Rightarrow & -2x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 & & 2x + 3y - 2z = 0 \\ \hline & & 7y - 4z = 0 \end{array} \Rightarrow y = \frac{4z}{7}$$

Sustituyendo $y = 4z/7$ en una de las ecuaciones originales, se ve que $x = z/7$. Finalmente, haciendo $t = z/7$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t, y = 4t, y z = 7t \quad \text{Recta intersección}$$

de manera que 1, 4, 7 son números directores para la recta intersección. \square

Hagamos notar que los números directores en el Ejemplo 4 se pueden obtener del producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Eso quiere decir que la recta intersección de los dos planos es paralela al producto vectorial de sus vectores normales.

Trazado de planos en el espacio

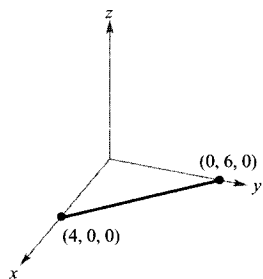
Si un plano corta a uno de los planos coordenados, la recta de intersección se llama la **traza** del plano dado en el plano coordenado. Para dibujar un plano en el espacio, es útil hallar sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas y sus trazas en los planos de coordenadas. A título de ejemplo, consideremos el plano

$$3x + 2y + 4z = 12 \quad \text{Ecuación del plano}$$

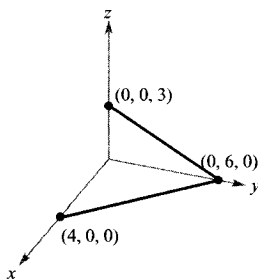
Haciendo $z = 0$ hallamos su traza en el plano xy , que resulta ser

$$3x + 2y = 12 \quad \text{Traza } xy$$

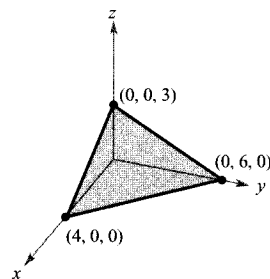
Esta recta corta al eje x en $(4, 0, 0)$ y al eje y en $(0, 6, 0)$. En la Figura 10.49 continuamos este proceso hallando las trazas yz y xz , y sombreando la región triangular del primer octante.



Traza xy ($z = 0$):
 $3x + 2y = 12$



Traza yz ($x = 0$):
 $2y + 4z = 12$



Traza xz ($y = 0$):
 $3x + 4z = 12$

FIGURA 10.49
Trazas del plano $3x + 2y + 4z = 12$.

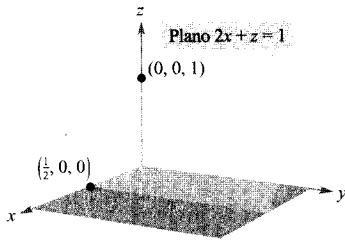
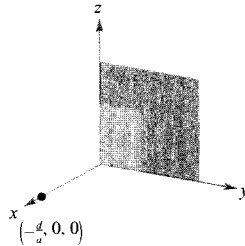
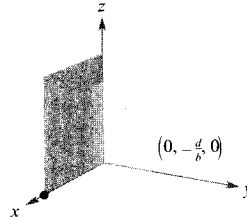


FIGURA 10.50

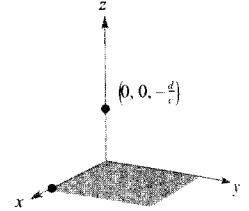
Si en la ecuación de un plano está ausente alguna de las variables, como en $2x + z = 1$, el plano es *paralelo al eje* de la variable ausente (Figura 10.50). Si faltan dos variables en la ecuación de un plano, éste es *paralelo al plano coordenado* de las dos variables ausentes (Figura 10.51).



El plano $ax + d = 0$ es paralelo al plano yz



El plano $by + d = 0$ es paralelo al plano xz



El plano $cz + d = 0$ es paralelo al plano xy

FIGURA 10.51

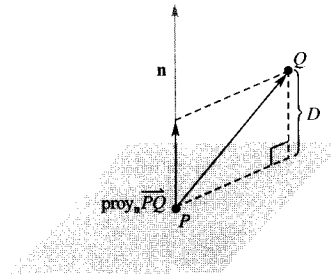
Distancias entre puntos, rectas y planos

Cerramos la sección analizando dos tipos de problemas sobre distancias en el espacio.

1. Calcular la distancia de un punto a un plano.
2. Calcular la distancia de un punto a una recta.

Sus soluciones ilustran la versatilidad y la utilidad de los vectores en Geometría analítica: el primer problema se resuelve mediante el *producto escalar* y el segundo mediante el *producto vectorial*.

La distancia D de un punto Q a un plano es la longitud del segmento más corto que une Q con el plano (Figura 10.52). Si P es un punto *arbitrario* del plano, podemos hallar esa distancia proyectando el vector \vec{PQ} sobre el vector normal \mathbf{n} . La longitud de esta proyección es la distancia buscada.



$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}} \vec{PQ}\|$$

FIGURA 10.52

Distancia de un punto a un plano.

TEOREMA 10.13

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia a un plano de un punto Q (no perteneciente al plano) es

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}} \vec{PQ}\| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde P es un punto cualquiera del plano y \mathbf{n} es normal al plano.

Para determinar un punto en el plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ ($a \neq 0$), hacemos $y = 0$ y $z = 0$. De la ecuación resultante, $ax + d = 0$, concluimos que $(-d/a, 0, 0)$ está en ese plano.

EJEMPLO 5 Distancia de un punto a un plano

Calcular la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano

$$3x - y + 2z = 6$$

Solución: Sabemos que $\mathbf{n} = \langle 3, -1, 2 \rangle$ es normal al plano dado. Para encontrar un punto del plano, hacemos $y = 0$ y $z = 0$. El resultado es el punto $P(2, 0, 0)$. El vector de P a Q viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \langle 1 - 2, 5 - 0, -4 - 0 \rangle \\ &= \langle -1, 5, -4 \rangle \end{aligned}$$

La fórmula de la distancia en el Teorema 10.13 implica que

$$\begin{aligned} D &= \frac{|\vec{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\langle -1, 5, -4 \rangle \cdot \langle 3, -1, 2 \rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|-3 - 5 - 8|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

□

De acuerdo con el Teorema 10.13, la distancia del punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

es decir

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{Distancia punto-plano}$$

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto del plano y $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

EJEMPLO 6 Distancia entre dos planos paralelos

Calcular la distancia entre los planos paralelos

$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0$$

Solución: Para hallar la distancia entre los dos planos, que se muestran en la Figura 10.53, elegimos un punto del primero, digamos $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$. Entonces, de la ecuación del segundo plano resulta $a = 6, b = -2, c = 4, y d = 4$, así que la distancia viene dada por

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2,14 \end{aligned} \quad \square$$

| Nota. La elección del punto P en el Ejemplo 5 es arbitraria. Considere un punto distinto del plano y compruebe que se obtiene la misma distancia.

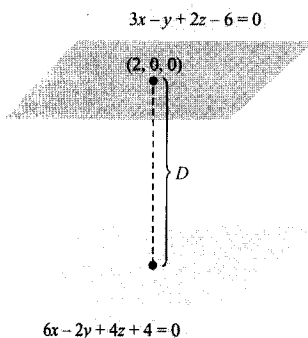


FIGURA 10.53

La distancia entre los planos paralelos es aproximadamente 2,14.

La fórmula de la distancia de un punto a una recta en el espacio recuerda la de la distancia de un punto a un plano, salvo que el producto escalar queda reemplazado por el producto vectorial y el vector normal \mathbf{n} por un vector de dirección de la recta.

TEOREMA 10.14**DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO**

La distancia de un punto Q a una recta en el espacio viene dada por

$$D = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

donde \mathbf{u} es un vector de dirección de la recta y P un punto de la recta.

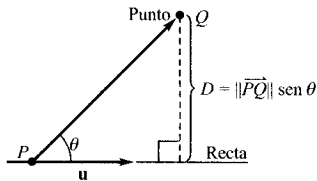


FIGURA 10.54

Distancia de un punto a una recta.

Demostración: En la Figura 10.54 vemos que la distancia D del punto Q a la recta verifica $D = \|\vec{PQ}\| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{u} y \vec{PQ} . Del Teorema 10.8 se sigue que

$$\|\mathbf{u}\| \|\vec{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{u} \times \vec{PQ}\| = \|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|$$

En consecuencia,

$$D = \|\vec{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \quad \square$$

EJEMPLO 7 Distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$x = -2 + 3t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + 4t$$

Solución: Usando los números directores 3, -2, 4 sabemos que un vector de dirección de la recta es

$$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle \quad \text{Vector de dirección}$$

Para determinar un punto de la recta hacemos $t = 0$, con lo que se obtiene

$$P = (-2, 0, 1)$$

Así pues,

$$\vec{PQ} = \langle 3 - (-2), -1 - 0, 4 - 1 \rangle = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

y podemos calcular el producto vectorial

$$\vec{PQ} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = \langle 2, -11, -7 \rangle$$

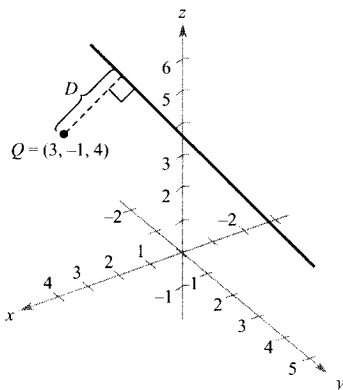


FIGURA 10.55

La distancia entre el punto Q y la recta es $\sqrt{6} \approx 2,45$.

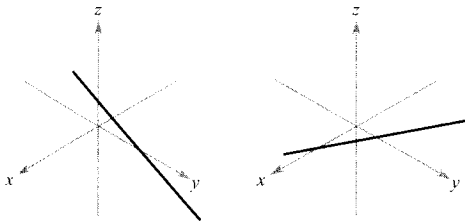
Finalmente, del Teorema 10.14 concluimos que la distancia pedida es

$$D = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2,45 \quad (\text{Véase Figura 10.55}) \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 10.5

En los Ejercicios 1 y 2, la figura muestra la gráfica de una recta dada por las ecuaciones paramétricas adjuntas. *a)* Dibujar una flecha sobre la recta que indique su orientación. *b)* Hallar las coordenadas de dos puntos, P y Q , de la recta y considerar el vector \vec{PQ} . ¿Qué relación hay entre las componentes de este vector y los coeficientes de t en las ecuaciones paramétricas? ¿Cuál es la razón de tal relación? *c)* Determinar las coordenadas de los puntos de intersección con los planos de coordenadas. Si la recta no corta a uno de los planos de coordenadas explicar por qué.

1. $x = 1 + 3t$ 2. $x = 2 - 3t$
 $y = 2 - t$ $y = 2$
 $z = 2 + 5t$ $z = 1 - t$



En los Ejercicios 3-8, hallar ecuaciones *a)* paramétricas y *b)* simétricas, para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector o recta indicados. (Para cada recta, expresar los números directores como enteros.)

Punto	Paralela a
3. (0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$
4. (0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \left\langle -2, \frac{5}{2}, 1 \right\rangle$
5. (-2, 0, 3)	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
6. (-2, 0, 3)	$\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
7. (1, 0, 1)	$x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$
8. (-3, 5, 4)	$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

En los Ejercicios 9 y 10, hallar ecuaciones *a)* paramétricas y *b)* simétricas para la recta que pasa por los dos puntos. (Para cada recta, expresar los números directores como enteros.)

9. $(5, -3, -2), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

10. $(1, 0, 1), (1, 3, -2)$

En los Ejercicios 11 y 12, hallar ecuaciones paramétricas para la recta.

11. La recta que pasa por el punto (2, 3, 4) y es paralela a los planos xz e yz .
 12. La recta que pasa por el punto (2, 3, 4) y es perpendicular al plano $3x + 2y - z = 6$.

En los Ejercicios 13 y 14, determinar qué puntos están en la recta L .

13. La recta que pasa por el punto (-2, 3, 1) y es paralela al vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$.
a) (2, 3, 0) *b)* (-6, 3, 2) *c)* (2, 1, 0) *d)* (6, 3, -2)
 14. La recta que pasa por los puntos (2, 0, -3) y (4, 2, -2).
a) (4, 1, -2) *b)* $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ *c)* (-1, -3, -4)

En los Ejercicios 15-18, averiguar si las rectas se cortan. En caso afirmativo, hallar el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.

15. $x = 4t + 2, y = 3, z = -t + 1$
 $x = 2s + 2, y = 2s + 3, z = s + 1$
 16. $x = -3t + 1, y = 4t + 1, z = 2t + 4$
 $x = 3s + 1, y = 2s + 4, z = -s + 1$
 17. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z+1, \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$
 18. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z-3, \frac{x-3}{2} = y+5 = \frac{z+2}{4}$

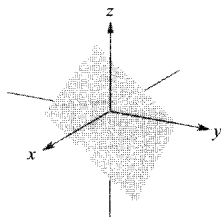
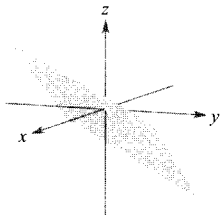
En los Ejercicios 19 y 20, representar en una calculadora el par de rectas y hallar su punto de intersección.

19. $x = 2t + 3, y = 5t - 2, z = -t + 1$
 $x = -2s + 7, y = s + 8, z = 2s - 1$

$$20. \quad \begin{aligned} x &= 2t - 1, \quad y = -4t + 10, \quad z = t \\ x &= 5s - 12, \quad y = 3s + 11, \quad z = -2s - 4 \end{aligned}$$

Producto vectorial En los Ejercicios 21 y 22, a) hallar las coordenadas de tres puntos P , Q y R del plano y considerar los vectores \vec{PQ} y \vec{PR} . b) Hallar $\vec{PQ} \times \vec{PR}$. ¿Qué relación hay entre las componentes del producto vectorial y los coeficientes en la ecuación del plano? ¿Por qué?

$$21. \quad 4x - 3y - 6z = 6 \qquad 22. \quad 2x + 3y + 4z = 4$$



En los Ejercicios 23-28, hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dados.

Punto	Perpendicular a
23. (2, 1, 2)	$\mathbf{n} = \mathbf{i}$
24. (1, 0, -3)	$\mathbf{n} = \mathbf{k}$
25. (3, 2, 2)	$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
26. (0, 0, 0)	$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
27. (0, 0, 6)	$x = 1 - t, y = 2 + t, z = 4 - 2t$
28. (3, 2, 2)	$\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

En los Ejercicios 29-40, hallar una ecuación del plano.

- El plano que pasa por (0, 0, 0), (1, 2, 3) y (-2, 3, 3).
- El plano que pasa por (1, 2, -3), (2, 3, 1), y (0, -2, -1).
- El plano que pasa por (1, 2, 3), (3, 2, 1), y (-1, -2, 2).
- El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) paralelo al plano yz .
- El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralelo al plano xy .
- El plano que contiene al eje y y forma un ángulo de $\pi/6$ con el semieje x positivo.
- El plano que contiene las rectas de ecuaciones

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

- El plano que pasa por el punto (2, 2, 1) y contiene la recta dada por

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z$$

- El plano que pasa por los puntos (2, 2, 1) y (-1, 1, -1) y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.
- El plano que pasa por los puntos (3, 2, 1) y (3, 1, -5) y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$.
- El plano que pasa por los puntos (1, -2, -1) y (2, 5, 6) y es paralelo al eje x .
- El plano que pasa por los puntos (4, 2, 1) y (-3, 5, 7) y es paralelo al eje z .

En los Ejercicios 41-46, averiguar si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguna de ambas cosas. En los casos en que no sean paralelos ni ortogonales, hallar el ángulo de intersección.

- | | |
|--|---|
| 41. $5x - 3y + z = 4$
$x + 4y + 7z = 1$ | 42. $3x + y - 4z = 3$
$-9x - 3y + 12z = 4$ |
| 43. $x - 3y + 6z = 4$
$5x + y - z = 4$ | 44. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$ |
| 45. $x - 5y - z = 1$
$5x - 25y - 5z = -3$ | 46. $2x - z = 1$
$4x + y + 8z = 10$ |

En los Ejercicios 47-52, marcar las intersecciones y dibujar la gráfica del plano.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 47. $4x + 2y + 6z = 12$ | 48. $3x + 6y + 2z = 6$ |
| 49. $2x - y + 3z = 4$ | 50. $2x - y + z = 4$ |
| 51. $y + z = 5$ | 52. $x + 2y = 4$ |

■ En los Ejercicios 53-56, representar el plano en una calculadora.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 53. $2x + y - z = 6$ | 54. $x - 3z = 3$ |
| 55. $-5x + 4y - 6z = -8$ | 56. $2,1x - 4,7y - z = -3$ |

En los Ejercicios 57 y 58, hallar ecuaciones paramétricas para la recta intersección de los dos planos.

- | | |
|--|---|
| 57. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$ | 58. $x - 3y + 6z = 4$
$5x + y - z = 4$ |
|--|---|

En los Ejercicios 59-62, hallar el punto de intersección (si lo hay) de la recta con el plano. Determinar asimismo si la recta está contenida en el plano.

- $2x - 2y + z = 12$, $x - \frac{1}{2} = \frac{y + (3/2)}{-1} = \frac{z + 1}{2}$

60. $2x + 3y = -5, \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6}$

61. $2x + 3y = 10, \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

62. $5x + 3y = 17, \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{5}$

En los Ejercicios 63 y 64, calcular la distancia del punto al plano.

63. $(0, 0, 0)$
 $2x + 3y + z = 12$

64. $(1, 2, 3)$
 $2x - y + z = 4$

En los Ejercicios 65 y 66, calcular la distancia entre los planos.

65. $x - 3y + 4z = 10$
 $x - 3y + 4z = 6$

66. $2x - 4z = 4$
 $2x - 4z = 10$

En los Ejercicios 67 y 68, hallar la distancia del punto a la recta dada en forma paramétrica.

67. $(1, 5, -2); x = 4t - 2, y = 3, z = -t + 1$

68. $(4, 1, -2); x = 2t + 2, y = 2t, z = t - 3$

69. **Un modelo matemático** El consumo *per capita* (en libras) de distintos tipos de leche en EE.UU. viene recogido en la tabla. Los consumos de leche desnatada, semidesnatada y entera se denotan por las variables x , y , z respectivamente. (Fuente: U.S. Department of Agriculture.)

Año	1970	1975	1980	1985
x	11,6	11,5	11,6	12,6
y	29,8	53,2	70,1	83,3
z	213,5	174,9	141,7	119,7

Año	1990	1991	1992	1993
x	22,9	23,9	25,0	26,7
y	98,3	99,7	99,4	97,1
z	87,6	84,7	81,5	77,8

Un modelo para esos datos viene dado por

$$0,987x + 1,71y + z = 276$$

- Completar una cuarta fila de la tabla usando ese modelo para estimar z para valores dados de x e y . Comparar las aproximaciones obtenidas con los valores reales de z .
- Según este modelo, ¿qué efecto tendrá un aumento del consumo de dos tipos de leche en el consumo del tipo restante?
- Dibujar las trazas del plano y su gráfica en el primer octante (puesto que x , y , z han de ser no negativas).

70. **Optimización** Consideremos la recta de ecuaciones paramétricas

$$x = -t + 3, y = \frac{1}{2}t + 1, z = 2t - 1$$

y el punto $(4, 3, s)$ para un número real s arbitrario.

- Expresar la distancia del punto a la recta en función de s .
- Representar esa función con ayuda de una calculadora. Hallar, a la vista de la gráfica, el valor de s que hace mínima la distancia.
- Usar el *zoom* para ampliar varias veces la gráfica del apartado b). ¿Parece que la gráfica tiene asíntotas oblicuas? Explicar la respuesta. Si es así, hallar sus ecuaciones.

71. **Para pensar**

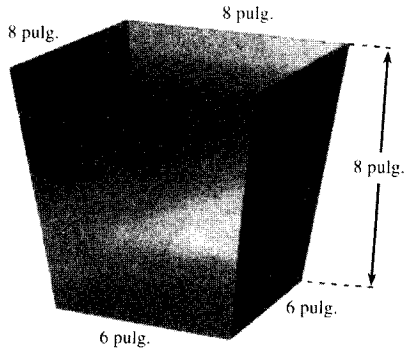
- Describir y hallar una ecuación de la superficie generada por los puntos (x, y, z) que distan cuatro unidades del punto $(3, -2, 5)$.
- Describir y hallar una ecuación de la superficie generada por los puntos (x, y, z) que distan cuatro unidades del plano

$$4x - 3y + z = 10$$

72. **Para pensar** Consideremos dos vectores no nulos, \mathbf{u} y \mathbf{v} . Describir la figura geométrica generada por los puntos terminales de los siguientes vectores, donde s y t denotan números reales arbitrarios.

$$a) \ t\mathbf{v} \quad b) \ \mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad c) \ s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

73. **Diseño industrial** Hallar el ángulo entre lados adyacentes del contenedor de la figura de la página siguiente, al que vierte el cereal una cosechadora.



74. Si a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2 son dos conjuntos de números directores de una misma recta, probar que existe un escalar d tal que

$$a_1 = a_2d, b_1 = b_2d, \text{ y } c_1 = c_2d$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 75 y 76, discutir si el enunciado es correcto o no. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

75. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es cualquier vector en el plano dado por $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
76. Dos rectas cualesquiera en el espacio o se cortan o son paralelas.
77. Consideremos el plano que pasa por los puntos P, R y S . Demostrar que la distancia de un punto Q a ese plano es

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$, y $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ}$

78. Probar que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

En esta sección hemos presentado dos fórmulas para calcular distancias: de un punto a un plano y de un punto a una recta. En este proyecto va a analizar un tercer problema de distancias: la distancia entre dos rectas que se cruzan, esto es, dos rectas que ni se cortan ni son paralelas (véase figura).

- a) Considere las dos rectas en el espacio

$$\begin{aligned} L_1: x &= 4 + 5t, y = 5 + 5t, z = 1 - 4t \\ L_2: x &= 4 + s, y = -6 + 8s, z = 7 - 3s \end{aligned}$$

- Probar que no son paralelas.
- Probar que no se cortan, de modo que son dos rectas que se cruzan.
- Demostrar que esas dos rectas están contenidas en dos planos paralelos.
- Calcular la distancia entre los dos planos del apartado iii). Ésta es, por definición, la distancia entre las dos rectas que se cruzan.

- b) Hallar, por el procedimiento anterior, la distancia entre las rectas

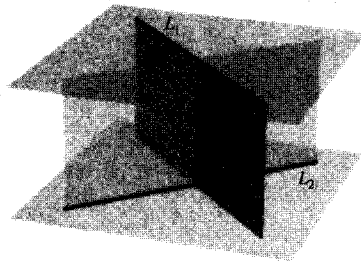
$$\begin{aligned} L_1: x &= 2t, y = 4t, z = 6t \\ L_2: x &= 1 - s, y = 4 + s, z = -1 + s \end{aligned}$$

- c) Ídem para las rectas

$$\begin{aligned} L_1: x &= 3t, y = 2 - t, z = -1 + t \\ L_2: x &= 1 + 4s, y = -2 + s, z = -3 - 3s \end{aligned}$$

- d) Escribir una fórmula que permita calcular la distancia entre las rectas que se cruzan

$$\begin{aligned} L_1: x &= x_1 + a_1t, y = y_1 + b_1t, z = z_1 + c_1t \\ L_2: x &= x_2 + a_2s, y = y_2 + b_2s, z = z_2 + c_2s \end{aligned}$$



- CONTENIDO ▪
 Superficies cilíndricas ▪
 Superficies cuádricas ▪
 Superficies de revolución ▪

10.6 Superficies en el espacio

Superficies cilíndricas

Las primeras cinco secciones de este capítulo estudiaban los preliminares vectoriales necesarios para afrontar el cálculo vectorial y el cálculo en el espacio. En esta sección y en la siguiente estudiaremos superficies y sistemas de coordenadas alternativos en el espacio. Ya conocemos dos tipos especiales de superficies.

1. Esferas: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ Sección 10.2
2. Planos: $ax + by + cz + d = 0$ Sección 10.5

Un tercer tipo lo constituyen las **superficies cilíndricas** (o simplemente **cilindros**). Para definir lo que se entiende por un cilindro en general, consideremos el cilindro recto circular usual de la Figura 10.56. Podemos imaginar este cilindro generado por una recta vertical que se mueve alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ del plano xy . Este círculo se llama la **curva directriz** (o **curva generatriz**) del cilindro, como se especifica en la próxima definición.

DEFINICIÓN DE LOS CILINDROS

Sea C una curva en un plano y L una recta no paralela a ese plano. El conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se llama un **cilindro de curva directriz C** . Cada una de esas rectas paralelas se llama una **recta generatriz** del cilindro.

Nota. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que C está en uno de los planos de coordenadas. Más aún, en este libro restringiremos nuestra atención a los cilindros *rectos*, es decir, cilindros cuyas rectas generatrices son perpendiculares al plano de coordenadas que contiene a C , como ilustra la Figura 10.57.

Para el cilindro circular recto de la Figura 10.56, la ecuación de la curva directriz es

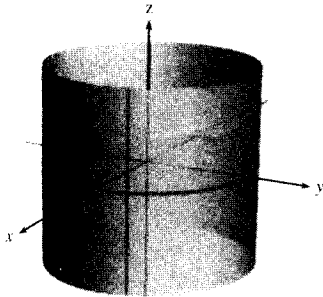
$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{Ecuación de la curva directriz en el plano } xy$$

Para hallar una ecuación del cilindro observamos que cualquiera de las rectas generatrices se puede seleccionar fijando valores de x e y , y haciendo variar z por toda la recta real. En este sentido, el valor de z es arbitrario y, en consecuencia, no aparece en la ecuación. En otras palabras, la ecuación de ese cilindro coincide con la de su curva directriz.

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{Ecuación de un cilindro en el espacio}$$

ECUACIÓN DE UN CILINDRO

La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes de coordenadas contiene solamente las variables correspondientes a los otros dos ejes.



Cilindro circular recto:
 $x^2 + y^2 = a^2$

FIGURA 10.56

Las rectas generatrices son paralelas al eje z .

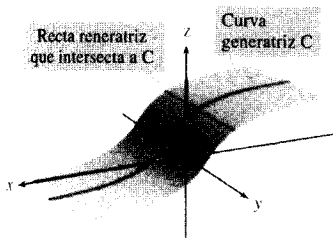


FIGURA 10.57

Cilindro: Las rectas generatrices cortan a C y son paralelas a una recta dada.

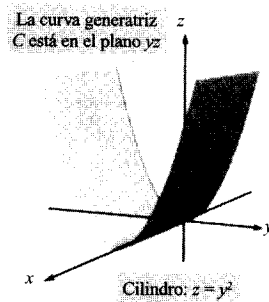
EJEMPLO 1 Gráficas de cilindros

Dibujar un esbozo de la superficie dada por cada una de las ecuaciones siguientes.

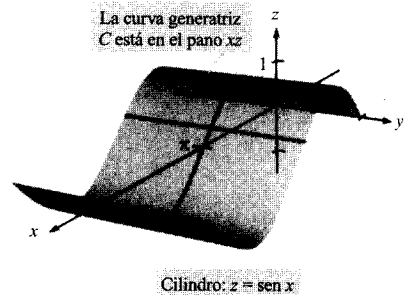
a) $z = y^2$ b) $z = \text{sen } x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Solución:

- a) Es la gráfica de un cilindro cuya curva directriz, $z = y^2$, es una parábola en el plano yz . Sus rectas generatrices son paralelas al eje x (Figura 10.58a).
 b) Es la gráfica de un cilindro cuya curva directriz es la curva seno en el plano xz . Sus generatrices son paralelas al eje y (Figura 10.58b).



a) Las generatrices son paralelas al eje x



b) Las generatrices son paralelas al eje y

FIGURA 10.58

ADVERTENCIA En la tabla de las páginas 1025 y 1026 se muestra sólo una de las posibles orientaciones de cada cuádrica. Si la superficie estuviera orientada a lo largo de un eje distinto, su ecuación cambiaría en concordancia, como ilustran los Ejemplos 2 y 3. El hecho de que los dos tipos de paraboloides tengan una variable elevada a potencia unidad ayuda a clasificar cuádricas. Los otros cuatro tipos tienen ecuaciones que son de *segundo grado* en las tres variables.

Superficies cuádricas

El cuarto tipo básico de superficies en el espacio lo constituyen las superficies cuádricas, análogo tridimensional de las secciones cónicas.

SUPERFICIES CUÁDRICAS

La ecuación de una **superficie cuádrica** en el espacio es una ecuación de **segundo grado** de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Hay seis clases de cuádricas: **elipsoide**, **hiperboloide de una hoja**, **hiperboloide de dos hojas**, **cono elíptico**, **paraboloide elíptico** y **paraboloide hiperbólico**.

La intersección de una superficie con un plano se llama la **traza de la superficie** en ese plano. Para visualizar una superficie en el espacio es conveniente determinar de antemano sus trazas con planos elegidos astutamente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas. Estas trazas, junto con la **forma canónica** de la ecuación de cada cuádrica, se muestran en la tabla de las páginas 1025 y 1026.

Para clasificar una cuádrica, empezaremos escribiendo su ecuación en forma canónica y seguiremos hallando sus trazas en los planos de coordenadas o en otros planos que sean paralelos a los planos coordenados.

TABLA 14.1. Superficies cuádricas

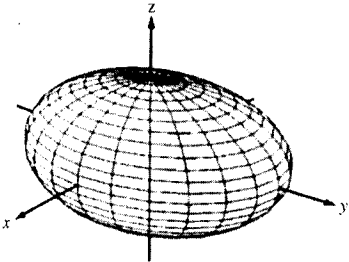
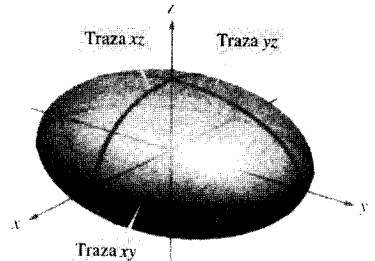
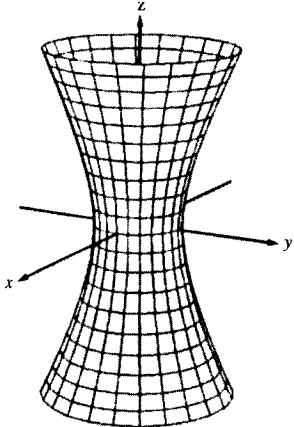
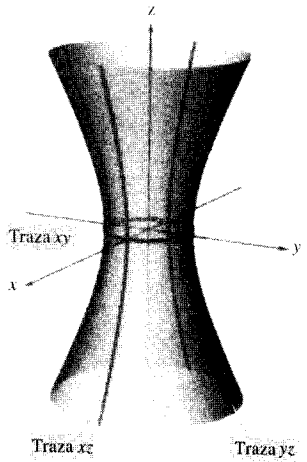
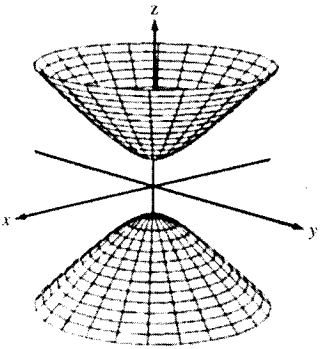
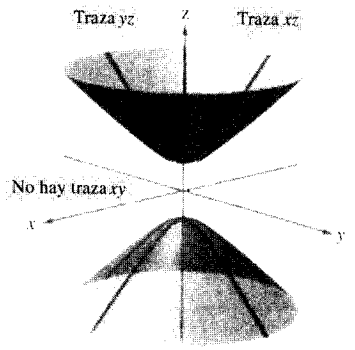
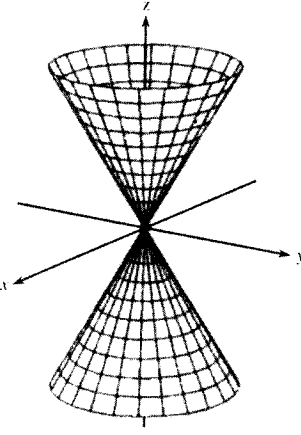
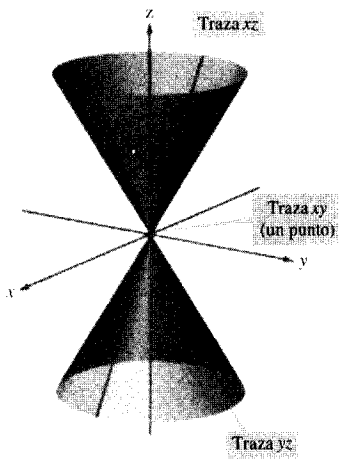
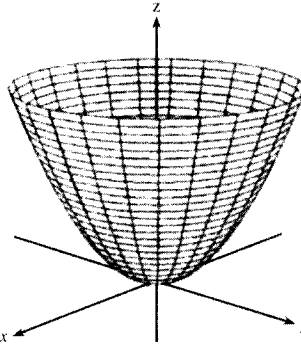
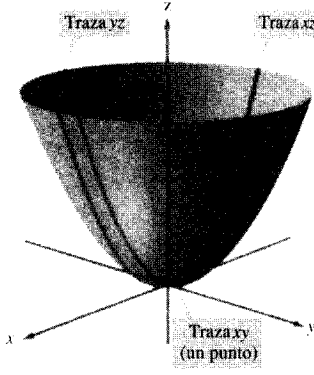
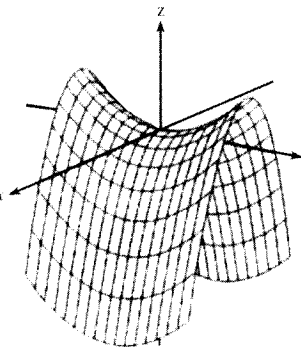
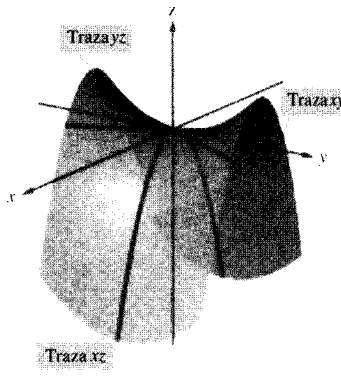
	<p style="text-align: center;">Elipsoide</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><u>Traza</u></th> <th style="text-align: left;"><u>Plano</u></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.</p>	<u>Traza</u>	<u>Plano</u>	Elipse	Paralelo al plano xy	Elipse	Paralelo al plano xz	Elipse	Paralelo al plano yz	
<u>Traza</u>	<u>Plano</u>									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Elipse	Paralelo al plano xz									
Elipse	Paralelo al plano yz									
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de una hoja</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><u>Traza</u></th> <th style="text-align: left;"><u>Plano</u></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.</p>	<u>Traza</u>	<u>Plano</u>	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
<u>Traza</u>	<u>Plano</u>									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de dos hojas</p> $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><u>Traza</u></th> <th style="text-align: left;"><u>Plano</u></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.</p>	<u>Traza</u>	<u>Plano</u>	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
<u>Traza</u>	<u>Plano</u>									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									

TABLA 14.1. Superficies cuádricas (Continuación)

	<p style="text-align: center;">Cono elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><i>Traza</i></th> <th style="text-align: left;"><i>Plano</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan.</p>	<i>Traza</i>	<i>Plano</i>	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
<i>Traza</i>	<i>Plano</i>									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									
	<p style="text-align: center;">Paraboloide elíptico</p> $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><i>Traza</i></th> <th style="text-align: left;"><i>Plano</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Parábola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Parábola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.</p>	<i>Traza</i>	<i>Plano</i>	Elipse	Paralelo al plano xy	Parábola	Paralelo al plano xz	Parábola	Paralelo al plano yz	
<i>Traza</i>	<i>Plano</i>									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Parábola	Paralelo al plano xz									
Parábola	Paralelo al plano yz									
	<p style="text-align: center;">Paraboloide hiperbólico</p> $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;"><i>Traza</i></th> <th style="text-align: left;"><i>Plano</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Parábola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Parábola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </tbody> </table> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.</p>	<i>Traza</i>	<i>Plano</i>	Hipérbola	Paralelo al plano xy	Parábola	Paralelo al plano xz	Parábola	Paralelo al plano yz	
<i>Traza</i>	<i>Plano</i>									
Hipérbola	Paralelo al plano xy									
Parábola	Paralelo al plano xz									
Parábola	Paralelo al plano yz									

EJEMPLO 2 Gráfica de una superficie cuádrlica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$

Solución: Para empezar, escribimos su ecuación en forma canónica.

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0 \quad \text{Ecuación original}$$

$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0 \quad \text{Dividir por } -12$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \quad \text{Forma canónica}$$

De la tabla de las páginas 1025 y 1026 se sigue que la superficie es un hiperboloide de dos hojas con el eje y como su eje. Para dibujarla, conviene hallar sus trazas en los planos coordenados.

Traza xy ($z = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$ Hipérbola

Traza xz ($y = 0$): $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = -1$ No hay traza

Traza yz ($x = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ Hipérbola

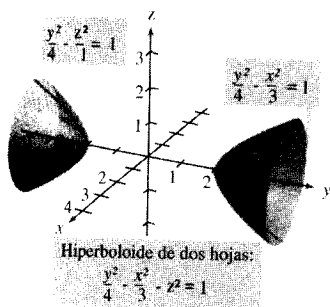


FIGURA 10.59

La Figura 10.59 muestra su gráfica. □

EJEMPLO 3 Gráfica de una superficie cuádrlica

Clasificar y dibujar la superficie de ecuación $x - y^2 - 4z^2 = 0$.

Solución: Como x está elevada a la potencia unidad, la superficie es un paraboloide, que además tiene como eje el eje x . En forma canónica su ecuación es

$$x = y^2 + 4z^2 \quad \text{Forma canónica}$$

Algunas trazas convenientes son:

Traza xy ($z = 0$): $x = y^2$ Parábola

Traza xz ($y = 0$): $x = 4z^2$ Parábola

Paralela al plano yz ($x = 4$): $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ Elipse

La superficie es un paraboloide *elíptico* (Figura 10.60). □

Hay ecuaciones de segundo grado en x, y, z que no representan ninguno de los seis tipos básicos de superficies cuádrlicas. He aquí un par de ejemplos.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{Un único punto}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Cilindro circular recto}$$

La ecuación canónica de una cuádrlica que no está centrada en el origen se puede encontrar completando el cuadrado, como enseña el Ejemplo 4.

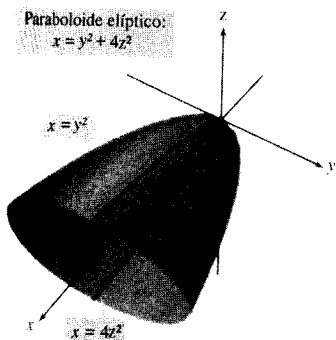


FIGURA 10.60

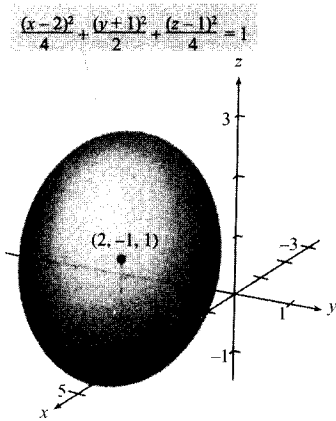


FIGURA 10.61
Un elipsoide centrado en $(2, -1, 1)$.

EJEMPLO 4 Una superficie cuádrica no centrada en el origen

Clasificar y dibujar la superficie dada por

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$$

Solución: Completando el cuadrado en cada variable obtenemos

$$(x^2 - 4x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) + (z^2 - 2z + \quad) = -3$$

$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = -3 + 4 + 2 + 1$$

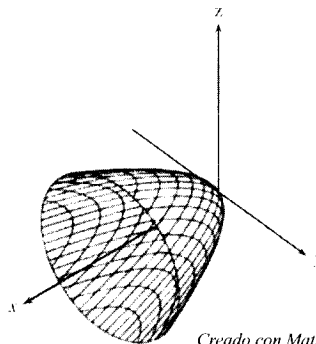
$$(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{2} + \frac{(z - 1)^2}{4} = 1$$

A la vista de esta ecuación, ya podemos concluir que se trata de un elipsoide centrado en el punto $(2, -1, 1)$. Su gráfica puede verse en la Figura 10.61. \square



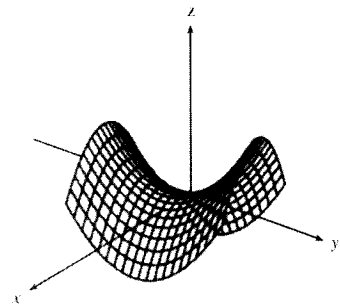
Un programa adecuado permite visualizar en una calculadora las superficies en el espacio*. Muchos de ellos crean la ilusión tridimensional dibujando varias trazas de la superficie y aplicando una rutina de «líneas ocultas» que borra las partes de la superficie situadas detrás de otras. A continuación presentamos dos ejemplos de figuras generadas por *Mathematica*.



Creado con Mathematica

Paraboloide elíptico

$$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$



Creado con Mathematica

Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16}$$

Dibujar la gráfica de una superficie con uno de esos programas requiere cierta práctica, especialmente porque hay que saber lo bastante de la superficie en cuestión para elegir la porción y la perspectiva apropiadas. A menudo, se puede mejorar la presentación mediante un giro de ejes. Por ejemplo, el paraboloide elíptico de la figura se está viendo desde un punto «más alto» que el utilizado para ver el paraboloide hiperbólico.

* Algunos programas informáticos de representación tridimensional exigen introducir la superficie mediante ecuaciones paramétricas (Sección 14.5).

Superficies de revolución

El quinto tipo especial de superficies que vamos a estudiar es el de las denominadas **superficies de revolución**. En la Sección 6.4 expusimos un método para calcular el *área* de tales superficies. Ahora nos ocupamos de cómo hallar su *ecuación*. Consideremos la gráfica de la función radio

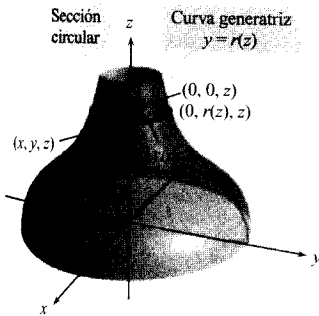


FIGURA 10.62
Una superficie de revolución.

$$y = r(z) \quad \text{Curva generatriz}$$

en el plano yz . Si esta gráfica gira en torno al eje z , genera una superficie de revolución (Figura 10.62). Su traza en el plano $z = z_0$ es un círculo de radio $r(z_0)$ y su ecuación es

$$x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2 \quad \text{Traza circular en el plano } z = z_0$$

Cambiando z_0 por z obtenemos una ecuación que es válida para todo valor de z . Del mismo modo se obtienen ecuaciones para superficies de revolución en torno a los otros dos ejes. Resumimos este proceso en el siguiente cuadro.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si la gráfica de una función radio r gira en torno a uno de los ejes de coordenadas, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes.

1. En torno al eje x : $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$
2. En torno al eje y : $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$
3. En torno al eje z : $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

EJEMPLO 5 Ecuación de una superficie de revolución

- a) Una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{z} \quad \text{Función radio}$$

en torno al eje z es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \quad \text{Giro en torno al eje } z$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \quad \text{Sustituir } r(z) \text{ por } \frac{1}{z}$$

- b) Para hallar una ecuación de la superficie engendrada al hacer girar la gráfica de $9x^2 = y^3$ en torno al eje y , despejamos x en términos de y :

$$x = \frac{1}{3}y^{3/2} = r(y) \quad \text{Función radio}$$

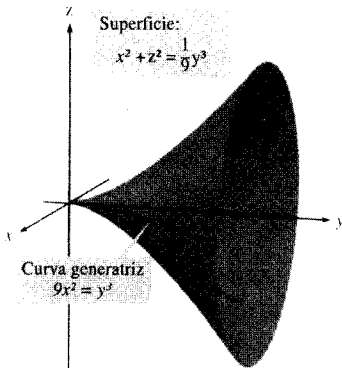


FIGURA 10.63

Así pues, la ecuación de esa superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \quad \text{Giro en torno al eje } y$$

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{1}{3}y^{3/2}\right)^2 \quad \text{Sustituir } r(y) \text{ por } \frac{1}{3}y^{3/2}$$

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^3 \quad \text{Ecuación de la superficie}$$

Su gráfica se muestra en la Figura 10.63. □

La curva generatriz de una superficie de revolución no es única. Así, la superficie

$$x^2 + z^2 = e^{-2y}$$

se puede generar haciendo girar la gráfica de $x = e^{-y}$ en torno del eje y , o bien la gráfica de $z = e^{-y}$ en torno del eje y , como ilustra la Figura 10.64.

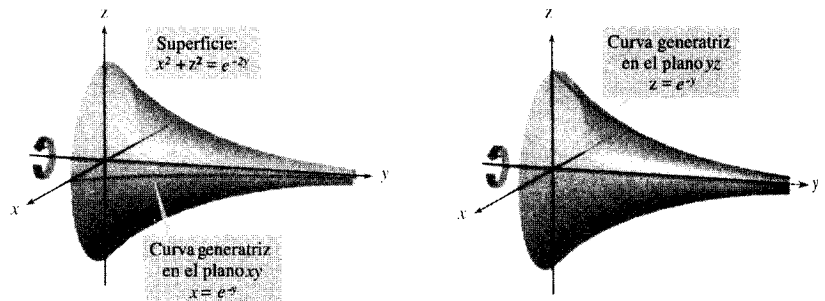


FIGURA 10.64

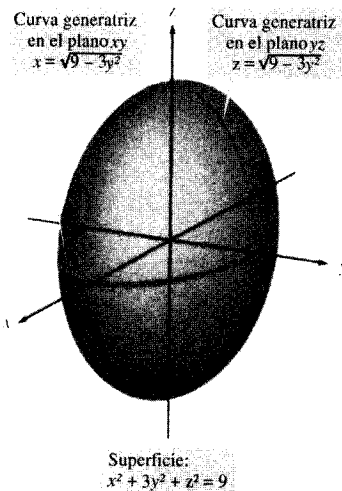


FIGURA 10.65

EJEMPLO 6 Curva generatriz de una superficie de revolución

Hallar una curva generatriz y el eje de revolución de la superficie

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

Solución: Sabemos que la ecuación ha de adoptar una de estas formas:

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \quad \text{En torno al eje } z$$

$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \quad \text{En torno al eje } x$$

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \quad \text{En torno al eje } y$$

Como los coeficientes de x^2 y z^2 son iguales, hemos de escoger la tercera opción, de manera que

$$x^2 + z^2 = 9 - 3y^2$$

El eje y es el eje de revolución. Podemos elegir como curva generatriz cualquiera de estas dos trazas

$$x^2 = 9 - 3y^2 \quad \text{Traza en el plano } xy$$

$$z^2 = 9 - 3y^2 \quad \text{Traza en el plano } yz$$

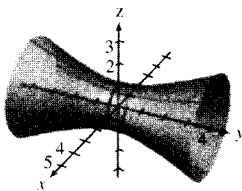
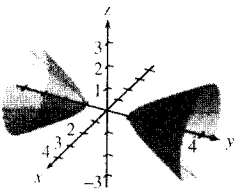
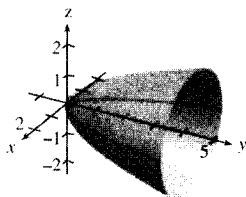
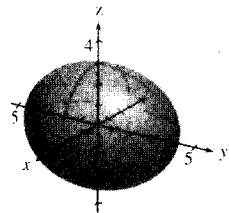
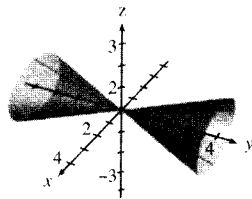
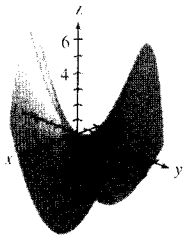
Por ejemplo, usando la primera traza, la curva generatriz es la semielipse

$$x = \sqrt{9 - 3y^2} \quad \text{Curva generatriz}$$

La Figura 10.65 muestra la gráfica de esta superficie. □

Ejercicios de la Sección 10.6

En los Ejercicios 1-6, asociar cada ecuación con su gráfica.



1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

2. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$

3. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

4. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$

5. $4x^2 - 4y + z^2 = 0$

6. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$

En los Ejercicios 7-16, describir y dibujar la superficie.

7. $z = 3$

8. $x = 4$

9. $y^2 + z^2 = 9$

10. $x^2 + z^2 = 16$

11. $x^2 - y = 0$

12. $y^2 + z = 4$

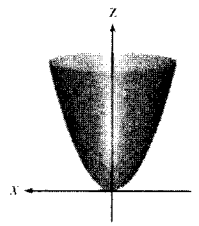
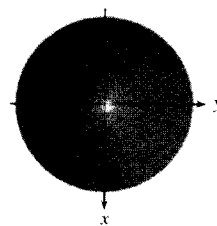
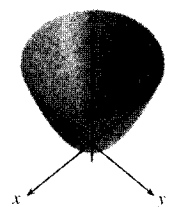
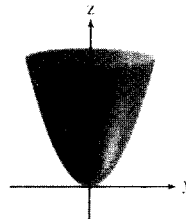
13. $4x^2 + y^2 = 4$

14. $y^2 - z^2 = 4$

15. $z - \sin y = 0$

16. $z - e^y = 0$

17. **Para pensar** Las cuatro figuras son gráficas de la superficie cuádrica $z = x^2 + y^2$. Asociar cada una de ellas con el punto del espacio desde el que se está contemplando el paraboloides. Los cuatro puntos, desordenados, son $(0, 0, 20)$, $(0, 20, 0)$, $(20, 0, 0)$ y $(10, 10, 20)$.



18. Usar una calculadora apropiada para dibujar la gráfica del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ desde cada uno de los puntos siguientes:
a) $(10, 0, 0)$ b) $(0, 10, 0)$ c) $(10, 10, 10)$

En los Ejercicios 19-30, identificar y dibujar la superficie cuádrica. Confirmar el dibujo en una calculadora.

19. $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

20. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$

21. $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$ 22. $z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
 23. $x^2 - y + z^2 = 0$ 24. $z = 4x^2 + y^2$
 25. $x^2 - y^2 + z = 0$ 26. $3z = -y^2 + x^2$
 27. $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$ 28. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$
 29. $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$
 30. $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 16x - 6y - 16z + 9 = 0$

En los Ejercicios 31-40, representar la superficie en una calculadora. (Ayuda: Puede ser necesario despejar z y considerar dos ecuaciones para representar la superficie.)

31. $z = 2 \operatorname{sen} x$ 32. $z = x^2 + 0,5y^2$
 33. $z^2 = x^2 + 4y^2$ 34. $4y = x^2 + z^2$
 35. $x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{z}\right)^2$ 36. $x^2 + y^2 = e^{-z}$
 37. $z = 4 - \sqrt{|xy|}$ 38. $z = \frac{-x}{8 + x^2 + y^2}$
 39. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = -16$ 40. $9x^2 + 4y^2 - 8z^2 = 72$

En los Ejercicios 41-44, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

41. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 2$
 42. $z = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0, z = 0$
 43. $x^2 + y^2 = 1, x + z = 2, z = 0$
 44. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, y = 2z, z = 0$

En los Ejercicios 45-50, hallar una ecuación para la superficie de revolución generada por la curva dada en el plano de coordenadas que se especifica, al girar en torno del eje indicado.

<u>Ecuación de la curva</u>	<u>Plano coordenado</u>	<u>Eje de revolución</u>
45. $z^2 = 4y$	plano yz	eje y
46. $z = 2y$	plano yz	eje y
47. $z = 2y$	plano yz	eje z
48. $2z = \sqrt{4 - x^2}$	plano xz	eje x
49. $xy = 2$	plano xy	eje x
50. $z = \ln y$	plano yz	eje z

En los Ejercicios 51 y 52, hallar una ecuación para la curva generatriz de la superficie de revolución cuya ecuación se especifica.

51. $x^2 + y^2 - 2z = 0$
 52. $x^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 y$

En los Ejercicios 53 y 54, usar el método de capas para calcular el volumen del sólido bajo la superficie de revolución y sobre el plano xy .

53. La curva $z = 4x - x^2$ en el plano xz gira en torno al eje z .
 54. La curva $z = \operatorname{sen} y$ ($0 \leq y \leq \pi$) en el plano yz gira en torno al eje z .

En los Ejercicios 55 y 56, analizar la traza de la superficie

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$$

en los planos indicados.

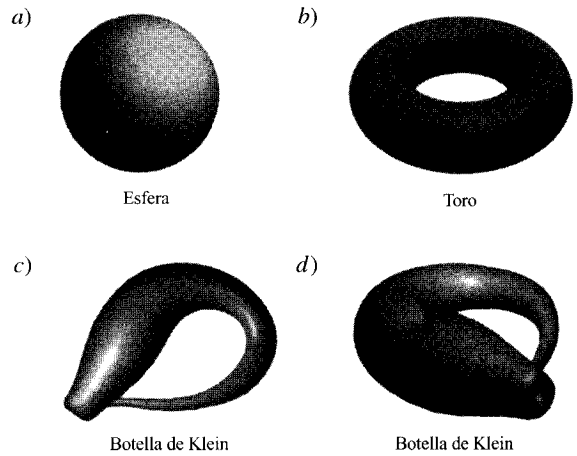
55. Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor, así como las coordenadas de los focos, de las elipses intersecciones de la superficie con los planos
 a) $z = 2$ b) $z = 8$
 56. Calcular las coordenada del foco de la parábola intersección de la superficie con los planos
 a) $y = 4$ b) $x = 2$.
 57. **Forma de la Tierra** A causa de las fuerzas de rotación, la Tierra es un elipsoide oblongo en lugar de una esfera. El radio ecuatorial mide 3.963 millas y el radio polar 3.942 millas. Hallar una ecuación de ese elipsoide. (Suponemos que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza en el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.)
 58. **Un modelo matemático** La tabla recoge los gastos de la sanidad pública (en millones de dólares) en EE.UU. en indemnizaciones a los trabajadores (x), asistencia médica (y) y medicamentos (z). (Fuente: *U.S. Health Care Financing Administration.*)

Año	1980	1985	1990	1991	1992	1993
x	5,1	8,0	16,1	17,2	19,0	21,1
y	28,0	44,5	80,5	99,1	113,5	122,9
z	37,5	72,2	112,1	123,3	138,3	154,2

Estos datos admiten el modelo

$$0,551x^2 - 0,014y^2 - 19,868x + 1,856y + z + 3,512 = 0$$

- a) Usar este modelo para aproximar z en los valores dados de x e y .
 - b) Representar en una calculadora el modelo para $5 \leq x \leq 22$ y $25 \leq y \leq 125$.
 - c) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano xz . Interpretar el resultado en el contexto del problema.
 - d) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano yz . Interpretar el resultado en el contexto del problema.
59. Determinar la intersección del paraboloides hiperbólico $z = y^2/b^2 - x^2/a^2$ con el plano $bx + ay - z = 0$. (Supóngase $a, b > 0$.)
60. **Para pensar** La figura muestra tres tipos de superficies «topológicas» clásicas. La esfera y el toro tienen ambas «interior» y «exterior». ¿Los tiene también la botella de Klein? Explicar la respuesta.



- CONTENIDO ■
 Coordenadas cilíndricas ■
 Coordenadas esféricas ■

10.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

Coordenadas cilíndricas

Ya hemos tenido ocasión de comprobar que ciertas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Lo mismo ocurre con las superficies. En esta sección introducimos dos sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. El primero, el sistema de coordenadas cilíndricas, es una generalización de las coordenadas polares al espacio.

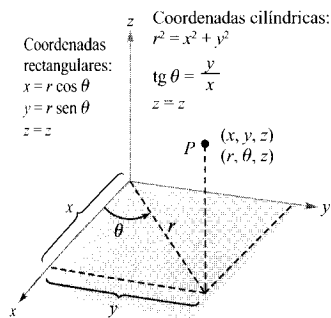


FIGURA 10.66

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio se representa por un trío ordenado (r, θ, z) .

1. (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy .
2. z es la distancia dirigida de P a (r, θ) .

Para pasar de rectangulares a cilíndricas, o viceversa, hay que usar las siguientes fórmulas de conversión (véase Figura 10.66).

Cilíndricas a rectangulares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \text{ sen } \theta, \quad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

El punto $(0, 0, 0)$ se llama el **polo**. Además, como la representación de un punto en polares no es única, tampoco lo es en cilíndricas.

EJEMPLO 1 Cambio de coordenadas cilíndricas a rectangulares

Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

Solución: Con las fórmulas de conversión de *cilíndricas a rectangulares* obtenemos

$$x = 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$z = 3$$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$, como ilustra la Figura 10.67. \square

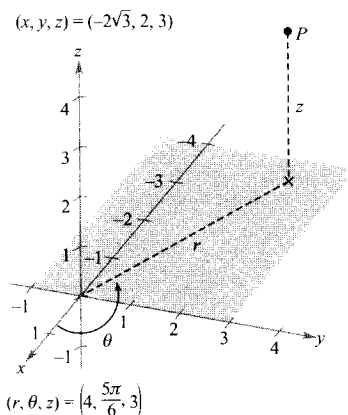


FIGURA 10.67

EJEMPLO 2 Cambio de coordenadas rectangulares a cilíndricas

Expresar el punto $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 2)$ en coordenadas cilíndricas.

Solución: Con las fórmulas de conversión de *rectangulares a cilíndricas* obtenemos

$$r = \pm \sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Tenemos dos elecciones para r e infinitas para θ . Como indica la Figura 10.68, dos representaciones convenientes del punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2 \right) \quad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I}$$

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2 \right) \quad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III} \quad \square$$

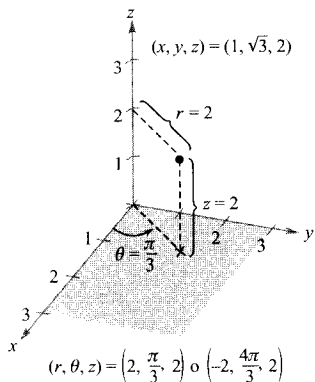


FIGURA 10.68

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas al representar superficies cilíndricas y superficies de revolución con el eje z como eje de simetría (Figura 10.69).

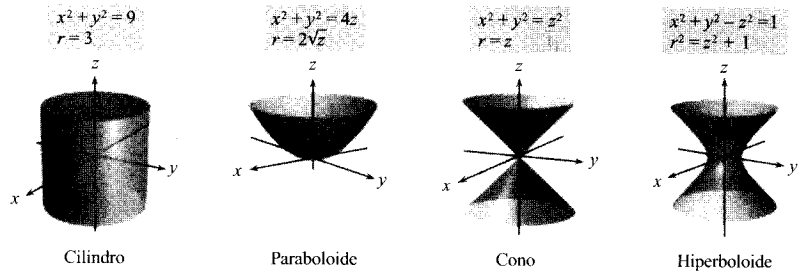


FIGURA 10.69

Los planos verticales que contienen al eje z y los planos horizontales tienen asimismo ecuaciones simples en coordenadas cilíndricas, como muestra la Figura 10.70.

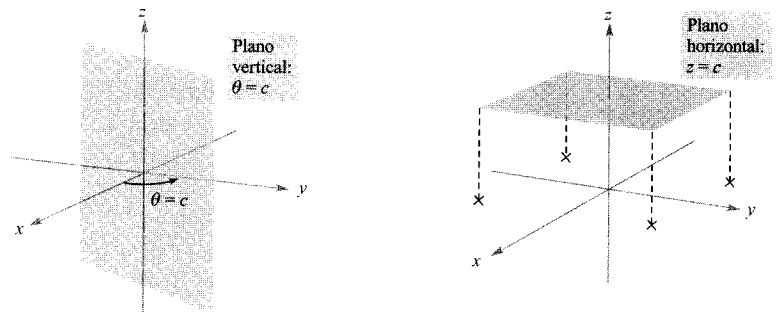


FIGURA 10.70

EJEMPLO 3 Conversión de rectangulares a cilíndricas

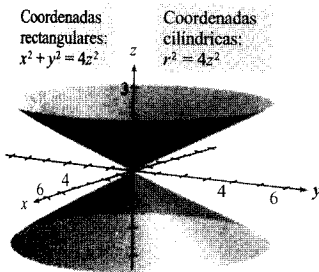


FIGURA 10.71

Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación.

- a) $x^2 + y^2 = 4z^2$
- b) $y^2 = x$

Solución:

- a) Por la sección precedente sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono «de dos hojas» con su eje en el eje z (Figura 10.71). Si sustituimos $x^2 + y^2$ por r^2 , obtenemos su ecuación en cilíndricas

$$x^2 + y^2 = 4z^2 \quad \text{Ecuación en coordenadas rectangulares}$$

$$r^2 = 4z^2 \quad \text{Ecuación en coordenadas cilíndricas}$$

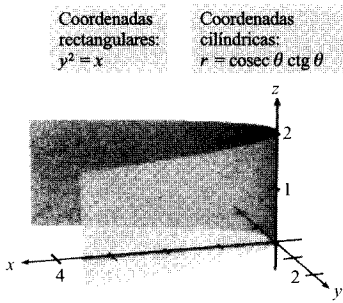


FIGURA 10.72

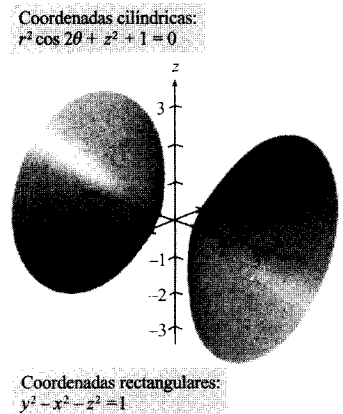


FIGURA 10.73

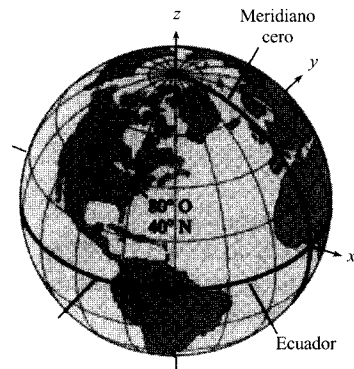


FIGURA 10.74

b) La superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z (Figura 10.72). Sustituyendo y^2 por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, obtenemos

$$y^2 = x$$

Ecuación rectangular

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = r \cos \theta$$

Sustituir y por $r \operatorname{sen} \theta$, x por $r \cos \theta$

$$r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 0$$

Agrupar términos y factorizar

$$r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta = 0$$

Dividir los dos miembros por r

$$r = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

Despejar r

$$r = \operatorname{cosec} \theta \operatorname{ctg} \theta$$

Ecuación en cilíndricas

Nótese que esta ecuación incluye un punto con $r = 0$, así que no se ha perdido nada al dividir ambos miembros por el factor r . \square

EJEMPLO 4 Conversión de cilíndricas a rectangulares

Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la gráfica determinada por la ecuación en cilíndricas

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0$$

Solución:

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0$$

Ecuación en cilíndricas

$$r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + z^2 + 1 = 0$$

Identidad trigonométrica

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = -1$$

Sustituir $r \cos \theta$ por x y $r \operatorname{sen} \theta$ por y

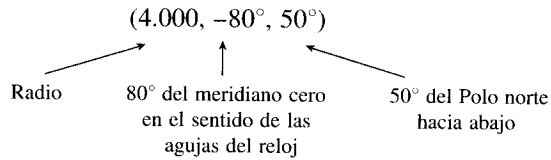
$$y^2 - x^2 - z^2 = 1$$

Ecuación rectangular

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje y (Figura 10.73). \square

Coordenadas esféricas

En el **sistema de coordenadas esféricas** cada punto se representa por un tríptico ordenado: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera son ángulos. Es un sistema similar al de longitud-latitud que se suele utilizar para localizar puntos sobre la superficie terrestre. Así, la Figura 10.74 muestra el punto de la superficie terrestre cuya latitud es 40° Norte (del Ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (del meridiano cero). Supuesta la Tierra esférica de radio 4.000 millas, ese punto vendrá descrito como



EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

En un **sistema de coordenadas esféricas** un punto P del espacio viene representado por un trío ordenado (ρ, θ, ϕ) .

1. ρ es la distancia de P al origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. ϕ es el ángulo entre el semieje z positivo y el segmento recto \overline{OP} , $0 \leq \phi \leq \pi$.

Nótese que las coordenadas primera y tercera son siempre no negativas.

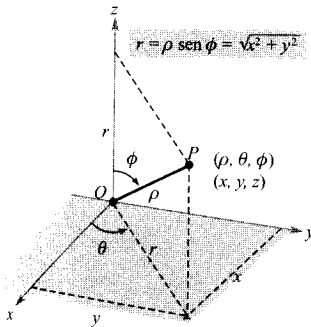


FIGURA 10.75
Coordenadas esféricas.

La relación entre las coordenadas rectangulares y las esféricas se ilustra en la Figura 10.75. Para pasar de uno a otro deben usarse las fórmulas siguientes.

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Para cambiar de coordenadas esféricas a cilíndricas, o viceversa, deben aplicarse las fórmulas siguientes.

Esféricas a cilíndricas ($r \geq 0$):

$$r^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Cilíndricas a esféricas ($r \geq 0$):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

Las coordenadas esféricas son especialmente apropiadas para estudiar superficies que tengan un centro de simetría. Así, la Figura 10.76 muestra tres superficies con ecuaciones muy sencillas en coordenadas esféricas.

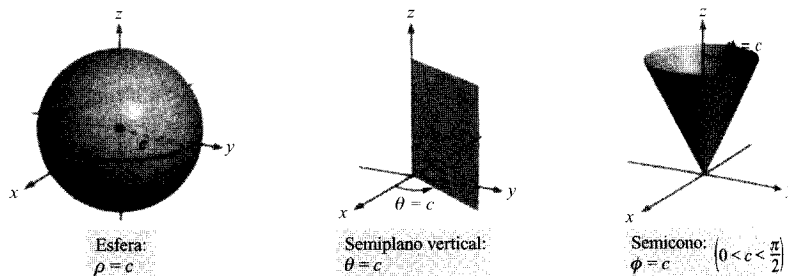


FIGURA 10.76

EJEMPLO 5 Conversión de rectangulares a esféricas

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican.

- a) Cono: $x^2 + y^2 = z^2$
 b) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución:

- a) Haciendo las sustituciones adecuadas para x , y , z en la ecuación dada se obtiene:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} = 1 \quad \rho \geq 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \phi = 1 \quad \phi = \pi/4 \text{ o } \phi = 3\pi/4$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa la mitad superior del cono y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ su mitad inferior.

- b) Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho \cos \phi$, la ecuación dada adopta la siguiente forma en coordenadas esféricas.

$$\rho^2 - 4\rho \cos \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\rho - 4 \cos \phi) = 0$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho = 0$, obtenemos la ecuación en esféricas

$$\rho - 4 \cos \phi = 0 \quad \text{o} \quad \rho = 4 \cos \phi$$

Obsérvese que el conjunto solución de esta ecuación incluye un punto con $\rho = 0$, de manera que no se ha perdido nada al descartar el factor ρ . La esfera representada por la ecuación $\rho = 4 \cos \phi$ puede verse en la Figura 10.77. \square

Coordenadas rectangulares:
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Esféricas:
 $\rho = 4 \cos \phi$

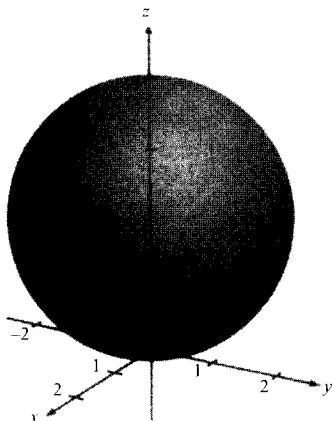


FIGURA 10.77

Ejercicios de la Sección 10.7

En los Ejercicios 1-6, pasar el punto, dado en coordenadas rectangulares, a coordenadas cilíndricas.

1. $(0, 5, 1)$ 2. $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)$
 3. $(1, \sqrt{3}, 4)$ 4. $(\sqrt{3}, -1, 2)$
 5. $(2, -2, -4)$ 6. $(-3, 2, -1)$

En los Ejercicios 7-12, pasar el punto, dado en coordenadas cilíndricas, a coordenadas rectangulares.

7. $(5, 0, 2)$ 8. $(4, \pi/2, -2)$
 9. $(2, \pi/3, 2)$ 10. $(3, -\pi/4, 1)$
 11. $(4, 7\pi/6, 3)$ 12. $(1, 3\pi/2, 1)$

En los Ejercicios 13-20, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación en cilíndricas dada. Esbozar su gráfica.

13. $r = 2$ 14. $z = 2$
 15. $\theta = \pi/6$ 16. $r = \frac{1}{2}z$
 17. $r = 2 \sin \theta$ 18. $r = 2 \cos \theta$
 19. $r^2 + z^2 = 4$ 20. $z = r^2 \sin^2 \theta$

En los Ejercicios 21-26, expresar el punto, dado en coordenadas rectangulares, en coordenadas esféricas.

21. $(4, 0, 0)$ 22. $(1, 1, 1)$
 23. $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ 24. $(2, 2, 4\sqrt{2})$
 25. $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ 26. $(-4, 0, 0)$

En los Ejercicios 27-32, expresar el punto, dado en coordenadas esféricas, en coordenadas rectangulares.

27. $(4, \pi/6, \pi/4)$ 28. $(12, 3\pi/4, \pi/9)$
 29. $(12, -\pi/4, 0)$ 30. $(9, \pi/4, \pi)$
 31. $(5, \pi/4, 3\pi/4)$ 32. $(6, \pi, \pi/2)$

33. Programación

- a) Escribir un programa informático que exprese un punto, dado en coordenadas rectangulares, en coordenadas esféricas.
 b) Usar ese programa para expresar en esféricas el punto de coordenadas rectangulares $(3, -4, 2)$.

34. Programación

- a) Escribir un programa informático que exprese un punto, dado en coordenadas esféricas, en coordenadas rectangulares.
 b) Usar ese programa para expresar en coordenadas rectangulares el punto de coordenadas esféricas $(5, 1, 0.5)$.

En los Ejercicios 35-42, hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en esféricas. Dibujar un esbozo de su gráfica.

35. $\rho = 2$ 36. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
 37. $\phi = \frac{\pi}{6}$ 38. $\phi = \frac{\pi}{2}$
 39. $\rho = 4 \cos \phi$ 40. $\rho = 2 \sec \phi$
 41. $\rho = \operatorname{cosec} \phi$ 42. $\rho = 4 \operatorname{cosec} \phi \sec \theta$

En los Ejercicios 43-48, pasar el punto de coordenadas cilíndricas a esféricas.

43. $(4, \pi/4, 0)$ 44. $(2, 2\pi/3, -2)$
 45. $(4, -\pi/6, 6)$ 46. $(-4, \pi/3, 4)$
 47. $(12, \pi, 5)$ 48. $(4, \pi/2, 3)$

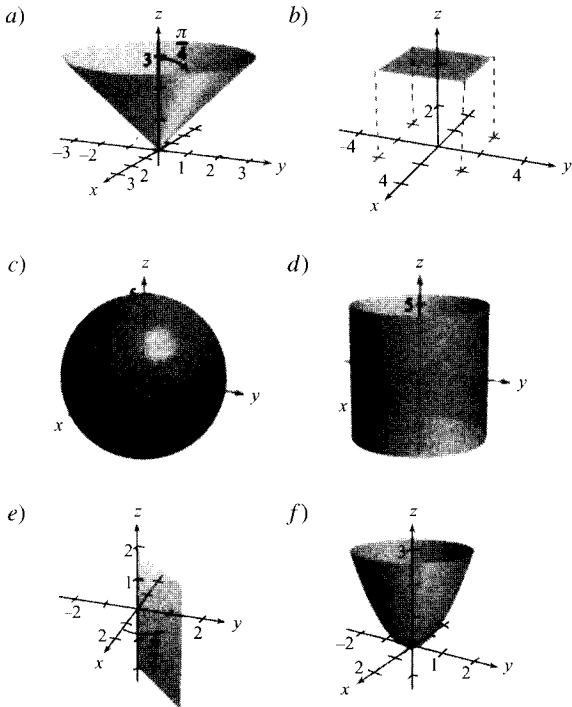
En los Ejercicios 49-54, pasar el punto de coordenadas esféricas a cilíndricas.

49. $(10, \pi/6, \pi/2)$ 50. $(4, \pi/18, \pi/2)$
 51. $(6, -\pi/6, \pi/3)$ 52. $(5, -5\pi/6, \pi)$
 53. $(8, 7\pi/6, \pi/6)$ 54. $(7, \pi/4, 3\pi/4)$

En los Ejercicios 55-68, usar una calculadora para pasar de unas coordenadas a otras cada punto dado.

	<u>Rectangulares</u>	<u>Cilíndricas</u>	<u>Esféricas</u>
55.	$(4, 6, 3)$		
56.	$(6, -2, -3)$		
57.		$(5, \pi/9, 8)$	
58.		$(10, -0.75, 6)$	
59.			$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
60.			$(7.5, 0.25, 1)$
61.	$(3, -2, 2)$		
62.	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3)$		
63.	$(5/2, 4/3, -3/2)$		
64.	$(0, -5, 4)$		
65.		$(5, 3\pi/4, -5)$	
66.		$(-2, 11\pi/6, 3)$	
67.		$(-3.5, 2.5, 6)$	
68.		$(8.25, 1.3, -4)$	

En los Ejercicios 69-74, asociar cada ecuación (dada en coordenadas cilíndricas o esféricas) con su gráfica.



69. $r = 5$ 70. $\theta = \frac{\pi}{4}$
 71. $\rho = 5$ 72. $\phi = \frac{\pi}{4}$
 73. $r^2 = z$ 74. $\rho = 4 \sec \phi$

En los Ejercicios 75-82, pasar la ecuación rectangular a coordenadas a) cilíndricas, b) esféricas.

75. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 76. $4(x^2 + y^2) = z^2$
 77. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 78. $x^2 + y^2 = z$
 79. $x^2 + y^2 = 4y$ 80. $x^2 + y^2 = 16$
 81. $x^2 - y^2 = 9$ 82. $y = 4$

En los Ejercicios 83-86, dibujar el sólido, que se da en coordenadas cilíndricas.

83. $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 4$
 84. $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq z \leq r \cos \theta$
 85. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r \leq z \leq a$
 86. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq r \leq 4, z^2 \leq -r^2 + 6r - 8$

En los Ejercicios 87 y 88, dibujar el sólido, descrito en coordenadas esféricas.

87. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/6, 0 \leq \rho \leq a \sec \phi$
 88. $0 \leq \theta \leq 2\pi, \pi/4 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 1$

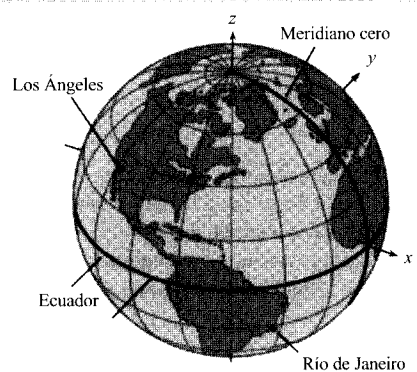
Para pensar En los Ejercicios 89-92, hallar desigualdades que describan el sólido y precisar el sistema de coordenadas utilizado. Posicionar el sólido en el sistema de coordenadas de manera que las desigualdades sean simples.

89. Un cubo de arista 10 cm.
 90. Una capa cilíndrica de 8 metros de longitud con 0,75 m de radio interior y 1,25 m de radio exterior.
 91. Una capa esférica con 4 pulgadas de radio interior y 6 de radio exterior.
 92. El sólido que queda tras perforar una esfera de 6 pulgadas de diámetro con un orificio de 1 pulgada de diámetro que la atraviesa por su centro.
 93. Identificar la curva intersección de las superficies dadas en cilíndricas por $z = \sin \theta$ y $r = 1$.
 94. Identificar la curva intersección de las superficies dadas en esféricas por $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Los Ángeles está situada a $34,05^\circ$ latitud norte y a $118,24^\circ$ longitud oeste. Río de Janeiro está a $22,90^\circ$ latitud sur y $43,22^\circ$ longitud oeste (véase figura). Suponiendo que la Tierra es esférica, con un radio de 4.000 millas, hallar:

- a) Las coordenadas esféricas de cada ciudad.
 b) Sus coordenadas rectangulares.
 c) El ángulo (en radianes) entre los vectores del centro de la Tierra a cada ciudad.
 d) La distancia s por un círculo máximo entre las dos ciudades. (Ayuda: $s = r\theta$.)



- e) Repetir los apartados a)-d) para Boston ($42,36^\circ$ latitud norte y $71,06^\circ$ longitud oeste) y Honolulu ($21,31^\circ$ latitud norte y $157,86^\circ$ longitud oeste).

Ejercicios de repaso del Capítulo 10

En los Ejercicios 1 y 2, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$. Hallar *a)* las expresiones de \mathbf{u} y \mathbf{v} en componentes, *b)* la magnitud de \mathbf{v} , *c)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *d)* $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *e)* la componente vectorial de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} , y *f)* la componente vectorial de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} .

1. $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(5, 4)$
2. $P(-2, -1)$, $Q(5, -1)$, $R(2, 4)$
3. Calcular las coordenadas del punto del plano xy situado cuatro unidades a la derecha del plano xz y cinco unidades por detrás del plano yz .
4. Hallar las coordenadas del punto del eje y situado siete unidades a la izquierda del plano xz .

En los Ejercicios 5 y 6, localizar los puntos que satisfacen la condición impuesta.

5. $yz > 0$
6. $xy < 0$

En los Ejercicios 7 y 8, hallar la ecuación canónica de la esfera.

7. Centro $(3, -2, 6)$; diámetro 15.
8. Puntos terminales de un diámetro: $(0, 0, 4)$, $(4, 6, 0)$.

En los Ejercicios 9 y 10, hallar el centro y el radio de la esfera y dibujar su gráfica.

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 4z + 34 = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$. Hallar *a)* la expresión en componentes de \mathbf{u} y \mathbf{v} , *b)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *c)* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *d)* una ecuación del plano que contiene a P , Q y R , y *e)* ecuaciones paramétricas para la recta que une P y Q .

11. $P(5, 0, 0)$, $Q(4, 4, 0)$, $R(2, 0, 6)$
12. $P(2, -1, 3)$, $Q(0, 5, 1)$, $R(5, 5, 0)$

En los Ejercicios 13 y 14, averiguar si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguna de ambas cosas.

13. $\langle 7, -2, 3 \rangle$, $\langle -1, 4, 5 \rangle$
14. $\langle -4, 3, -6 \rangle$, $\langle 16, -12, 24 \rangle$

En los Ejercicios 15-18, calcular el ángulo θ entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

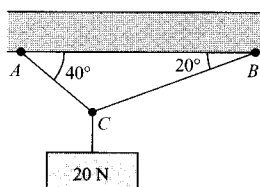
15. $\mathbf{u} = 5[\cos(3\pi/4)\mathbf{i} + \sin(3\pi/4)\mathbf{j}]$
 $\mathbf{v} = 2[\cos(2\pi/3)\mathbf{i} + \sin(2\pi/3)\mathbf{j}]$
16. $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -2 \rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 10, -5, 15 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 1, -3 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 1 \rangle$

En los Ejercicios 19-22, expresar \mathbf{u} en componentes.

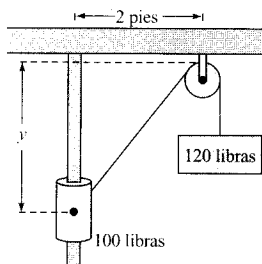
19. El ángulo, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, desde el semieje x positivo hasta \mathbf{u} es 135° , y $\|\mathbf{u}\| = 4$. (Se supone que \mathbf{u} está en el plano.)
20. El ángulo entre \mathbf{u} y el semieje x positivo es 180° y $\|\mathbf{u}\| = 8$.
21. \mathbf{u} es perpendicular al plano $x - 3y + 4z = 0$, y $\|\mathbf{u}\| = 3$.
22. \mathbf{u} es un vector unitario perpendicular a las rectas
 $x = 4 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 + 5t$
 $x = -3 + 7s$, $y = -2 + s$, $z = 1 + 2s$

En los Ejercicios 23-32, $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -3 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle -1, 2, 2 \rangle$.

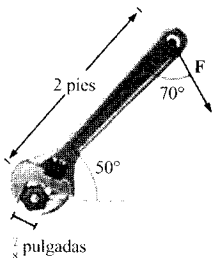
23. Hallar $\|\mathbf{u}\|$.
24. Calcular el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .
25. Probar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.
26. Hallar un vector unitario perpendicular al plano que contiene a \mathbf{v} y \mathbf{w} .
27. Calcular la proyección de \mathbf{w} sobre \mathbf{u} .
28. Probar que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.
29. Probar que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
30. Probar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
31. Calcular el volumen del sólido de aristas \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .
32. Calcular el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector \mathbf{u} si la fuerza aplicada es \mathbf{w} .
33. **Soporte de cargas** Calcular la tensión en cada uno de los cables de la figura.



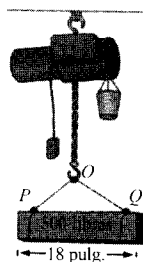
34. **Equilibrio** La abrazadera de la figura, de 100 libras, desliza sin rozamiento por la barra vertical. Calcular la distancia y para la que el sistema está en equilibrio con el contrapeso de 120 libras.



35. **Momento de una fuerza** El momento máximo que puede aplicarse sobre la tuerca de la figura, de acuerdo con las especificaciones de fábrica, es de 200 libras-pie. Calcular la fuerza máxima $\|\mathbf{F}\|$ que puede aplicarse a la llave inglesa.



36. **Longitud mínima** En un proceso de fabricación una grúa eléctrica iza vigas de 500 libras (véase figura). El cable que conecta los puntos P , O y Q mide L pulgadas. (Se supone que O es el punto medio del cable.)



- a) Expresar la tensión T del cable como función de L . ¿Cuál es el dominio de esta función?
 b) Usar la función del apartado a) para completar la tabla.

L	19	20	21	22	23	24	25
T							

- c) Representar en una calculadora la función tensión.
 d) Hallar la longitud mínima del cable utilizable si la tensión máxima que soporta sin romperse es 400 libras.
 e) Calcular, si ello es posible, $\lim_{L \rightarrow \infty} T$. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

En los Ejercicios 37-40, hallar para la recta ecuaciones a) paramétricas, b) simétricas.

37. La recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano xz .
 38. La recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta dada por $x = y = z$.
 39. La intersección de los planos $3x - 3y - 7z = -4$ y $x - y + 2z = 3$.
 40. La recta que pasa por el punto $(0, 1, 4)$ y es perpendicular a $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 4 \rangle$.

En los Ejercicios 41 y 42, hallar una ecuación del plano.

41. El plano contiene las rectas $(x - 1)/(-2) = y = z + 1$ y $(x + 1)/(-2) = y - 1 = z - 2$.
 42. El plano pasa por los puntos $(-3, -4, 2)$, $(-3, 4, 1)$, y $(1, 1, -2)$.
 43. Calcular la distancia del punto $(1, 0, 2)$ al plano $2x - 3y + 6z = 6$.
 44. Calcular la distancia entre $5x - 3y + z = 2$ y $5x - 3y + z = -3$.

En los Ejercicios 45 y 46, calcular la distancia entre las rectas.

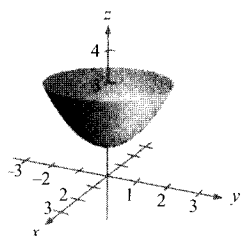
45. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 46. $x - 4 = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 7}{3}$
 $\frac{x + 1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{2}$ $\frac{x + 3}{-5} = \frac{y - 7}{2} = \frac{z + 5}{-6}$

En los Ejercicios 47-54, dibujar la superficie.

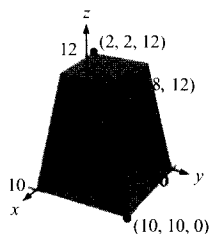
47. $x + 2y + 3z = 6$ 48. $y = z^2$
 49. $y = \frac{1}{2}z$ 50. $y = \cos z$
 51. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ 52. $16x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 0$
 53. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$ 54. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$

55. **Diseño industrial** Una pieza de caucho diseñada para absorber vibraciones en un automóvil tiene la forma de una superficie de revolución generada al hacer girar la curva $z = \frac{1}{2}y^2 + 1$ ($0 \leq y \leq 2$) del plano yz en torno al eje z (véase figura).

- Hallar una ecuación para esa superficie de revolución.
- Si todas las medidas están expresadas en centímetros y la pieza apoya en el plano xy , utilizar el método de capas para calcular su volumen.
- ¿Cuál sería el volumen de esa pieza si se perforase por su centro, paralelamente al eje de revolución, un orificio de 1 cm de diámetro?



56. **Diseño industrial** El depósito de combustible de un tractor tiene la forma y las dimensiones que indica la figura. Para su fabricación es necesario conocer el ángulo entre dos lados adyacentes. Calcular ese ángulo.



En los Ejercicios 57 y 58, pasar el punto de coordenadas rectangulares *a*) a cilíndricas, y *b*) a esféricas.

57. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)$ 58. $(\sqrt{3}/4, 3/4, 3\sqrt{3}/2)$

En los Ejercicios 59 y 60, hallar una ecuación de la superficie en coordenadas *a*) cilíndricas, *b*) esféricas.

59. $x^2 - y^2 = 2z$ 60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Capítulo 11

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

Una joven piloto, Lyn St. James, de Daytona Beach, Florida, se ha clasificado seis veces para las 500 millas de Indianápolis. En 1996, superó las pruebas de clasificación corriendo a una media superior a 224 millas/h.

Hasta 1996, el circuito de Indianápolis ha sido escenario de 82 carreras internacionales, comenzando en 1911. El ganador de la primera carrera fue Ray Harroun, quien alcanzó una media de 74,6 millas/h.

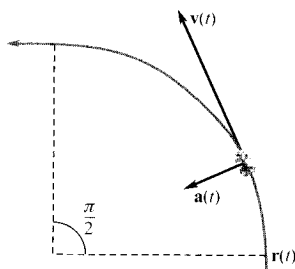
Carreras de automóviles

Justo al noroeste de Indianápolis, se encuentra el circuito automovilístico de Indianápolis, que acoge la mundialmente famosa carrera de las 500 millas. Su pista, de 2 millas y media, consta de dos tramos rectos paralelos de unos 3.300 pies cada uno, dos rectas al norte y al sur que miden 600 pies y cuatro giros de una longitud de 1.320 pies.

Para representar la posición de un bólido en la pista (véase figura) se puede utilizar la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} && \text{Función posición} \\ &= 840(\cos 0,349t)\mathbf{i} + 840(\sin 0,349t)\mathbf{j} && 0 \leq t \leq 4,5 \end{aligned}$$

La velocidad (en magnitud y dirección) también puede representarse por una función vectorial. Cualquier cambio en la velocidad, sea en su magnitud o en su dirección, se llama aceleración. Si la velocidad es constante, el piloto no «siente» el movimiento; la aceleración es nula. Cabe decir que no es el movimiento lo que se nota, sino sólo los *cambios* del movimiento.



CUESTIONES

1. Con ayuda de la función \mathbf{r} , elabore una tabla con las posiciones del b6lido para varios valores de t entre $t = 0$ y $t = 4,5$.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$x(t)$										
$t(t)$										

Represente los resultados y describa la trayectoria en ese intervalo de tiempo.

2. Represente en una calculadora la trayectoria del autom6vil. ¿Coinciden sus resultados con los de la cuesti6n anterior?
3. Al representar con ayuda de la calculadora la posici6n del autom6vil, ¿parece que 6ste toma las curvas con rapidez constante? ¿Parece que las toma con velocidad constante? Explicar la distinci6n entre estas dos cuestiones.
4. En este cap6tulo aprender6 que la velocidad de un objeto cuya funci6n (de) posici6n es \mathbf{r} , viene dada por

$$\mathbf{v}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

Halle el vector velocidad para el autom6vil descrito anteriormente. Con ese resultado, escriba una funci6n que describa su rapidez en todo momento. ¿Es constante la rapidez? Explique la respuesta.

5. El vector aceleraci6n del autom6vil viene dado por $\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$. Describa la relaci6n f6sica entre la velocidad del autom6vil y su aceleraci6n. ¿Est6 «sintiendo» el piloto alguna aceleraci6n? Justifique la respuesta.

11

Funciones vectoriales

- CONTENIDO ▀
- Curvas en el espacio y funciones vectoriales ▀
- Límites y continuidad ▀



11.1

Funciones vectoriales

Curvas en el espacio y funciones vectoriales

En la Sección 9.2 definimos una curva en el plano como un conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con unas ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas de t en un intervalo I . Esta definición admite una extensión natural al espacio tridimensional, como sigue. Una curva C en el espacio es un conjunto de tripletas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con unas ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{y} \quad z = h(t)$$

donde f , g y h denotan funciones continuas de t en un intervalo I .

Antes de ver algunos ejemplos de curvas en el espacio, introducimos un nuevo tipo de funciones, las **funciones vectoriales**. Aplican los números reales en vectores, es decir, son funciones con valores vectoriales.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

Se llama **función vectorial** a cualquier función de la forma

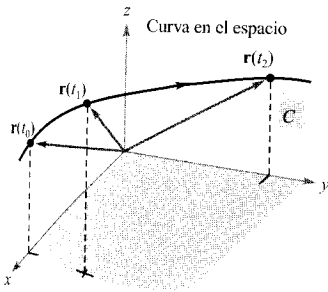
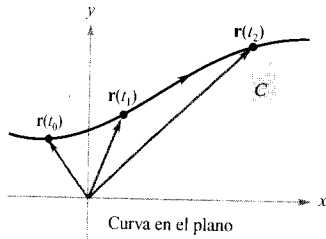
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

donde las **funciones componentes** f , g y h son funciones del parámetro t con valores reales. Las funciones vectoriales se denotan con frecuencia por $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$.

| Nota. Una curva en el plano o en el espacio consiste en una colección de puntos y las ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, cada una de las curvas dadas por $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ y $\mathbf{r} = \sin^2 t\mathbf{i} + \cos^2 t\mathbf{j}$ tiene como gráfica el círculo unidad, pero esas ecuaciones no representan la misma curva, ya que el círculo está recorrido de dos formas distintas.



Debe quedar clara la distinción entre la función vectorial \mathbf{r} y las funciones de variable real f, g y h . Todas son funciones de la variable real t , pero $\mathbf{r}(t)$ es un vector, mientras que $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son números (para cada valor especificado de t).

Las funciones vectoriales juegan un doble papel en la representación de curvas. Tomando como parámetro t el tiempo, las podemos usar para describir el movimiento a lo largo de una curva. Más en general, podemos usar una función vectorial para trazar la gráfica de una curva. En ambos casos, el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$ coincide con el punto (x, y) o (x, y, z) de la curva dada por las ecuaciones paramétricas, como muestra la Figura 11.1. La flecha sobre la curva indica el sentido de recorrido, es decir, el sentido de valores crecientes de t .

Salvo que se especifique otra cosa, se considera como dominio de una función vectorial \mathbf{r} la intersección de los dominios de las funciones f, g y h . Por ejemplo, el dominio de

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

es el intervalo $(0, 1]$.

FIGURA 11.1

La curva C es trazada por el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva en el plano

Dibujar la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución: A la vista del vector posición $\mathbf{r}(t)$, deducimos que las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = 2 \cos t$ y $y = -3 \sin t$. Despejando $\cos t$ y $\sin t$, y usando la identidad obtenemos la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Su gráfica es la elipse de la Figura 11.2. La curva tiene orientación horaria (la de las agujas de un reloj). En otras palabras, al crecer t de 0 a 2π , el vector posición se mueve en el sentido de las manecillas de un reloj y su punto final describe la elipse. □

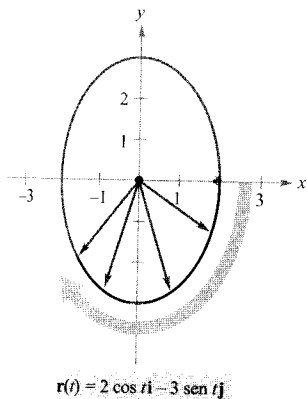


FIGURA 11.2

Cuando t crece de 0 a 2π , la elipse se recorre en el sentido de las agujas de un reloj.

EJEMPLO 2 Trazado de una curva en el espacio

Dibujar la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

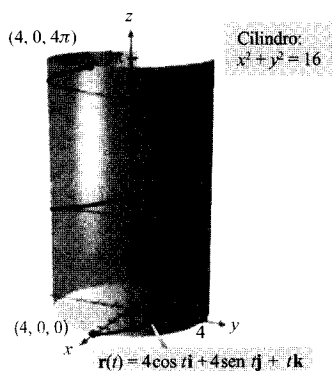


FIGURA 11.3

Cuando t crece de 0 a 4π , se describen dos espirales sobre la hélice.



La molécula de DNA, descubierta en 1962 por Francis Crick y James D. Watson, tiene forma de hélice doble.

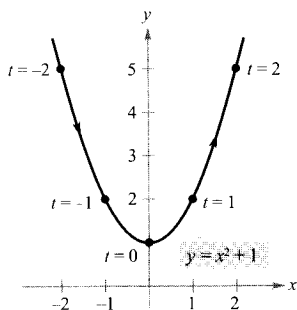


FIGURA 11.4

Hay muchas maneras de parametrizar esta gráfica. Una de ellas es tomar $x = t$.

Solución: De las dos primeras ecuaciones paramétricas, $x = 4 \cos t$ y $y = 4 \sin t$, se sigue que

$$x^2 + y^2 = 16$$

Eso significa que la curva está en un cilindro circular recto de radio 4, centrado en el eje z . Para localizar la curva en ese cilindro podemos usar la tercera ecuación paramétrica $z = t$. Obsérvese, en la Figura 11.3, que cuando t crece de 0 a 4π el punto (x, y, z) se mueve en espiral hacia arriba, describiendo una **hélice**. La figura del margen muestra un ejemplo de hélice de la vida real. \square

En los Ejemplos 1 y 2, se daba una función vectorial y se pedía un esbozo de la curva correspondiente. Los dos ejemplos próximos se refieren a la situación inversa: hallar una función vectorial que represente una gráfica dada. Claro está que si la gráfica se da en forma paramétrica, la respuesta es inmediata. Así, para representar la recta dada en el espacio por

$$x = 2 + t, \quad y = 3t, \quad z = 4 - t$$

basta utilizar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}$$

Si no se da un conjunto de ecuaciones paramétricas para la gráfica en cuestión, el problema de representarla mediante una función vectorial se reduce al de hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Representar la parábola dada por $y = x^2 + 1$ mediante una función vectorial.

Solución: Aunque hay muchas posibilidades de elegir el parámetro t , una elección natural es tomar $x = t$. Con ello, $y = t^2 + 1$, luego

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$$

Nótese en la Figura 11.4 la orientación producida por esta elección de parámetro. En caso de haber tomado $x = -t$ como parámetro, la orientación resultante hubiera sido la opuesta. \square

EJEMPLO 4 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Esbozar la gráfica C representada por la intersección del semielipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$$

y el cilindro parabólico $y = x^2$. A continuación, hallar una función vectorial que represente esa gráfica.

Solución: La Figura 11.5 muestra la intersección de las dos superficies. Como en el ejemplo anterior, una elección natural de parámetro es $x = t$. Con ella, podemos usar la ecuación dada $y = x^2$ para ver que $y = t^2$. Por tanto,

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{24} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{24}$$

Como la curva queda por encima del plano xy , podemos escoger la raíz cuadrada positiva para z , obteniendo así las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}}$$

| Nota. Las curvas en el espacio se pueden especificar de diversas formas. La curva del Ejemplo 4 viene descrita como intersección de dos superficies en el espacio.

La función vectorial resultante es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

A la vista de los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$ señalados en la figura puede apreciarse cómo se recorre la curva cuando t crece de -2 hasta 2 .

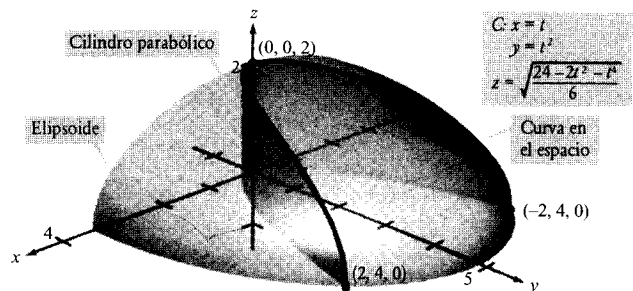


FIGURA 11.5
La curva C es la intersección del semielipsoide con el cilindro parabólico. □

Límites y continuidad

Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el estudio de funciones reales de una variable real son aplicables a las funciones vectoriales. Así, las funciones vectoriales se pueden sumar o restar, multiplicar por un escalar, tomar su límite, derivarlas, etc. La estrategia consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales, extendiendo las definiciones a las funciones vectoriales componente a componente. Por ejemplo, para sumar o restar dos funciones vectoriales en el plano, podemos hacer

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Suma} \\ &= [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] - [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Diferencia} \\ &= [f_1(t) - f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) - g_2(t)]\mathbf{j} \end{aligned}$$

Análogamente, para multiplicar o dividir una función vectorial por un escalar, hacemos simplemente

$$\begin{aligned} c\mathbf{r}(t) &= c[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] && \text{Multiplicación por un escalar} \\ &= cf_1(t)\mathbf{i} + cg_1(t)\mathbf{j} \\ \frac{\mathbf{r}(t)}{c} &= \frac{[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}]}{c}, && c \neq 0 \quad \text{División por un escalar} \\ &= \frac{f_1(t)}{c}\mathbf{i} + \frac{g_1(t)}{c}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Esta extensión, componente a componente, de las operaciones con funciones con valores reales a funciones vectoriales, vuelve a repetirse en la próxima definición del límite de una función vectorial.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si \mathbf{r} es la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

supuesto que existen los límites de f y g cuando $t \rightarrow a$.

2. Si \mathbf{r} es la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

supuesto que existen los límites de f , g y h cuando $t \rightarrow a$.

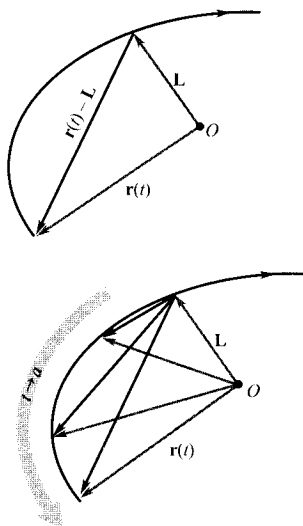


FIGURA 11.6

Cuando t tiende hacia a , $\mathbf{r}(t)$ tiende al límite \mathbf{L} . Para que el límite \mathbf{L} exista, no es necesario que $\mathbf{r}(a)$ esté definido ni tiene por qué ser $\mathbf{r}(a)$ igual a \mathbf{L} .

Si $\mathbf{r}(t)$ tiende al vector \mathbf{L} cuando $t \rightarrow a$, la longitud del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ tiende a 0. Esto es,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow a$$

Esto viene ilustrado por la Figura 11.6. Con esta definición para el límite de una función vectorial, podemos desarrollar versiones vectoriales de la mayoría de los teoremas del Capítulo 1. En particular, el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites individuales. Además, puede utilizarse la orientación de la curva $\mathbf{r}(t)$ para definir límites laterales de funciones vectoriales. La próxima definición extiende la noción de continuidad a funciones vectoriales.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD PARA FUNCIONES VECTORIALES

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en el punto** dado por $t = a$ si existe el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \rightarrow a$ y

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un intervalo** I si es continua en todo punto de ese intervalo.

De acuerdo con esta definición, una función vectorial es continua en $t = a$ si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en $t = a$.

EJEMPLO 5 Continuidad de funciones vectoriales

Discutir la continuidad de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante}$$

en $t = 0$.

Solución: Cuando t tiende a 0, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} t \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} a \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} (a^2 - t^2) \right] \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{r}(0) = (0)\mathbf{i} + (a)\mathbf{j} + (a^2)\mathbf{k} = a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}$$

podemos concluir que \mathbf{r} es continua en $t = 0$. Por un argumento similar se llega a la conclusión de que la función vectorial \mathbf{r} es continua en todo valor real de t . \square

Para cada valor de a , la curva representada por la función vectorial del Ejemplo 5,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante}$$

es una parábola. Cabe contemplar estas parábolas como las intersecciones de los planos verticales $y = a$ con el paraboloides hiperbólico

$$y^2 - x^2 = z$$

como muestra la Figura 11.7.

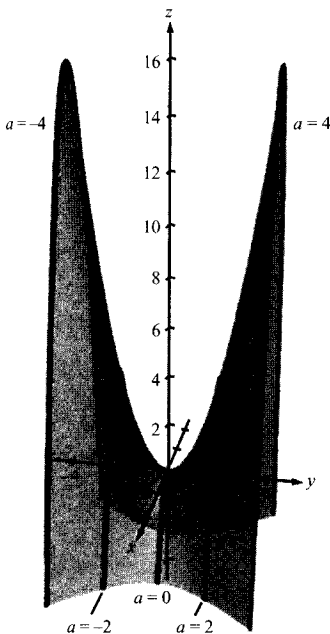


FIGURA 11.7

Para cada valor de a , la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$ es una parábola.



Casi todo dibujo en el espacio resulta difícil de hacer a mano, pero muy especialmente el de una curva. La dificultad consiste en lograr crear la ilusión tridimensional. Las calculadoras utilizan diversas técnicas para añadir «visión tridimensional» a las gráficas de curvas en el espacio. Una de ellas es mostrar la curva sobre una superficie, como se ha hecho en la Figura 11.7.

Ejercicios de la Sección 11.1

En los Ejercicios 1-8, hallar el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - \frac{1}{t}\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$ donde
 $\mathbf{F}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$

6. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$ donde
 $\mathbf{F}(t) = \ln t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde
 $\mathbf{F}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$, $\mathbf{G}(t) = \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde
 $\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t) = \sqrt[3]{t}\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$

En los Ejercicios 9-12, evaluar (si es posible) la función vectorial en el valor indicado de t .

9. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - (t-1)\mathbf{j}$
 a) $\mathbf{r}(1)$ b) $\mathbf{r}(0)$ c) $\mathbf{r}(s+1)$
 d) $\mathbf{r}(2 + \Delta t) - \mathbf{r}(2)$

10. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$
 a) $\mathbf{r}(0)$ b) $\mathbf{r}(\pi/4)$ c) $\mathbf{r}(\theta - \pi)$
 d) $\mathbf{r}(\pi/6 + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi/6)$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
 a) $\mathbf{r}(2)$ b) $\mathbf{r}(-3)$ c) $\mathbf{r}(t-4)$
 d) $\mathbf{r}(1 + \Delta t) - \mathbf{r}(1)$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} + e^{-t/4}\mathbf{k}$
 a) $\mathbf{r}(0)$ b) $\mathbf{r}(4)$ c) $\mathbf{r}(c+2)$
 d) $\mathbf{r}(9 + \Delta t) - \mathbf{r}(9)$

En los Ejercicios 13 y 14, calcular $\|\mathbf{r}(t)\|$.

13. $\mathbf{r}(t) = \sin 3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

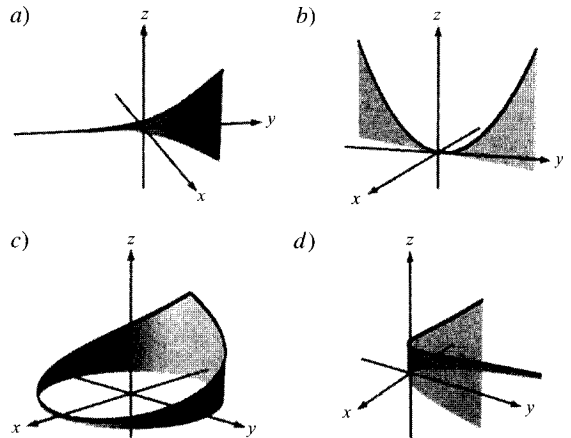
14. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$

Para pensar En los Ejercicios 15 y 16, calcular $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. El resultado ¿es una función vectorial? Explicar la respuesta.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle 3 \cos t, 2 \sin t, t-2 \rangle$
 $\mathbf{u}(t) = \langle 4 \sin t, -6 \cos t, t^2 \rangle$

En los Ejercicios 17-20, asociar cada ecuación con su gráfica.



17. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $-2 \leq t \leq 2$

18. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $-1 \leq t \leq 1$

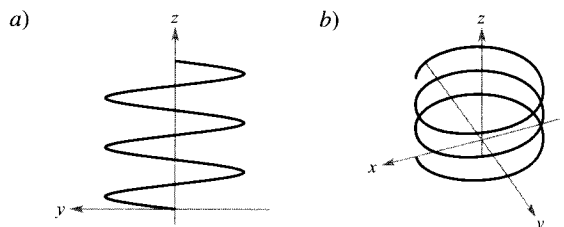
19. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\mathbf{k}$, $-2 \leq t \leq 2$

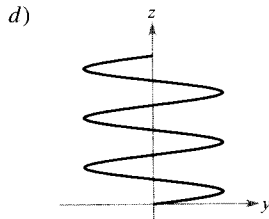
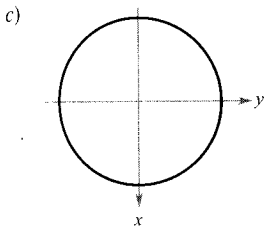
20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + \frac{2t}{3}\mathbf{k}$, $0,1 \leq t \leq 5$

21. **Para pensar** Las cuatro figuras siguientes son gráficas de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + \frac{t}{4}\mathbf{k}$$

Asociar cada una de ellas con los puntos desde los que están contempladas. Los cuatro puntos, desordenados, son $(0, 0, 20)$, $(20, 0, 0)$, $(-20, 0, 0)$ y $(10, 20, 10)$.





22. Dibujar tres gráficas de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

vistas desde los puntos

a) (0, 0, 20) b) (10, 0, 0) c) (5, 5, 5)

En los Ejercicios 23-32, dibujar la curva representada por la función vectorial y especificar su orientación.

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$

24. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(t) = (-t + 1)\mathbf{i} + (4t + 2)\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$

26. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

28. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + \frac{t}{2}\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

30. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3t}{2}\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3 \rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t \rangle$

En los Ejercicios 33-36, usar una calculadora para representar la función vectorial e identificar la curva tipo.

33. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}$

34. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

35. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2} \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t\mathbf{k}$

37. *Para pensar* Representar, con ayuda de una calculadora, la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$$

Para cada caso, conjeturar la transformación (si la hay) de la gráfica. Comprobar las respuestas con ayuda de la calculadora.

a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

b) $\mathbf{u}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

c) $\mathbf{u}(t) = 2 \cos(-t)\mathbf{i} + 2 \sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$

e) $\mathbf{u}(t) = 6 \cos t\mathbf{i} + 6 \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

38. *Para pensar* Dada una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, la gráfica de la función vectorial $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t - 2)$, ¿es una traslación horizontal de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 39-42, representar la curva plana por una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

39. $y = 4 - x$

40. $y = 4 - x^2$

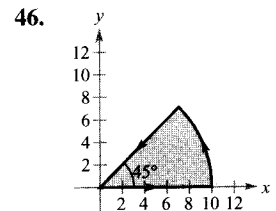
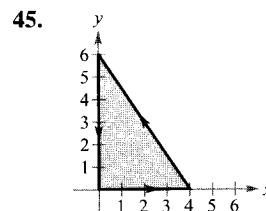
41. $x^2 + y^2 = 25$

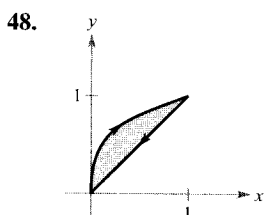
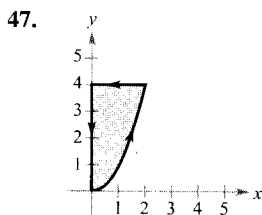
42. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

43. Una partícula se mueve por la recta que pasa por los puntos (2, 3, 0) y (0, 8, 8). Hallar una función vectorial para su trayectoria. Representar la función en la calculadora. (Hay muchas respuestas correctas.)

44. Un tobogán con forma de hélice de radio 1,5 metros, tiene 2 metros de altura y da un giro completo desde arriba hasta abajo. Hallar una función vectorial para esa hélice. Representarla en la calculadora. (Hay muchas respuestas correctas.)

En los Ejercicios 45-48, hallar funciones vectoriales que describan las fronteras de cada región. Indicar el intervalo para el parámetro de cada función.





En los Ejercicios 49-56, hacer un esbozo de la curva intersección de las superficies. Representar a continuación la curva mediante una función vectorial usando el parámetro dado.

<u>Superficies</u>	<u>Parámetro</u>
49. $z = x^2 + y^2, x + y = 0$	$x = t$
50. $z = x^2 + y^2, z = 4$	$x = 2 \cos t$
51. $x^2 + y^2 = 4, z = x^2$	$x = 2 \sin t$
52. $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16, x = y^2$	$y = t$
53. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2$	$x = 1 + \sin t$
54. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$	$x = 2 + \sin t$
55. $x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$	$x = t$ primer octante
56. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, xy = 4$	$x = t$ primer octante

En los Ejercicios 57-62, evaluar el límite.

57. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(t\mathbf{i} + \frac{t^2 - 4}{t^2 - 2t}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$
58. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right)$
59. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$
60. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} \right)$
61. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k} \right)$
62. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

En los Ejercicios 63-68, determinar el intervalo o intervalos en los que la función vectorial es continua.

63. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$
64. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\mathbf{j}$

65. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$
66. $\mathbf{r}(t) = \sen t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$
67. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \operatorname{tg} t \rangle$
68. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \rangle$
69. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \times \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t)$$

70. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t)$$

71. Probar que si \mathbf{r} es una función vectorial continua en c , entonces $\|\mathbf{r}\|$ es continua en c .
72. Verificar que el recíproco del Ejercicio 71 no es verdadero, hallando una función vectorial \mathbf{r} tal que $\|\mathbf{r}\|$ sea continua en c , pero no lo sea la propia \mathbf{r} .

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 73 y 74, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

73. Si f, g y h son funciones polinómicas de primer grado, la curva dada por $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ es una recta.
74. Si la curva dada por $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ es una recta, entonces f, g y h son polinomios de primer grado.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

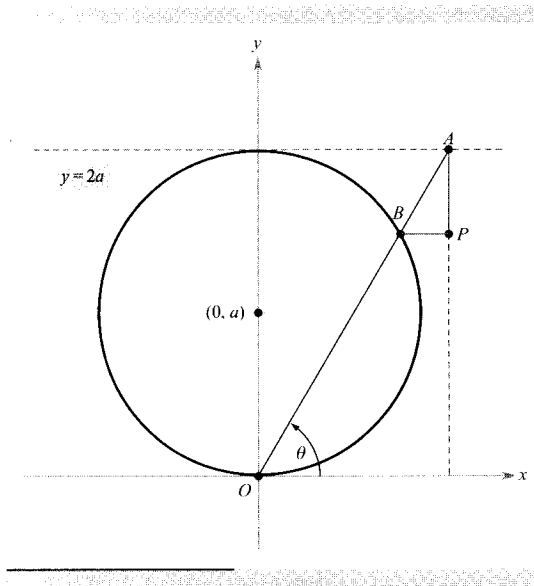
En la página 218 de la Sección 3.5 se ha estudiado la famosa curva que se conoce como **hechicera de Agnesi**. En este proyecto se profundiza más en su análisis.

Consideremos un círculo de radio a centrado en el punto $(0, a)$ del eje y , como muestra la figura de la página siguiente. Sean A un punto de la recta horizontal $y = 2a$, y B el punto donde el segmento OA corta al círculo. Un punto P está en la curva de Agnesi si P está en la misma recta vertical que A y en la misma horizontal que B .

- a) Pruebe que el punto A viene descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_A(\theta) = 2a \operatorname{ctg} \theta \mathbf{i} + 2a\mathbf{j} \quad 0 < \theta < \pi$$

donde θ es el ángulo que OA forma con el semieje x positivo.



- b) Demuestre que el punto B viene descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_B(\theta) = a \sin 2\theta \mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta) \mathbf{j} \quad 0 < \theta < \pi$$

- c) Combine esos dos resultados para hallar una función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la hecicera de Agnesi. Represente esta curva en una calculadora.
d) Describa los límites

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mathbf{r}(\theta) \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \mathbf{r}(\theta)$$

- e) Elimine el parámetro θ y determine la ecuación rectangular de la hecicera de Agnesi. Represente esta función con ayuda de una calculadora para $a = 1$ y compare la gráfica obtenida con la del apartado c).



11.2

Derivación e integración de funciones vectoriales

CONTENIDO ■

- Derivación de funciones vectoriales ■
- Integración de funciones vectoriales ■

Derivación de funciones vectoriales

En las Secciones 11.3-11.5 estudiaremos varias aplicaciones importantes del cálculo con funciones vectoriales. Como preparación para ello, dedicamos esta sección a familiarizarnos con las derivadas e integrales de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial imita la de las funciones con valores reales.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

La **derivada de una función vectorial** \mathbf{r} se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t en el que el límite exista. Si $\mathbf{r}'(c)$ existe, se dice que \mathbf{r} es **derivable** en c . Si $\mathbf{r}'(c)$ existe para todo c en un intervalo abierto, se dice que \mathbf{r} es **derivable** en el intervalo I . La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados, considerando límites laterales.

| Nota. Aparte de $\mathbf{r}'(t)$ se emplean otras notaciones para la derivada de una función vectorial, como

$$D[\mathbf{r}(t)], \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \text{ y } \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

La derivación de funciones vectoriales puede efectuarse *componente a componente*. Para convencerse de ello, basta considerar la función $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ y aplicar la definición de derivada, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

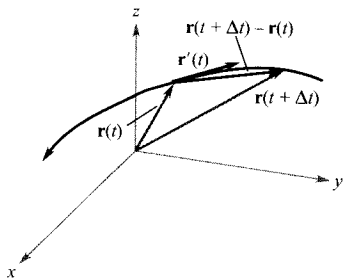


FIGURA 11.8

Este importante resultado queda recogido en el siguiente teorema. Nótese que la derivada de la función vectorial \mathbf{r} es ella misma una función vectorial. Puede verse en la Figura 11.8 que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t .

TEOREMA 11.1**DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES**

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f , g y h son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ b) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$

Solución: Derivando componente a componente vemos que

a) $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} - 0\mathbf{j} = 2t\mathbf{i}$.

b) $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + 2e^{2t}\mathbf{k}$ □

Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen aplicando derivadas sucesivas a las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial hallar $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$.

- a) $\mathbf{r}'(t)$ b) $\mathbf{r}''(t)$ c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ d) $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución:

a) $\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}''(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0$

$$\begin{aligned} d) \quad \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\sin t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 2 \sin t \mathbf{i} - 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

Hacemos notar que el producto escalar en el apartado c) es una función de valores reales, no una función vectorial. □

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

es **suave en un intervalo abierto** I si f' , g' y h' son continuas en I y además para todos los valores de t en el intervalo I .

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Hallar los intervalos en los que la epicicloide C , dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

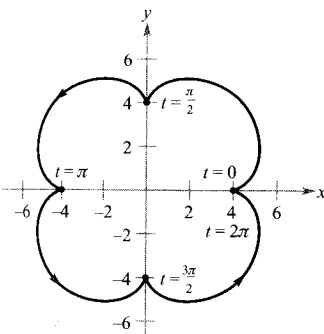
es suave.

Solución: La derivada de \mathbf{r} es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5 \sin t + 5 \sin 5t)\mathbf{i} + (5 \cos t - 5 \cos 5t)\mathbf{j}$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, los únicos valores de t para los que $\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ son $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \text{ y } 2\pi$. Por tanto, concluimos que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$



$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}$$

FIGURA 11.9

La epicicloide deja de ser suave en los puntos de intersección con los ejes.

como muestra la Figura 11.9. □

| Nota. Nótese en la Figura 11.9 que la curva deja de ser suave en los puntos donde tiene un cambio brusco de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayor parte de las reglas de derivación de funciones con valores reales tienen su contrapartida para las funciones vectoriales. Algunas de ellas se recogen en el próximo teorema. Hay que hacer notar que el teorema contiene tres versiones de «reglas del producto». La propiedad 3 da la derivada del producto de una función de valores reales por una función vectorial. La propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales, y la propiedad 5 la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio). (La propiedad 5 se aplica sólo a funciones vectoriales en tres dimensiones, ya que el producto vectorial no está definido para vectores en dos dimensiones.)

TEOREMA 11.2

PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Sean \mathbf{r} y \mathbf{u} funciones vectoriales de t , f una función derivable de t con valores reales, y c un escalar.

1. $D_t [c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t [\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t [f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t [\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

Demostración: Para probar la propiedad 4, escribamos

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1 y g_1 son funciones derivables de t . Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicios las demostraciones de las propiedades restantes (véanse Ejercicios 55-59 y Ejercicio 62). □

EXPLORACIÓN

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$. Dibuje su gráfica. Explique por qué es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Calcule $\mathbf{r}(\pi/4)$ y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Coloque el vector $\mathbf{r}'(\pi/4)$ con su punto inicial coincidiendo con el punto final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué observa? Demuestre que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ para todo t . ¿Qué relación tiene este ejemplo con la propiedad 7 del Teorema 11.2?

EJEMPLO 4 Usando las propiedades de la derivada

Dadas las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

calcular

a) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y b) $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$

Solución:

a) De $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, se sigue que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\ &= 3 + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

b) De $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, deducimos que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\ &= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \quad \square \end{aligned}$$

| Nota. Intente rehacer los apartados a) y b) efectuando en primer lugar los productos, escalar y vectorial, y derivando después, para comprobar que se llega al mismo resultado.

Integración de funciones vectoriales

La siguiente definición es una consecuencia lógica de la definición de derivada de una función vectorial.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$, la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de \mathbf{r} es

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

y su **integral definida** sobre el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f , g y h son funciones continuas en $[a, b]$, la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de \mathbf{r} es

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int h(t) dt \right] \mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

y su **integral definida** sobre el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \mathbf{k}$$

La integral indefinida de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es una familia de funciones vectoriales (las **primitivas** de \mathbf{r}) que difieren unas de otras en un vector constante \mathbf{C} . Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial tridimensional, entonces al hallar su integral indefinida $\int \mathbf{r}(t) dt$, obtenemos tres constantes de integración

$$\int f(t) dt = F(t) + C_1, \quad \int g(t) dt = G(t) + C_2, \quad \int h(t) dt = H(t) + C_3$$

donde $F'(t) = f(t)$, $G'(t) = g(t)$, y $H'(t) = h(t)$. Estas tres constantes *escalares* configuran un *vector* constante de integración: -

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t) dt &= [F(t) + C_1] \mathbf{i} + [G(t) + C_2] \mathbf{j} + [H(t) + C_3] \mathbf{k} \\ &= [F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}] + [C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}] \\ &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 5 Integral de una función vectorial

Hallar la integral indefinida

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) dt$$

Solución: Integrando componente a componente es fácil ver que

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{C} \quad \square$$

El Ejemplo 6 enseña cómo calcular la integral definida de una función vectorial.

EJEMPLO 6 Integral definida de una función vectorial

Calcular la integral

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{t}\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right) dt$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{r}(t) dt &= \left(\int_0^1 t^{1/3} dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_0^1 e^{-t} dt \right) \mathbf{k} \\ &= \left[\left(\frac{3}{4} \right) t^{4/3} \right]_0^1 \mathbf{i} + \left[\ln |t+1| \right]_0^1 \mathbf{j} + \left[-e^{-t} \right]_0^1 \mathbf{k} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + (\ln 2)\mathbf{j} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) \mathbf{k} \quad \square \end{aligned}$$

Tal como ocurría para funciones con valores reales, podemos aislar una sola primitiva de entre la familia de funciones vectoriales que constituye la integral indefinida de una función vectorial \mathbf{r}' , sin más que imponer una condición inicial, como ilustra el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 Una primitiva particular de una función vectorial

Hallar la primitiva de

$$\mathbf{r}'(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \left(\int \cos 2t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int -2 \operatorname{sen} t dt \right) \mathbf{j} + \left(\int \frac{1}{1+t^2} dt \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + C_1 \right) \mathbf{i} + (2 \cos t + C_2) \mathbf{j} + (\operatorname{arctg} t + C_3) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ y usando el hecho de que $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, vemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (0 + C_1)\mathbf{i} + (2 + C_2)\mathbf{j} + (0 + C_3)\mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

Igualando las componentes correspondientes, obtenemos

$$C_1 = 3, \quad 2 + C_2 = -2, \quad \text{y} \quad C_3 = 1$$

Así pues, la primitiva que cumple la condición inicial requerida es

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2} \sin 2t + 3\right)\mathbf{i} + (2 \cos t - 4)\mathbf{j} + (\arctg t + 1)\mathbf{k} \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 11.2

En los Ejercicios 1-4, *a*) dibujar la curva plana dada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor de t_0 que se especifica. Colocar los vectores de manera que el punto inicial de $\mathbf{r}(t_0)$ esté en el origen y el punto inicial de $\mathbf{r}'(t_0)$ coincida con el punto final de $\mathbf{r}(t_0)$. ¿Qué relación hay entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y la curva?

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad t_0 = 2$

2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad t_0 = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

4. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} \quad t_0 = 2$

5. **Investigación** Consideremos la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

- Dibujar un esbozo de su gráfica y comprobarlo con la calculadora.
- Dibujar los vectores $\mathbf{r}(1/4)$, $\mathbf{r}(1/2)$ y $\mathbf{r}(1/2) - \mathbf{r}(1/4)$ en la gráfica del apartado *a*).
- Comparar el vector $\mathbf{r}'(1/4)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1/2) - \mathbf{r}(1/4)}{1/2 - 1/4}$$

6. **Investigación** Consideremos la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$$

- Dibujar un esbozo de su gráfica y comprobarlo con la calculadora.

- Dibujar los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1,25)$, y $\mathbf{r}(1,25) - \mathbf{r}(1)$ en la gráfica del apartado *a*).
- Comparar el vector $\mathbf{r}'(1)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1,25) - \mathbf{r}(1)}{1,25 - 1}$$

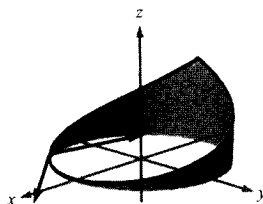
En los Ejercicios 7 y 8, *a*) dibujar la curva espacial dada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor indicado de t_0 .

7. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

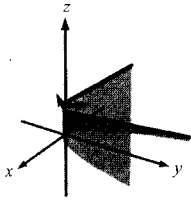
8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k} \quad t_0 = 2$

En los Ejercicios 9 y 10, se dan una función vectorial y su gráfica. La gráfica muestra además los vectores unitarios $\mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$ y $\mathbf{r}''(t_0)/\|\mathbf{r}''(t_0)\|$. Hallar estos dos vectores e identificarlos en la gráfica.

9. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad t_0 = -\frac{1}{4}$



$$10. \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\mathbf{k} \quad t_0 = \frac{1}{4}$$



En los Ejercicios 11-18, hallar $\mathbf{r}'(t)$

$$11. \mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 7t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$12. \mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$$

$$13. \mathbf{r}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$14. \mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t\sqrt{t}\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$$

$$15. \mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$16. \mathbf{r}(t) = \langle \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, t^2 \rangle$$

$$17. \mathbf{r}(t) = \langle t \sin t, \cos t, t \rangle$$

$$18. \mathbf{r}(t) = \langle \arcsen t, \arccos t, 0 \rangle$$

En los Ejercicios 19 y 20, hallar

$$a) \mathbf{r}'(t) \quad b) \mathbf{r}''(t)$$

$$c) D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] \quad d) D_t[3\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}(t)]$$

$$e) D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] \quad f) D_t[|\mathbf{r}(t)|], t > 0$$

$$19. \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$20. \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = \frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$

En los Ejercicios 21 y 22, determinar θ en función de t , el ángulo θ entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$. Representar en la calculadora $\theta(t)$ y usar la gráfica para hallar los extremos de esa función. Hallar los valores de t para los que esos dos vectores son perpendiculares.

$$21. \mathbf{r}(t) = 3 \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$$

$$22. \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$$

En los Ejercicios 23-32, hallar el intervalo o intervalos en los que la curva dada por la función vectorial es suave.

$$23. \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

$$24. \mathbf{r}(t) = \frac{1}{t-1}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$$

$$25. \mathbf{r}(t) = 2 \cos^3 \theta\mathbf{i} + 3 \sin^3 \theta\mathbf{j}$$

$$26. \mathbf{r}(\theta) = (\theta + \sin \theta)\mathbf{i} + (1 - \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$27. \mathbf{r}(\theta) = (\theta - 2 \sin \theta)\mathbf{i} + (1 - 2 \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$28. \mathbf{r}(t) = \frac{3t}{1+t^3}\mathbf{i} + \frac{3t^2}{1+t^3}\mathbf{j}$$

$$29. \mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

$$30. \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

$$31. \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$32. \mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{4}t\mathbf{k}$$

En los Ejercicios 33 y 34, usar la definición de derivada para hallar $\mathbf{r}'(t)$

$$33. \mathbf{r}(t) = (3t+2)\mathbf{i} + (1-t^2)\mathbf{j}$$

$$34. \mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{3}{t}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$

35. **Redacción** Las tres componentes de la derivada de una función vectorial \mathbf{u} son positivas en $t = t_0$. Describir el comportamiento de \mathbf{u} en $t = t_0$.

36. **Redacción** La componente z de la derivada de una función vectorial \mathbf{u} es 0 para todo t en el dominio de la función. ¿Qué implica este hecho sobre la gráfica de \mathbf{u} ?

En los Ejercicios 37-44, evaluar la integral indefinida.

$$37. \int (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$$

$$38. \int (3t^2\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 8t^3\mathbf{k}) dt$$

$$39. \int \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{3/2}\mathbf{k} \right) dt$$

$$40. \int \left(\ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dt$$

$$41. \int \left[(2t-1)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\mathbf{k} \right] dt$$

$$42. \int (e^t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}) dt$$

$$43. \int \left(\sec^2 t\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j} \right) dt$$

$$44. \int (e^{-t} \sin t\mathbf{i} + e^{-t} \cos t\mathbf{j}) dt$$

En los Ejercicios 45-50, hallar $\mathbf{r}(t)$ con las condiciones que se indican.

45. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$

46. $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

47. $\mathbf{r}''(t) = -32\mathbf{j}$
 $\mathbf{r}'(0) = 600\sqrt{3}\mathbf{i} + 600\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

48. $\mathbf{r}''(t) = -4 \cos t\mathbf{j} - 3 \sin t\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 4\mathbf{j}$

49. $\mathbf{r}'(t) = te^{-t^2}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

50. $\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t^2}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i}$

En los Ejercicios 51-54, calcular la integral definida.

51. $\int_0^1 (8t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}) dt$

52. $\int_{-1}^1 (t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \sqrt[3]{t}\mathbf{k}) dt$

53. $\int_0^{\pi/2} [(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dt$

54. $\int_0^3 (e^t\mathbf{i} + te^t\mathbf{k}) dt$

En los Ejercicios 55-62, demostrar la propiedad que se especifica. En cada caso, \mathbf{r} , \mathbf{u} y \mathbf{v} son funciones vectoriales derivables de t , y c es un escalar.

55. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$

56. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$

57. $D_t[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$

58. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t)$

59. $D_t[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$

60. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$

61. $D_t\{\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]\} = \mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)]$

62. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es constante, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 63 y 64, determinar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

63. $\frac{d}{dt} [||\mathbf{r}(t)||] = ||\mathbf{r}'(t)||$

64. Si \mathbf{r} y \mathbf{u} son funciones vectoriales derivables de t , entonces $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$

- CONTENIDO ■
Velocidad y aceleración ■
Movimiento de proyectiles ■



11.3

Velocidad y aceleración

Velocidad y aceleración

Ya estamos en disposición de aunar ecuaciones paramétricas, curvas, vectores y funciones vectoriales con el fin de elaborar un modelo para el movimiento a lo largo de una curva. Empezamos tratando el movimiento de un objeto en el plano. (El movimiento de un objeto en el espacio se estudia de manera análoga.)

Cuando un objeto se mueve a lo largo de una curva del plano, las coordenadas x e y de su centro de masas son ambas funciones del tiempo t . En lugar de utilizar f y g como símbolos para esas dos funciones, es más conveniente escribir $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Así, el vector posición adopta la expresión

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Vector posición}$$

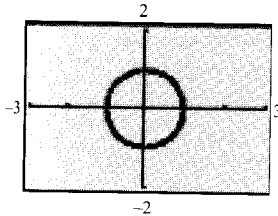
El atractivo de este modelo radica en que podremos usar la primera y la segunda derivada de la función vectorial \mathbf{r} para calcular la velocidad y la aceleración del objeto. (Recordemos que, por el capítulo precedente, tanto la velocidad como la aceleración son atributos vectoriales, con magnitud y dirección.) Para hallar los vectores velocidad y aceleración en un instante dado t , consideremos un punto $Q(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ que tiende hacia el punto $P(x(t), y(t))$ a lo largo

EXPLORACIÓN

Explorando la velocidad Considere el círculo dado por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t)\mathbf{i} + (\sin \omega t)\mathbf{j}$$

Represente esta curva en forma paramétrica con ayuda de una calculadora para varios valores de ω . ¿Cómo afecta el valor de ω a la velocidad del punto final cuando éste traza la curva? Para un valor fijado de ω , ¿parece ser constante la velocidad? ¿Y la aceleración? Explique las respuestas.



de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, como indica la Figura 11.10. Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la dirección del vector \overrightarrow{PQ} tiende a la *dirección del movimiento* en el instante t .

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Si este límite existe (y no es el vector cero), se define como el **vector velocidad** o **vector tangente** a la curva en el punto P . Nótese que es el mismo límite utilizado en la definición de $\mathbf{r}'(t)$, de modo que la dirección de $\mathbf{r}'(t)$ marca la dirección del movimiento en el instante t . Además, la longitud del vector $\mathbf{r}'(t)$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

da la rapidez del objeto en el instante t . Análogamente, podemos usar $\mathbf{r}''(t)$ para representar el vector aceleración, como se indica en la próxima definición.

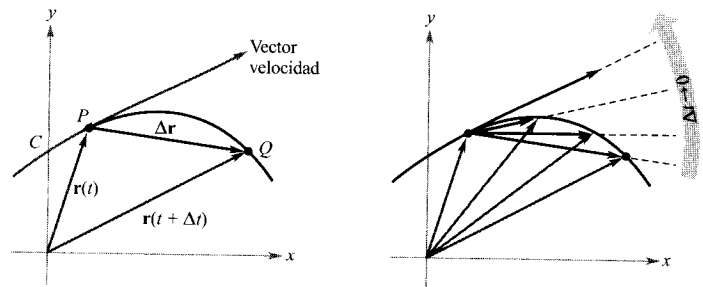


FIGURA 11.10

Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ tiende al vector velocidad.

DEFINICIÓN DE LA VELOCIDAD Y DE LA ACELERACIÓN

Si x e y son funciones dos veces derivables de t , y $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez se definen como sigue:

$$\text{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

$$\text{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

$$\text{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

En el caso de un movimiento a lo largo de una curva en el espacio, las definiciones son análogas, a saber: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, se definen

$$\text{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

$$\text{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

$$\text{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

EJEMPLO 1 Velocidad y aceleración a lo largo de una curva en el plano

Nota. En el Ejemplo 1, puede apreciarse que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en cualquier instante. Esto es característico de los movimientos con rapidez constante (véase Ejercicio 49).

Hallar el vector velocidad y el vector aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva C del plano descrita por

$$\mathbf{r}(t) = 2 \sin \frac{t}{2} \mathbf{i} + 2 \cos \frac{t}{2} \mathbf{j} \quad \text{Vector posición}$$

Solución: El vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \cos \frac{t}{2} \mathbf{i} - \sin \frac{t}{2} \mathbf{j} \quad \text{Vector velocidad}$$

La rapidez en el instante t viene dada por

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = 1 \quad \text{Rapidez}$$

Y el vector aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \mathbf{j} \quad \text{Vector aceleración} \quad \square$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva del Ejemplo 1 son $x = 2 \sin (t/2)$, e $y = 2 \cos (t/2)$. Eliminando el parámetro t , se obtiene la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

Así pues, la curva es un círculo de radio 2 centrado en el origen (Figura 11.11). Como el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \cos (t/2)\mathbf{i} - \sin (t/2)\mathbf{j}$ tiene longitud constante pero dirección cambiante cuando t crece, la partícula se mueve sobre el círculo con rapidez constante.

EJEMPLO 2 Vectores velocidad y aceleración en el plano

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva plana dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4)\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad \text{Vector posición}$$

y hallar sus vectores velocidad y aceleración cuando $t = 0$ y $t = 2$.

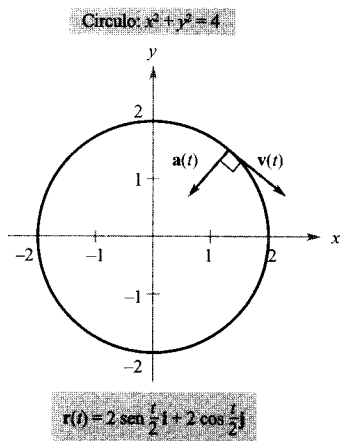


FIGURA 11.11

La partícula se mueve sobre el círculo con rapidez constante.

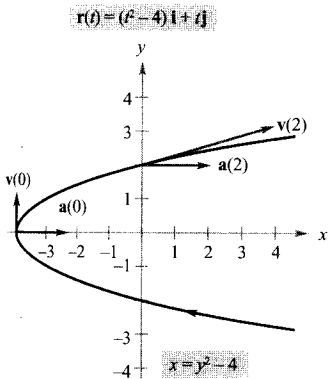


FIGURA 11.12

En cada punto de la curva, el vector aceleración apunta hacia la derecha.

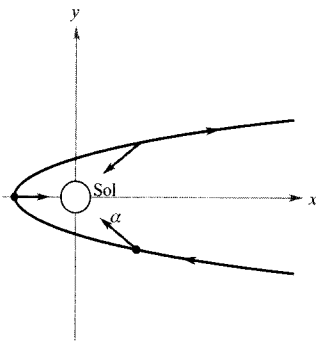


FIGURA 11.13

En cada punto de la órbita del cometa, el vector aceleración apunta hacia el Sol.

Solución: De las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$ e $y = t$, deducimos que la curva es una parábola dada por $x = y^2 - 4$, como ilustra la Figura 11.12. El vector velocidad en cualquier instante t es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{Vector velocidad}$$

y el vector aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} \quad \text{Vector aceleración}$$

Cuando $t = 0$, vienen dados por

$$\mathbf{v}(0) = 2(0)\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i}$$

Y cuando $t = 2$,

$$\mathbf{v}(2) = 2(2)\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i} \quad \square$$

Para el objeto que se mueve por la trayectoria de la Figura 11.12, el vector aceleración es constante (tiene longitud 2 y apunta hacia arriba). Esto implica que la rapidez del objeto va decreciendo al ir moviéndose hacia el vértice de la parábola y creciendo cuando se aleja del vértice de la parábola.

Este tipo de movimiento *no* es típico en los cometas que describen trayectorias parabólicas en nuestro sistema solar. Para estos cometas, el vector aceleración apunta siempre hacia el origen (el Sol), de forma que la velocidad del cometa crece mientras se aproxima al vértice de su trayectoria y decrece mientras se va alejando del vértice (Figura 11.13).

EJEMPLO 3 Vectores velocidad y aceleración en el plano

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva espacial dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad t \geq 0 \quad \text{Vector posición}$$

y hallar los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$.

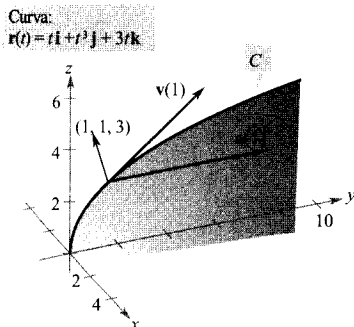


FIGURA 11.14

Solución: Usando las ecuaciones paramétricas $x = t$ e $y = t^3$ podemos constatar que la trayectoria del objeto está contenida en un cilindro cúbico de ecuación $y = x^3$. Además, como $z = 3t$, el objeto parte de $(0, 0, 0)$ y se mueve hacia arriba cuando t crece, como muestra la Figura 11.14. De $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ se sigue que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{Vector velocidad}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{j} \quad \text{Vector aceleración}$$

Cuando $t = 1$, se tiene

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{j} \quad \square$$

Hasta ahora en esta sección nos hemos concentrado en calcular la velocidad y la aceleración, derivando la función de posición. En muchas aplicaciones prácticas hay que resolver el problema inverso: dadas la velocidad y la aceleración, encontrar la función de posición. Esta situación se ilustra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Cálculo de la función posición por integración

Un objeto parte del reposo del punto $P(1, 2, 0)$ y se mueve con una aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{Vector aceleración}$$

donde $\|\mathbf{a}(t)\|$ se mide en pies/s². Hallar la posición del objeto tras $t = 2$ segundos.

Solución: De la descripción del movimiento del objeto deducimos las siguientes condiciones iniciales. Ya que el objeto parte en reposo, tenemos

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$$

Además, como parte del punto $(x, y, z) = (1, 2, 0)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j} + z(0)\mathbf{k} \\ &= 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \end{aligned}$$

Para hallar su función posición, hemos de integrar dos veces, usando cada vez las condiciones iniciales para fijar el valor de la constante de integración. El vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \int (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) dt = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, obtenemos,

$$\mathbf{v}(0) = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

Así pues, el vector velocidad en cualquier instante t es

$$\mathbf{v}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad \text{Vector velocidad}$$

Integrando de nuevo vemos que

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt = \int (t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}) dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Curva:
 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

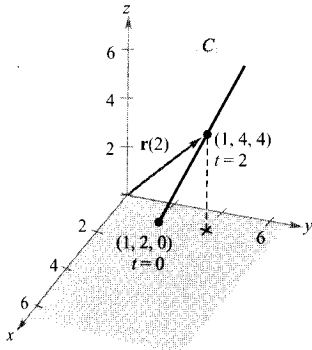


FIGURA 11.15

El objeto tarda 2 segundos en ir desde el punto (1, 2, 0) hasta el punto (1, 4, 4) a lo largo de C.

donde $\mathbf{C} = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k}$. Tomando $t = 0$ y usando la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, obtenemos

$$\mathbf{r}(0) = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1, C_5 = 2, C_6 = 0$$

Por tanto, el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad \text{Vector posición}$$

La posición del objeto a los 2 segundos viene dada por $\mathbf{r}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, como ilustra la Figura 11.15. □

Movimiento de proyectiles

Ya disponemos de cuanto es preciso para deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil. Supondremos que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre él, una vez lanzado, de manera que el movimiento se produce en un plano vertical, que representamos por el plano de coordenadas xy , con el origen en un punto de la superficie terrestre (Figura 11.16). Para un proyectil de masa m , la fuerza gravitatoria es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} \quad \text{Fuerza de la gravedad}$$

donde $g = 32 \text{ pie/s}^2$, o sea $9,81 \text{ m/s}^2$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta fuerza produce una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ que satisface la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En consecuencia, la aceleración del proyectil viene dada por $m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$, luego

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j} \quad \text{Aceleración del proyectil}$$

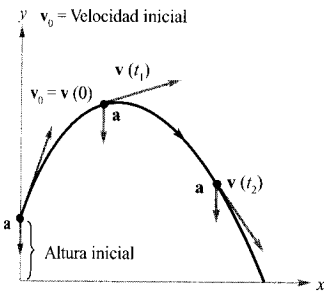


FIGURA 11.16

Trayectoria parabólica de un proyectil.

EJEMPLO 5 Función posición de un proyectil

Un proyectil de masa m es lanzado desde una posición inicial \mathbf{r}_0 con velocidad inicial \mathbf{v}_0 . Hallar su vector posición en función del tiempo t .

Solución: Partimos del vector aceleración e integramos dos veces.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t) dt = \int -g\mathbf{j} dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1) dt = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{C}_1t + \mathbf{C}_2 \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, podemos calcular las constantes $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$. Obtenemos $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_0$. Por tanto, el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \quad \text{Vector posición} \quad \square$$

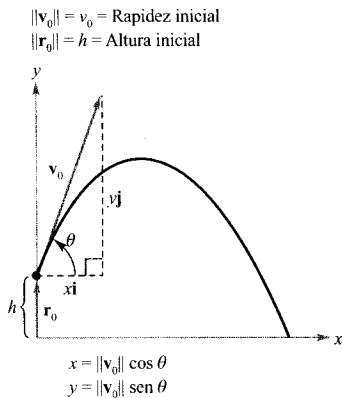


FIGURA 11.17

Las condiciones iniciales en el lanzamiento de un proyectil.

En muchos problemas sobre proyectiles, los vectores constantes \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 no se dan explícitamente. Suelen darse más bien la altura inicial, la rapidez inicial v_0 y el ángulo θ de lanzamiento del proyectil (Figura 11.17). De la altura dada se deduce que $\mathbf{r}_0 = h\mathbf{j}$. Y como la rapidez da la longitud del vector velocidad inicial, deducimos que $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$, así que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= (\|\mathbf{v}_0\| \cos \theta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{v}_0\| \sin \theta)\mathbf{j} \\ &= v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}\end{aligned}$$

Por tanto, el vector posición puede expresarse así:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 && \text{Vector posición} \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + tv_0 \cos \theta \mathbf{i} + tv_0 \sin \theta \mathbf{j} + h\mathbf{j} \\ &= (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}\end{aligned}$$

TEOREMA 11.3 FUNCIÓN POSICIÓN DE UN PROYECTIL

Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado desde una altura inicial h con rapidez inicial v_0 y con un ángulo de elevación θ , viene descrita por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}$$

donde g denota la aceleración de la gravedad.

EJEMPLO 6 La trayectoria de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es golpeada a 3 pies de altura sobre el suelo con una velocidad de 100 pies/s y un ángulo de elevación de $\pi/4$ (Figura 11.18). Calcular la máxima altura que alcanza. ¿Salvará una valla de 10 pies de altura situada a 300 metros del lugar de lanzamiento?

Solución: Se nos dice que $h = 3$, $v_0 = 100$, y $\theta = \pi/4$. Así pues, tomando $g = 32$ pies/s², resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \left(100 \cos \frac{\pi}{4} \right) t \mathbf{i} + \left[3 + \left(100 \sin \frac{\pi}{4} \right) t - 16t^2 \right] \mathbf{j} \\ &= (50\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (3 + 50\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j} \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= 50\sqrt{2}\mathbf{i} + (50\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

La altura máxima se produce en el instante en que

$$y'(t) = 50\sqrt{2} - 32t = 0$$

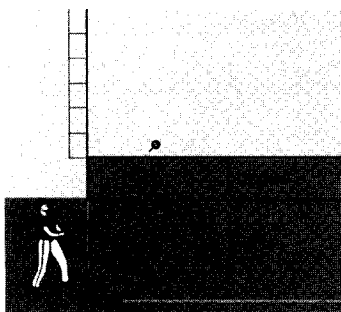


FIGURA 11.18

El jugador golpea la pelota y ésta adquiere una velocidad inicial de 100 pies/s.

es decir, cuando

$$t = \frac{25\sqrt{2}}{16} \approx 2,21 \text{ segundos}$$

de manera que su valor es

$$\begin{aligned} y &= 3 + 50\sqrt{2}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) - 16\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right)^2 \\ &= \frac{649}{8} \end{aligned}$$

$$\approx 81 \text{ pies} \quad \text{Altura máxima cuando } t \approx 2,21$$

La pelota está a 300 pies del punto de partida cuando

$$300 = x(t) = 50\sqrt{2}t$$

Despejando t en esta ecuación vemos que $t = 3\sqrt{2} \approx 4,24$ segundos. En ese momento, la altura de la pelota es

$$\begin{aligned} y &= 3 + 50\sqrt{2}(3\sqrt{2}) - 16(3\sqrt{2})^2 \\ &= 303 - 288 \end{aligned}$$

$$= 15 \text{ pies} \quad \text{Altura cuando } t \approx 4,24$$

Por consiguiente, la pelota salvará la valla. □

Ejercicios de la Sección 11.3

En los Ejercicios 1-8, la función posición \mathbf{r} describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el plano xy . Dibujar la trayectoria, así como los vectores velocidad y aceleración en el punto que se especifica.

<u>Función</u>	<u>Intervalo</u>
1. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$	(3, 0)
2. $\mathbf{r}(t) = (6 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	(3, 3)
3. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	(4, 2)
4. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$	(1, 1)
5. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$	($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
6. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}$	(2, 0)
7. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$	(π , 2)
8. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t \rangle$	(1, 1)

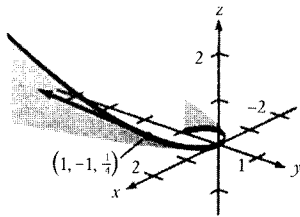
En los Ejercicios 9-16, la función posición \mathbf{r} describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio. Hallar su velocidad, rapidez y aceleración.

9. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{9 - t^2}\mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$
15. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle$
16. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \rangle$

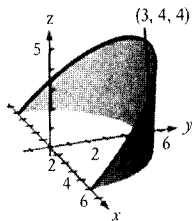
Aproximación lineal En los Ejercicios 17 y 18, se dan la gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ y un vector tangente a la gráfica en $t = t_0$.

- Hallar unas ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$.
- Usar esas ecuaciones paramétricas para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0,1)$

17. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, -t^2, \frac{1}{4}t^3 \right\rangle, t_0 = 1$



18. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \sqrt{25 - t^2}, \sqrt{25 - t^2} \rangle, t_0 = 3$



En los Ejercicios 19-22, usar la función aceleración dada para determinar las funciones velocidad y posición. Calcular, a continuación, la posición para $t = 2$.

19. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

20. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 5\mathbf{j}, \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

21. $\mathbf{a}(t) + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(1) = 5\mathbf{j}, \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$

22. $\mathbf{a}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

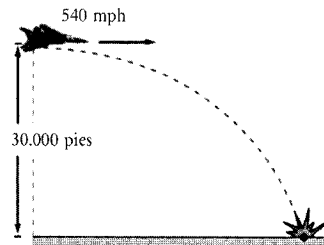
Movimiento de un proyectil En los Ejercicios 23-32, usar el modelo de la trayectoria de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire.

23. Hallar la función vectorial que describe la trayectoria de un proyectil lanzado desde una altura de 10 pies con velocidad inicial de 88 pies/s y con un ángulo de elevación de 30° . Representarla en una calculadora.

24. Calcular la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado desde 3 pies de altura con velocidad inicial de 900 pies/s y ángulo de elevación 45° .

25. Una empacadora debe lanzar las pacas a una posición que se halla 8 pies más alta que ella y a 16 pies de distancia horizontal. Calcular la mínima velocidad con que ha de lanzarlas y el ángulo de elevación del lanzamiento.

26. El bombardero de la figura vuela a 540 millas/h (792 pies/s) a una altura de 30.000 pies. ¿Cuándo debe soltar una bomba para dar en el blanco? (Expresar la respuesta en términos del ángulo de depresión del avión respecto del blanco.) ¿Qué velocidad lleva la bomba en el instante del impacto?



27. El disparo de un rifle, del que la bala sale con una velocidad de 1.200 pies/s, debe impactar en un blanco situado a 3.000 pies de distancia. Determinar el ángulo de elevación del rifle.

28. Un proyectil se dispara desde el suelo con un ángulo de elevación de 10° . Calcular la velocidad inicial mínima exigida para lograr un alcance de 100 pies.

29. Representar en una calculadora las trayectorias de un proyectil para los valores indicados de θ y v_0 . En cada caso, usar la gráfica para estimar la altura máxima y el alcance del disparo, supuesto que se efectúa desde el suelo.

a) $\theta = 10^\circ, v_0 = 66$ pies/s

b) $\theta = 10^\circ, v_0 = 146$ pies/s

c) $\theta = 45^\circ, v_0 = 66$ pies/s

d) $\theta = 45^\circ, v_0 = 146$ pies/s

e) $\theta = 60^\circ, v_0 = 66$ pies/s

f) $\theta = 60^\circ, v_0 = 146$ pies/s

30. Eliminar el parámetro t de la función posición para el movimiento de un proyectil con el fin de demostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x + h$$

31. La trayectoria de una bala viene dada por la ecuación rectangular

$$y = x - 0,005x^2$$

Usar el resultado del Ejercicio 34 para hallar la función posición. A continuación, hallar la rapidez y la dirección de la bala en el punto en el que ha recorrido 60 pies horizontalmente.

32. Hallar el ángulo con que debe lanzarse un proyectil para conseguir
- el máximo alcance,
 - la máxima altura.

Movimiento de un proyectil En los Ejercicios 33 y 34, usar el modelo del movimiento de proyectiles, despreciando la resistencia del aire [$a(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$].

33. Determinar la máxima altura y el alcance de un proyectil disparado a una altura de 1,5 metros con velocidad inicial de 100 m/s y con un ángulo de elevación de 30° .
34. Un proyectil lanzado desde el suelo con ángulo de 8° . Calcular la velocidad inicial mínima requerida para que alcance 50 metros.

Movimiento cicloidial En los Ejercicios 35 y 36, consideramos el movimiento de un punto (o de una partícula) sobre la circunferencia de un círculo que rueda. Conforme el círculo va dando vueltas, ese punto genera la cicloide

$$\mathbf{r}(t) = b(\omega t - \sin \omega t)\mathbf{i} + b(1 - \cos \omega t)\mathbf{j}$$

donde ω es la velocidad angular constante con que gira el círculo.

35. Calcular los vectores velocidad y aceleración de la partícula y determinar, con estos resultados, en qué instantes la rapidez de la partícula será a) 0, b) máxima.
36. Calcular la máxima rapidez de un punto de la rueda, de 1 pie de radio, de un automóvil que viaja a 55 millas/h. Compararla con la velocidad del automóvil.

Movimiento circular En los Ejercicios 37-40, se considera una partícula que se mueve sobre un círculo de radio b descrito por

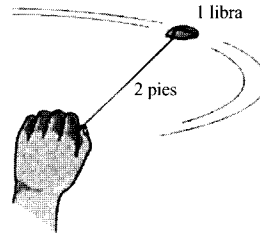
$$\mathbf{r}(t) = b \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$$

donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular constante.

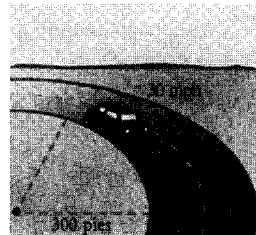
37. Hallar el vector velocidad y comprobar que es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.
38. a) Demostrar que la rapidez de la partícula es $b\omega$.
b) Usar un método de representación paramétrica para trazar en una calculadora el círculo con $b = 6$. Ensayar diferentes valores de ω . ¿Dibuja la calculadora más deprisa los círculos cuando ω es grande?
39. Hallar el vector aceleración y verificar que apunta siempre hacia el centro del círculo.
40. Probar que la magnitud del vector aceleración es $\omega^2 b$.

Movimiento circular En los Ejercicios 41 y 42, usar los resultados de los Ejercicios 37-40.

41. Se ata una piedra de 1 libra al extremo de un cordel de 2 pies y se hace girar horizontalmente (véase figura). El cordel se romperá si sufre una fuerza de 10 libras. Calcular la rapidez máxima que puede darse a la piedra sin romperlo. Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = \frac{1}{32}$



42. Un vehículo de 3.000 libras está tomando una curva circular de 300 pies de radio a 30 millas/h (véase figura). Supuesto que la carretera es plana, calcular la fuerza entre el suelo y las ruedas necesaria para que el vehículo mantenga su camino circular y no deslice. (Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = 3.000/32$.) Calcular el ángulo de peralte que habría que poner en esa curva para que las ruedas no sufran ninguna fuerza lateral de rozamiento.



43. **Lanzamiento de peso** La trayectoria de un objeto lanzado con ángulo de elevación θ es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right]\mathbf{j}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, t el tiempo en segundos, y g la aceleración de la gravedad. Verificar que permanece en el aire durante

$$t = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \text{ segundos}$$

y que recorre una distancia horizontal de

$$\frac{v_0^2 \cos \theta}{g} \left(\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \text{ pies}$$

44. **Lanzamiento de peso** Se lanza un peso desde 6 pies de altura con velocidad inicial de 45 pies/s. Calcular cuánto tiempo está en el aire y la distancia

horizontal que recorre, si se lanza con un ángulo de elevación $\theta = 42.5^\circ$.

45. Demostrar que si un objeto se mueve con rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.
46. Probar que un objeto que se mueve en línea recta con rapidez constante tiene aceleración nula.
47. **Investigación** Un objeto se mueve a lo largo de la elipse determinada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$.
- Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$, y $\mathbf{a}(t)$
 - Completar la tabla con ayuda de calculadora.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Rapidez					

- Dibujar la trayectoria elíptica, y los vectores velocidad y aceleración en los valores de t dados en la tabla.
 - Con los resultados precedentes, describir la relación geométrica entre los vectores velocidad y aceleración cuando la rapidez de la partícula está creciendo y cuando está decreciendo.
48. **Redacción** Consideremos una partícula que se mueve sobre la trayectoria

$$\mathbf{r}_1(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Discutir cualquier modificación en la posición, la velocidad o la aceleración de la partícula si su posición viene dada por la función vectorial $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$. Generalizar los resultados para la función posición $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$.

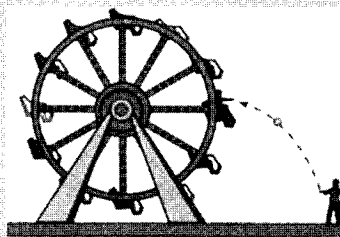
PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Deseamos lanzar un objeto a un amigo que está montado en una noria (véase figura). Las ecuaciones paramétricas que siguen dan las trayectorias del amigo $\mathbf{r}_1(t)$ y del objeto $\mathbf{r}_2(t)$. La distancia se mide en metros y el tiempo en segundos.

$$\mathbf{r}_1(t) = 15 \left(\sin \frac{\pi t}{10} \right) \mathbf{i} + \left(16 - 15 \cos \frac{\pi t}{10} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = [22 - 8,03(t - t_0)] \mathbf{i} + [1 + 11,47(t - t_0) - 4,9(t - t_0)^2] \mathbf{j}$$

- Localizar la posición del amigo cuando $t = 0$.
- Determinar el número de revoluciones por minuto de la noria.
- ¿Con qué velocidad inicial y ángulo de elevación ha sido lanzado el objeto en el instante t_0 ?
- Representar en una calculadora las funciones vectoriales usando un valor de t_0 que permita al amigo alcanzar el objeto (hacerlo por «prueba y error»). Explicar el significado de t_0 .
- Estimar el instante aproximado en que el amigo podrá atrapar el objeto y la velocidad del amigo en ese momento.



11.4

Vectores tangentes y vectores normales

CONTENIDO

- Vectores tangentes y vectores normales
- Componentes tangencial y normal de la aceleración

Vectores tangentes y vectores normales

En la sección anterior hemos visto que el vector velocidad apunta en la dirección del movimiento. Esta observación conduce a la siguiente definición, aplicable a cualquier curva suave, no sólo a aquellas en las que el parámetro es el tiempo.

DEFINICIÓN DEL VECTOR TANGENTE UNITARIO

Sea C una curva suave representada por \mathbf{r} en un intervalo abierto I . El **vector tangente unitario** $\mathbf{T}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

| Nota. Recordemos que una curva se dice que es suave en un intervalo si \mathbf{r}' es continua y no nula en dicho intervalo. Así pues, la «suavidad» es suficiente para garantizar que una curva posee vector tangente unitario en todos sus puntos.

EJEMPLO 1 Cálculo del vector tangente unitario

Hallar el vector tangente unitario a la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

cuando $t = 1$.

Solución: La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \text{Derivada de } \mathbf{r}(t)$$

Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} && \text{Definición de } \mathbf{T}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) && \text{Sustituir } \mathbf{r}'(t) \end{aligned}$$

Cuando $t = 1$, el vector tangente unitario es (véase Figura 11.19)

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \quad \square$$

| Nota. En el Ejemplo 1, la dirección del vector tangente unitario depende de la orientación de la curva. Si la parábola de la Figura 11.19 estuviera dada por

$$\mathbf{r}(t) = -(t - 2)\mathbf{i} + (t - 2)^2\mathbf{j}$$

$\mathbf{T}(1)$ sería todavía el vector tangente unitario en el punto $(1, 1)$, pero apuntaría en la dirección opuesta (intente verificar este hecho).

La **recta tangente a una curva** en un punto es la recta que pasa por ese punto y es paralela al vector tangente unitario. En el Ejemplo 2, se usa el vector tangente unitario para determinar la recta tangente a una hélice en uno de sus puntos.

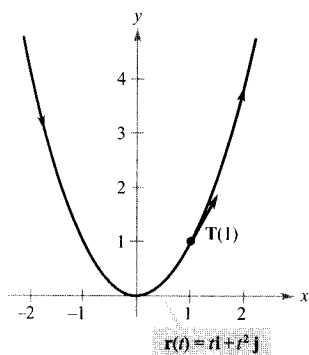


FIGURA 11.19

La dirección del vector tangente unitario depende de la orientación de la curva.

EJEMPLO 2 Recta tangente a una curva en un punto

Hallar $\mathbf{T}(t)$ y unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = \pi/4$.

Solución: La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es $\mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, lo cual implica que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$. Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Cuando $t = \pi/4$, el vector tangente unitario es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-2 \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (-\sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Usando los números directores $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$, y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$ es fácil obtener las siguientes ecuaciones paramétricas (con parámetro s):

$$x = x_1 + as = \sqrt{2} - \sqrt{2}s$$

$$y = y_1 + bs = \sqrt{2} + \sqrt{2}s$$

$$z = z_1 + cs = \frac{\pi}{4} + s$$

Esta recta tangente se muestra en la Figura 11.20. □

En el Ejemplo 2 hay infinitos vectores ortogonales al vector tangente $\mathbf{T}(t)$. Uno de ellos es $\mathbf{T}'(t)$, como se desprende de la propiedad 7 del Teorema 11.2. Es decir,

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$$

Normalizando el vector $\mathbf{T}'(t)$ se obtiene un vector especial, llamado el **vector normal principal (unitario)**, como recoge la próxima definición.

Curva:
 $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

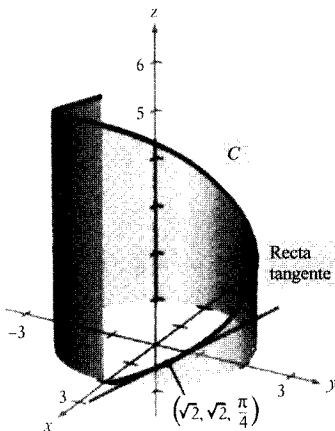


FIGURA 11.20

La recta tangente a una curva en un punto queda determinada por el vector tangente unitario en ese punto.

DEFINICIÓN DEL VECTOR NORMAL PRINCIPAL (UNITARIO)

Sea C una curva suave representada por \mathbf{r} en un intervalo abierto I . Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, el vector normal principal en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

EJEMPLO 3 Cálculo del vector normal principal

Hallar $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{N}(1)$ para la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$$

Solución: Derivando vemos que

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 + 16t^2}$$

de donde se deduce que el vector tangente unitario es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) \quad \text{Vector tangente unitario} \end{aligned}$$

Usando el Teorema 11.2, derivamos $\mathbf{T}(t)$ respecto de t para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(4\mathbf{j}) - \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) \\ &= \frac{12}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = 12 \frac{\sqrt{9 + 16t^2}}{(9 + 16t^2)^3} = \frac{12}{9 + 16t^2}$$

Por tanto, el vector normal principal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \quad \text{Vector normal principal} \end{aligned}$$

Cuando $t = 1$, el vector normal principal es

$$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

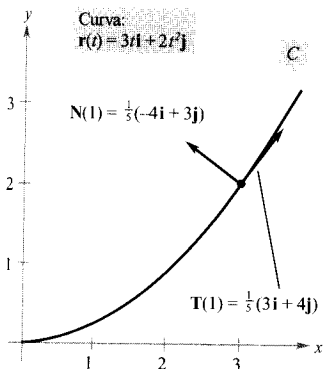


FIGURA 11.21

El vector normal principal apunta hacia la concavidad de la curva.

como muestra la Figura 11.21. □

El vector normal principal suele ser difícil de calcular algebraicamente. Para curvas planas puede simplificarse el álgebra hallando

$$\mathbf{T}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Vector tangente unitario}$$

y observando que $\mathbf{N}(t)$ debe ser

$$\mathbf{N}_1(t) = y(t)\mathbf{i} - x(t)\mathbf{j} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{N}_2(t) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}$$

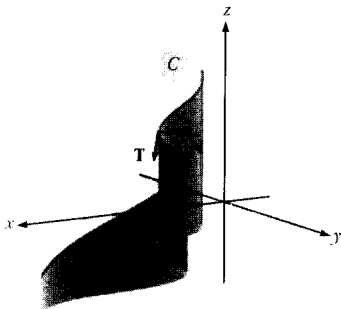


FIGURA 11.22

En cualquier punto de una curva, un vector normal unitario es ortogonal al vector tangente unitario. El vector normal principal apunta en la dirección en la que está girando la curva.

Como $\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = 1$, se sigue que ambos, $\mathbf{N}_1(t)$ y $\mathbf{N}_2(t)$, son vectores normales unitarios. El vector normal principal \mathbf{N} es el que apunta hacia la concavidad de la curva, como se indica en la Figura 11.21 (véase Ejercicio 49). Esto vale asimismo para curvas en el espacio. Es decir, para un objeto que se mueve a lo largo de una curva C en el espacio, el vector $\mathbf{T}(t)$ apunta en la dirección del movimiento, mientras que $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y apunta en la dirección en la que el objeto está girando (Figura 11.22).

EJEMPLO 4 Cálculo del vector normal principal

Hallar el vector normal principal para la hélice

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Solución: Por el Ejemplo 2 sabemos que el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Así pues, $\mathbf{T}'(t)$ viene dado por

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \cos t\mathbf{i} - 2 \sin t\mathbf{j})$$

Como $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/\sqrt{5}$, se sigue que el vector normal principal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{2}(-2 \cos t\mathbf{i} - 2 \sin t\mathbf{j}) \\ &= -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} \end{aligned}$$

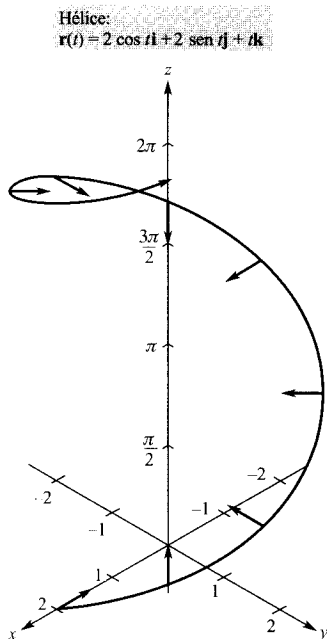


FIGURA 11.23

$\mathbf{N}(t)$ es horizontal y apunta hacia el eje z .

Nótese que este vector es horizontal y apunta hacia el eje z (Figura 11.23).

□

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Volvamos al problema de describir el movimiento de un objeto sobre una curva. En la sección anterior vimos que un objeto que se mueve con **rapidez constante**, los vectores velocidad y aceleración son ortogonales. Eso parece lógico, ya que si hubiese alguna aceleración en la dirección del movimiento, la rapidez no se mantendría constante. Una manera de comprobar esta afirmación consiste en darse cuenta de que

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

si $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es constante. (Véase propiedad 7 del Teorema 11.2.)

Sin embargo, para un objeto que viaja con **rapidez variable**, los vectores velocidad y aceleración no son necesariamente ortogonales. Por ejemplo, hemos visto que el vector aceleración de un proyectil apunta siempre hacia abajo, sea cual sea la dirección del movimiento.

En general, una parte de la aceleración (la componente tangencial) actúa en la dirección del movimiento y otra parte (la componente normal) actúa en dirección perpendicular a la del movimiento. Con el fin de determinar esas dos componentes, podemos utilizar los vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, que van a jugar un papel análogo al que juegan \mathbf{i} , \mathbf{j} cuando se representan vectores en el plano. El próximo teorema establece que el vector aceleración está en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

TEOREMA 11.4 VECTOR ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y $\mathbf{N}(t)$ existe, el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ está en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Demostración: Con el fin de simplificar la notación, escribiremos \mathbf{T} en lugar de $\mathbf{T}(t)$, \mathbf{T}' en lugar de $\mathbf{T}'(t)$, etc. De $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\| = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se sigue que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}$$

Derivando resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{v}' &= D_t[\|\mathbf{v}\|\mathbf{T}] + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' && \text{Regla del producto} \\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|\mathbf{T}] + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' \left(\frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{T}'\|} \right) \\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|\mathbf{T}] + \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} && \mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\| \end{aligned}$$

Como \mathbf{a} está expresado mediante una combinación lineal de \mathbf{T} y \mathbf{N} , debe estar en el plano determinado por \mathbf{T} y \mathbf{N} . \square

Los coeficientes de \mathbf{T} y \mathbf{N} en la demostración del Teorema 11.4 se llaman **componente tangencial** y **componente normal de la aceleración**, y se suelen denotar por $a_T = D_t[\|\mathbf{v}\|]$ y $a_N = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|$. Así pues, podemos escribir

$$\mathbf{a}(t) = a_T\mathbf{T}(t) + a_N\mathbf{N}(t)$$

El teorema siguiente proporciona fórmulas apropiadas para a_N y a_T .

TEOREMA 11.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C , para la que existe $\mathbf{N}(t)$, las componentes tangencial y normal de la aceleración vienen dadas por

$$a_T = D_t[|\mathbf{v}|] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|}$$

$$a_N = |\mathbf{v}| |\mathbf{T}'| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$

Nótese que $a_N \geq 0$. La componente normal de la aceleración se llama también **componente centrípeta de la aceleración**.

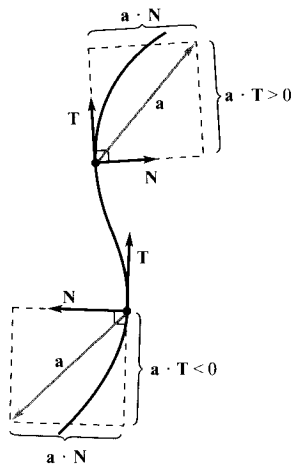


FIGURA 11.24

Las componentes tangencial y normal de la aceleración se obtienen proyectando \mathbf{a} sobre \mathbf{T} y \mathbf{N} .

Demostración: Es claro que \mathbf{a} está en el plano de \mathbf{T} y \mathbf{N} , así que de la Figura 11.24 deducimos que, en cualquier instante t , la componente de la proyección del vector aceleración sobre \mathbf{T} es $a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$ y sobre \mathbf{N} es $a_N = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$. Además, como $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ y $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, resulta ser

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|}$$

En los Ejercicios 51 y 52 se pide probar las otras partes del teorema. \square

| Nota. Las fórmulas del Teorema 11.5, junto con otras de este capítulo, se resumen en la página 1095.

EJEMPLO 5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para la función posición $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Solución: Comenzamos calculando la velocidad, la rapidez y la aceleración.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{9 + 1 + 4t^2} = \sqrt{10 + 4t^2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$$

Por el Teorema 11.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

y puesto que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

y la componente normal es

$$a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

| Nota. En este ejemplo podríamos haber utilizado una fórmula alternativa para

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{(2)^2 - \frac{16t^2}{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

EJEMPLO 6 Cálculo de a_N y a_T para una hélice

Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$, $b > 0$

Solución:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -b \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{b^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -b \cos t \mathbf{i} - b \sin t \mathbf{j}$$

Por el Teorema 11.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{b^2 \sin t \cos t - b^2 \sin t \cos t + 0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$$

Además, como $\|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = b$, podemos usar la fórmula alternativa para la componente normal:

$$a_N \sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - a_T^2} = \sqrt{b^2 - 0^2} = b$$

Hagamos notar que la componente normal es igual en magnitud a la aceleración. En otras palabras, puesto que la rapidez es constante, la aceleración es perpendicular a la velocidad (véase Figura 11.25). □

EJEMPLO 7 Movimiento de un proyectil

La función posición del proyectil de la Figura 11.26 viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = (50\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (50\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j} \quad \text{Vector posición}$$

Calcular la componente tangencial de la aceleración cuando $t = 0, 1$ y $25\sqrt{2}/16$.

$$\mathbf{v}(t) = 50\sqrt{2}\mathbf{i} + (50\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j} \quad \text{Vector velocidad}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = 2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2} \quad \text{Rapidez}$$

$$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j} \quad \text{Vector aceleración}$$

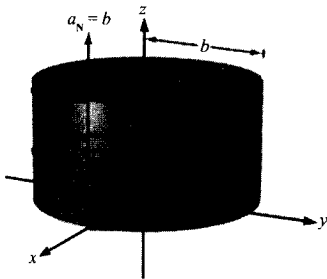


FIGURA 11.25

En esta parametrización, la componente normal de la aceleración es igual a la aceleración.

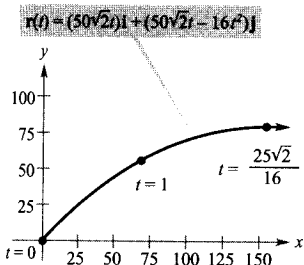


FIGURA 11.26

Trayectoria de un proyectil.

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32t)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2}}$$

En los instantes especificados, es

$$a_{\mathbf{T}}(0) = \frac{-32(50\sqrt{2})}{100} = -16\sqrt{2} \approx -22,6$$

$$a_{\mathbf{T}}(1) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2} + 16^2}} \approx -15,4$$


$$a_{\mathbf{T}}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 50\sqrt{2})}{50\sqrt{2}} = 0$$

Puede verse en la Figura 11.26 que en el momento de alcanzar la altura máxima, cuando $t = 25\sqrt{2}/16$, la componente tangencial es cero. Esto es razonable, ya que la dirección del movimiento es horizontal en ese punto y la componente tangencial de la aceleración es la componente horizontal. \square

Ejercicios de la Sección 11.4

En los Ejercicios 1-6, hallar el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ y unas ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva espacial en el punto P .

- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(0, 0, 0)$
- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $P(1, 1, \frac{2}{3})$
- $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(2, 0, 0)$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, \sqrt{4 - t^2} \rangle$, $P(1, 1, \sqrt{3})$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, 4 \rangle$, $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 2 \cos t, 4 \sin^2 t \rangle$, $P(1, \sqrt{3}, 1)$

 En los Ejercicios 7 y 8, representar en una calculadora la curva. A continuación, hallar $\mathbf{T}(t)$ y ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el punto P . Representar la recta tangente.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t^3/3 \rangle$, $P(3, 9, 18)$
- $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$, $P(0, 4, \pi/4)$

Aproximación lineal En los Ejercicios 9 y 10, determinar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$ y usarlas para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0,1)$.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, \sqrt{t} \rangle$, $t_0 = 1$
- $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, 2 \cos t, 2 \sin t \rangle$, $t_0 = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, verificar que las curvas se cortan en los valores de los parámetros indicados y calcular el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección.

- $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - 2, t^2, \frac{1}{2}t \right\rangle$, $t = 4$
 $\mathbf{u}(s) = \left\langle \frac{1}{4}s, 2s, \sqrt[3]{s} \right\rangle$, $s = 8$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, \sin t \rangle$, $t = 0$

$$\mathbf{u}(s) = \left\langle -\frac{1}{2} \sin^2 s - \sin s, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 s - \sin s, \frac{1}{2} \sin s \cos s + \frac{1}{2}s \right\rangle, s = 0$$

En los Ejercicios 13-16, hallar $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ para un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria determinada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Con esos resultados, describir la forma de la trayectoria. ¿Es constante la rapidez de ese objeto?

13. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i}$ 14. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$
 15. $\mathbf{r}(t) = 4t^2\mathbf{i}$ 16. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los Ejercicios 17-22, hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T , y a_N en el instante t indicado para la curva plana $\mathbf{r}(t)$.

17. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t = 1$
 18. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t = 1$
 19. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{2}$
 20. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + b \sin \omega t\mathbf{j}$, $t = 0$
 21. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \omega t + \omega t \sin \omega t, \sin \omega t - \omega t \cos \omega t \rangle$, $t = t_0$
 22. $\mathbf{r}(t) = \langle \omega t - \sin \omega t, 1 - \cos \omega t \rangle$, $t = t_0$

Movimiento circular En los Ejercicios 23-26, considera un objeto que se mueve de acuerdo con la función posición

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + a \sin \omega t\mathbf{j}$$

23. Hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T y a_N .
 24. Determinar las direcciones de \mathbf{T} y \mathbf{N} respecto de la función posición \mathbf{r} .
 25. Calcular la rapidez del objeto en todo instante t y explicar su valor en relación con el valor de a_T .
 26. Si se divide por dos la velocidad angular, ¿en qué factor cambia a_N ?

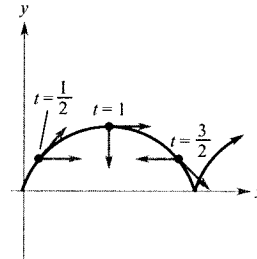
En los Ejercicios 27 y 28, dibujar la curva plana descrita por la función vectorial dada y esbozar los vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} en el punto $\mathbf{r}(t_0)$. Obsérvese que \mathbf{N} apunta hacia la concavidad de la curva.

Función	Tiempo
27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
28. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$	$t_0 = \frac{\pi}{4}$
29. Movimiento cicloidal La figura muestra la trayectoria de una partícula que sigue el modelo de la función vectorial	

$$\mathbf{r}(t) = \langle \pi t - \sin \pi t, 1 - \cos \pi t \rangle$$

Asimismo, la figura muestra los vectores $\mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)/\|\mathbf{a}(t)\|$ en los valores indicados de t .

- a) Hallar a_T y a_N para $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, y $t = \frac{3}{2}$
 b) Determinar si la rapidez de la partícula crece o decrece en cada uno de esos instantes. Justificar los resultados.

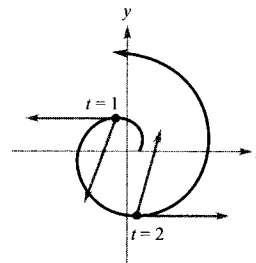


30. **Movimiento sobre una involuta de un círculo** La figura muestra la trayectoria de una partícula móvil sobre la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t + \pi t \sin \pi t, \sin \pi t - \pi t \cos \pi t \rangle$$

Muestra asimismo los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ para $t = 1$ y $t = 2$.

- a) Hallar a_T y a_N para $t = 1$ y $t = 2$.
 b) Determinar si la rapidez de la partícula crece o decrece en cada uno de esos instantes. Justificar las respuestas.



En los Ejercicios 31-34, calcular $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T , y a_N en el instante t que se especifica para la curva $\mathbf{r}(t)$.

Función	Tiempo
31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
32. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 2$
33. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 1$
34. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$	$t = 0$

- En los Ejercicios 35 y 36, representar la curva espacial en una calculadora y hallar a continuación $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T , a_N en el instante t que se indica. Dibujar $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ sobre la curva.

Función

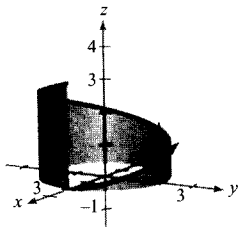
Tiempo

$$35. \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} + 3 \sin t\mathbf{k} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

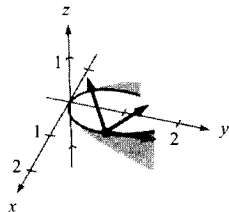
$$36. \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k} \quad t = 2$$

En los Ejercicios 37 y 38, hallar los vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} , y el vector binormal unitario $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ para la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el instante t indicado.

$$37. \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + \frac{t}{2}\mathbf{k} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$$



$$38. \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k} \quad t_0 = 1$$



39. **Control de tráfico aéreo** A causa de una tormenta, los controladores ordenan a un piloto, que vuela a una altitud de 4 millas, que efectúe un giro de 90° y se eleve hasta 4,2 millas. El modelo de su trayectoria durante la maniobra es

$$\mathbf{r}(t) = \langle 10 \cos 10\pi t, 10 \sin 10\pi t, 4 + 4t \rangle, 0 \leq t \leq \frac{1}{20}$$

donde el tiempo t se mide en horas y la distancia r en millas.

- Calcular la rapidez del avión.
 - Con ayuda de calculadora, hallar a_T y a_N . ¿Por qué una de ellas es nula?
40. **Movimiento de un proyectil** Se lanza un proyectil desde una altura de 5 pies, con una velocidad inicial de 100 pies/s y con un ángulo de elevación de 30° .
- Describir su trayectoria mediante una función vectorial.
 - Representar su trayectoria en una calculadora y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

- Calcular $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$, y $\mathbf{a}(t)$
- Completar la tabla con ayuda de calculadora.

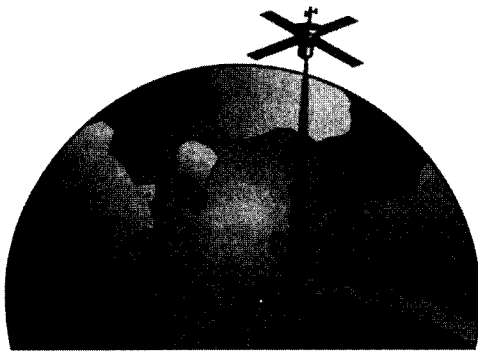
t	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Rapidez						

- Usar una calculadora para hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T , y a_N , y verificar que $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$.
 - Dibujar en la calculadora la gráfica de las funciones escalares a_T y a_N . ¿Cómo está cambiando la rapidez del proyectil cuando a_T y a_N tienen signos opuestos?
41. **Movimiento de un proyectil** Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración para un proyectil disparado con ángulo de elevación θ y velocidad inicial v_0 . ¿Cuál es el valor de esas componentes en el instante en el que alcanza la máxima altura?
42. **Movimiento de un proyectil** Un avión que vuela a 30.000 pies de altura y a 540 millas/h (792 pies/s), deja caer una bomba. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración de la bomba.
43. **Aceleración centrípeta** Un objeto está girando a velocidad constante, atado al extremo de una cuerda, siguiendo la función posición dada en los Ejercicios 23-26.
- Si se dobla la velocidad angular, ¿cómo cambia la aceleración centrípeta?
 - Si se mantiene la velocidad angular pero se divide por dos la longitud de la cuerda, ¿cómo cambia la aceleración centrípeta?
44. **Fuerza centrípeta** Un objeto de masa m se mueve con velocidad constante v por un círculo de radio r . La fuerza requerida para producir la componente centrípeta de la aceleración se llama la fuerza centrípeta y viene dada por $F = mv^2/r$. La ley de Newton afirma que $F = GMm/d^2$, donde d denota la distancia entre los centros de los dos cuerpos de masas M y m , y G es la constante de gravitación universal. Usar esa ley para probar que la rapidez exigida para producir el movimiento circular es $v = \sqrt{GM/r}$.

Velocidad orbital En los Ejercicios 45-48, calcular, usando el resultado del Ejercicio 44, la rapidez necesaria para la órbita circular dada en torno a la Tierra. Tomar $GM = 9,56 \times 10^4$ millas cúbicas/s², y un radio terrestre de 4.000 millas.

- La órbita de un módulo espacial que viaja a 100 millas de altura sobre la superficie terrestre.
- La órbita de un módulo espacial que viaja a 200 millas de altura sobre la superficie terrestre.

47. La órbita de un satélite de detección térmica (véase figura) que viaja a 385 millas de altura sobre la superficie de la Tierra.



48. La órbita de un satélite SYNCOM que está en órbita geosíncrona a r millas de altura sobre la superficie terrestre. [El satélite completa una órbita cada día sidéreo (23 horas y 56 minutos), de manera que aparenta permanecer estacionario encima de un punto de la Tierra.]

49. Demostrar que el vector normal principal \mathbf{N} apunta hacia la concavidad de una curva plana.

50. Probar que el vector $\mathbf{T}'(t)$ es nulo para un objeto que se mueve en línea recta.

51. Probar que $a_{\mathbf{N}} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$.

52. Probar que $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$.

- CONTENIDO ■
Longitud de arco ■
Parámetro longitud de arco ■
Curvatura ■
Aplicaciones ■



11.5

Longitud de arco y curvatura

Longitud de arco

En la Sección 9.3 vimos que la longitud de arco de una curva plana suave C de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

En forma vectorial, con C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, podemos reescribir esta expresión para la longitud de arco como

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

La fórmula para la longitud de arco de una curva plana admite extensión natural a curvas suaves en el *espacio*, como se establece en el próximo teorema.

EXPLORACIÓN

Fórmula para la longitud de arco La fórmula para la longitud de arco de una curva espacial viene dada en términos de las ecuaciones paramétricas que la describen. ¿Significa esto que la longitud de arco depende del parámetro elegido? ¿Sería deseable que fuera así? Explique su respuesta.

Una representación paramétrica de la curva del Ejemplo 1 es

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^4\mathbf{k}$$

Hallar la longitud de arco entre $t = 0$ y $t = \sqrt{2}$, y comparar el resultado con el del Ejemplo 1.

TEOREMA 11.6 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA EN EL ESPACIO

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en un intervalo $[a, b]$, la longitud de arco de C en ese intervalo es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

EJEMPLO 1 Longitud de arco de una curva en el espacio

Calcular la longitud de arco de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

entre $t = 0$ y $t = 2$ (Figura 11.27).

Solución: Teniendo en cuenta que $x(t) = t$, $y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}$, y $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, se obtiene $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t^{1/2}$, y $z'(t) = t$. Así pues, la longitud de arco entre $t = 0$ y $t = 2$ resulta ser

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3} dt && \text{Tablas de integración (véase apéndice), fórmula 26} \\ &= \left[\frac{t+2}{2} \sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2} \ln |(t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3}| \right]_0^2 \\ &= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2} \ln(4 + \sqrt{13}) - 1 + \frac{3}{2} \ln 3 \\ &\approx 4,816 \end{aligned}$$

□

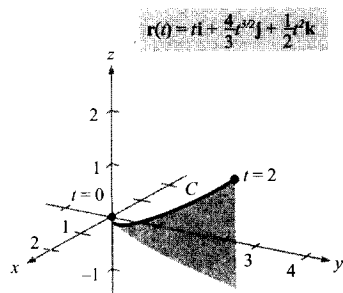


FIGURA 11.27

Cuando t crece de 0 a 2, el vector $\mathbf{r}(t)$ traza una curva cuya longitud es aproximadamente 4,816.

Curva:

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} t \mathbf{k}$$

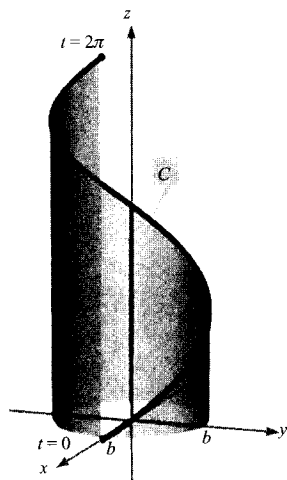


FIGURA 11.28

Un giro de una hélice.

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco de una hélice

Calcular la longitud de arco de un giro de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} t \mathbf{k}$$

que se muestra en la Figura 11.28.

Solución: Como $\mathbf{r}'(t) = -b \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} \mathbf{k}$, la longitud de arco pedida es

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + (1 - b^2)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

□

Parámetro longitud de arco

Ya sabemos que las curvas pueden representarse mediante funciones vectoriales de diversas maneras, según la elección del parámetro. Para el movimiento a lo largo de una curva, el parámetro más conveniente es el tiempo t . Sin embargo, cuando se desean estudiar las propiedades geométricas de las curvas, el parámetro más adecuado es el parámetro longitud de arco s .

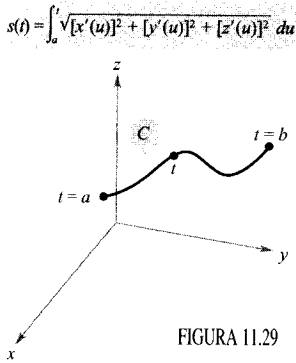


FIGURA 11.29

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LONGITUD DE ARCO

Sea C una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para $a \leq t \leq b$, la **función longitud de arco** viene dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du$$

La longitud de arco s se denomina **parámetro longitud de arco** (véase Figura 11.29).

| Nota. La función longitud de arco es *no negativa*. Mide la distancia sobre C desde el punto inicial $(x(a), y(a), z(a))$ al punto $(x(t), y(t), z(t))$.

De la definición de la función longitud de arco y del segundo teorema fundamental del Cálculo, podemos concluir que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Derivada de la función longitud de arco

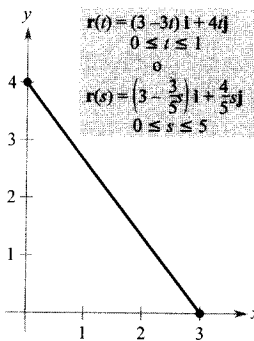


FIGURA 11.30

El segmento comprendido entre $(3, 0)$ y $(0, 4)$ puede parametrizarse utilizando el parámetro longitud de arco s .

En forma diferencial, esto se puede escribir

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

EJEMPLO 3 Función longitud de arco para una recta

Hallar la función longitud de arco $s(t)$ para el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

y expresar \mathbf{r} en función del parámetro s (véase Figura 11.30).

Solución: Como $\mathbf{r}'(t) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

se tiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\| \, du \\ &= \int_0^t 5 \, du \\ &= 5t \end{aligned}$$

Haciendo $s = 5t$ (o sea, $t = s/5$), podemos reescribir \mathbf{r} en términos del parámetro longitud de arco como sigue:

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \frac{4}{5}s\mathbf{j}, \quad 0 \leq s \leq 5 \quad \square$$

Una de las ventajas de expresar una función vectorial en términos del parámetro longitud de arco es que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. Así, en el Ejemplo 3,

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

Por consiguiente, para una curva suave C , representada por $\mathbf{r}(s)$, donde s denota el parámetro longitud de arco, la longitud de arco entre a y b es

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(s)\| \, ds \\ &= \int_a^b ds = b - a \\ &= \text{Longitud del intervalo} \end{aligned}$$

Más aún, si t es cualquier parámetro tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco. Estos resultados se resumen en el próximo teorema, cuya demostración omitimos.

TEOREMA 11.7 PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO

Si C es una curva suave dada por

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

donde s es el parámetro longitud de arco, entonces

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$$

Además, si t es cualquier parámetro para la función vectorial \mathbf{r} tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser necesariamente el parámetro longitud de arco.

Curvatura

Una aplicación importante del parámetro longitud de arco consiste en el cálculo de la **curvatura**, la medida de cuán rápidamente se comba una curva. Por ejemplo, en la Figura 11.31 la curva se comba más deprisa en P que en Q , y decimos que la curvatura es mayor en P que en Q . Se puede hallar la curvatura calculando la magnitud de la tasa de cambio del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ con respecto a s , como indica la Figura 11.32.

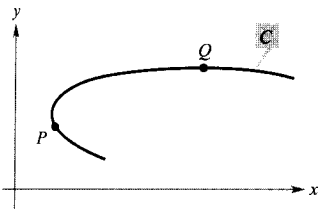


FIGURA 11.31
La curvatura es mayor en P que en Q .

DEFINICIÓN DE CURVATURA

Sea C una curva suave (en el plano o en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s denota el parámetro longitud de arco. Se define la **curvatura** de C en s como

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Un círculo tiene la misma curvatura en todos sus puntos y es igual al inverso del radio. Esto es, un círculo de radio grande tiene curvatura pequeña, mientras que un círculo de radio pequeño posee una gran curvatura. Esta relación inversa se pone de relieve en el próximo ejemplo.

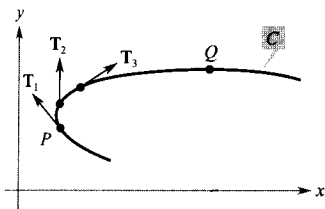


FIGURA 11.32
La magnitud de la tasa de cambio de \mathbf{T} con respecto a la longitud de arco es la curvatura.

EJEMPLO 4 Curvatura de un círculo

Demostrar que la curvatura de un círculo de radio r es $K = 1/r$.

Solución: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el círculo está centrado en el origen. Sea (x, y) un punto cualquiera del círculo y sea s la longitud del arco que va de $(r, 0)$ a (x, y) , como se indica en la Figura 11.33. Llamando θ al ángulo central, podemos representar el círculo por

$$\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{El parámetro es } \theta$$

Usando la fórmula $s = r\theta$ para la longitud de un arco circular, podemos reescribir $\mathbf{r}(\theta)$ en términos del parámetro longitud de arco como sigue:

$$\mathbf{r}(s) = r \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} + r \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \quad \text{El parámetro es la longitud de arco}$$

Así pues, $\mathbf{r}'(s) = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j}$, de donde se deduce $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$, lo cual implica que el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j}$$

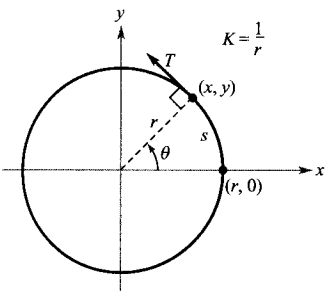


FIGURA 11.33
La curvatura de un círculo es constante.

y la curvatura viene dada por

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \frac{s}{r} \mathbf{j} \right\| = \frac{1}{r}$$

en todos los puntos del círculo. □

| Nota. Puesto que una recta no se comba, su curvatura debe ser 0. Intente comprobarlo calculando la curvatura de la recta dada por

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s \right) \mathbf{i} + \frac{4}{5}s \mathbf{j}$$

En el Ejemplo 4 hemos calculado la curvatura partiendo directamente de su definición. Eso requiere que la curva venga dada en términos del parámetro longitud de arco. El próximo teorema proporciona otras dos fórmulas que permiten el cálculo de la curvatura cuando la curva está expresada en un parámetro arbitrario t . Dejamos su demostración como ejercicio [véase Ejercicio 76, partes a) y b)].

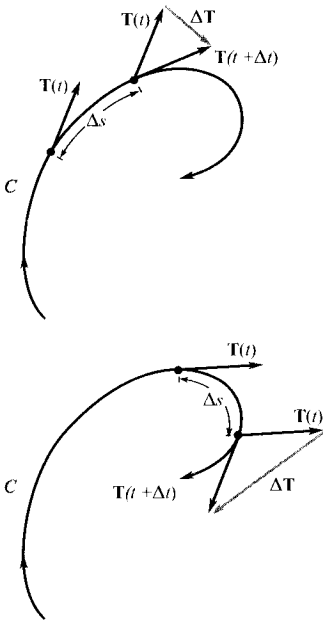


FIGURA 11.34

TEOREMA 11.8 FÓRMULAS PARA LA CURVATURA

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, la curvatura de C en t viene dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Puesto que $\|\mathbf{r}'(t)\| = ds/dt$, la primera fórmula implica que la curvatura es el cociente entre la tasa de cambio del vector tangente \mathbf{T} y la de la longitud de arco. Con el fin de comprender que tal relación es razonable, sea Δt un número muy pequeño. Entonces

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{ds/dt} \approx \frac{[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)]/\Delta t}{[s(t + \Delta t) - s(t)]/\Delta t} = \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s}$$

En otras palabras, para un Δs dado, cuanto mayor es la longitud de $\Delta \mathbf{T}$ tanto más se comba la curva en t , como corrobora la Figura 11.34.

EJEMPLO 5 Cálculo de la curvatura de una curva en el espacio

Hallar la curvatura de la curva definida por $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$

Solución: No se sabe a simple vista si este parámetro es la longitud de arco, así que debemos usar la fórmula $K = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2 \quad \text{Longitud de } \mathbf{r}'(t)$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{(t^2 + 2)(2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) - (2t)(2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-4t\mathbf{i} + (4 - 2t^2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16t^2 + 16 - 16t^2 + 4t^4 + 16t^2}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2}{t^2 + 2}$$

Longitud de $\mathbf{T}'(t)$

Por tanto

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2}{(t^2 + 2)^2} \quad \text{Curvatura} \quad \square$$

El siguiente teorema presenta una fórmula de cálculo para la curvatura de una curva plana dada por $y = f(x)$.

TEOREMA 11.9 CURVATURA EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si C es la gráfica de una función $y = f(x)$, dos veces derivable, su curvatura en un punto (x, y) viene dada por

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Demostración: Representando la curva por $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, con x como parámetro, obtenemos $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$, la curvatura es

$$K = \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} = \frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad \square$$

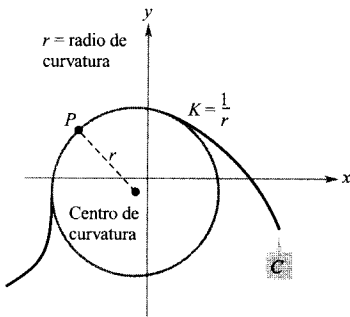


FIGURA 11.35
El círculo de curvatura.

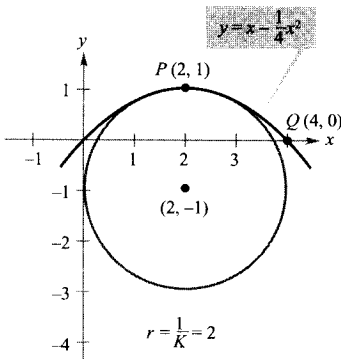


FIGURA 11.36
El círculo de curvatura.

Sea C una curva con curvatura K en un punto P . El círculo que pasa por P con radio $r = 1/K$ se llama el **círculo de curvatura** si el centro del círculo está en la concavidad de la curva y tiene una recta tangente común con la curva en el punto P . El radio de dicho círculo se denomina **radio de curvatura** en P y su centro se llama el **centro de curvatura**.

El círculo de curvatura permite estimar gráficamente la curvatura K en un punto P . Usando un compás, se traza un círculo que se adapte a la curva en P por el lado cóncavo, como indica la Figura 11.35. Si ese círculo tiene radio r , cabe estimar la curvatura como $K = 1/r$.

EJEMPLO 6 Cálculo de la curvatura en coordenadas rectangulares

Calcular la curvatura de la parábola $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$ y hacer un esbozo de su círculo de curvatura en el punto $(2, 1)$.

Solución: Hallamos la curvatura en $x = 2$ como sigue:

$$y' = 1 - \frac{x}{2} \qquad y' = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \qquad y'' = -\frac{1}{2}$$

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \qquad K = \frac{1}{2}$$

Al ser la curvatura en $P(2, 1)$ igual a $1/2$, el radio del círculo de curvatura en ese punto es 2. Por tanto, el centro de curvatura es $(2, -1)$, como ilustra la Figura 11.36. [Observe en la figura que la curva tiene su máxima curvatura en P . Intente demostrar que la curvatura en $Q(4, 0)$ es $1/2^{5/2} \approx 0,177$.] □

La longitud de arco y la curvatura están estrechamente relacionadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración. La componente tangencial es la tasa de cambio de la rapidez, que es a su vez la tasa de cambio de la longitud de arco. Esta componente es negativa cuando un móvil frena y positiva cuando acelera, independientemente de que se mueva por una recta o esté girando. En consecuencia, la componente tangencial de la aceleración es sólo función de la longitud de arco y es independiente de la curvatura.

Por su parte, la componente normal de la aceleración es función de ambas, de la rapidez y de la curvatura. Esta componente mide la aceleración perpendicular a la dirección del movimiento. Para ver cómo le afectan la rapidez y la curvatura, imagine que conduce un automóvil por una curva como la de la Figura 11.37. Si su velocidad es alta y la curva muy cerrada, se sentirá empujado hacia la puerta del vehículo. A menor velocidad, o tomando una curva más suave, se reducirá ese efecto de empuje lateral.

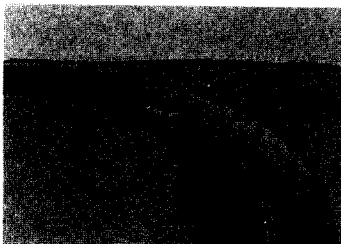


FIGURA 11.37
El empuje lateral que sufren los pasajeros de un automóvil que está tomando una curva depende de dos factores: la rapidez del automóvil y la curvatura del trazado de la carretera.

El próximo teorema enuncia explícitamente la relación entre la rapidez, la curvatura y las componentes de la aceleración.

TEOREMA 11.10 ACCELERACIÓN, RAPIDEZ Y CURVATURA

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C , el vector aceleración viene dado por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

donde K es la curvatura de C y ds/dt su rapidez.

| Nota. El Teorema 11.10 proporciona fórmulas alternativas para a_T y a_N .

Demostración: Basta efectuar un sencillo cálculo, a saber

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} = D_t[\|\mathbf{v}\|] \mathbf{T} + \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| \mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} (\|\mathbf{v}\| K) \mathbf{N} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N} \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Calcular a_T y a_N para la curva determinada por $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$

Solución: Por el Ejemplo 5 sabemos que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = t^2 + 2 \quad \text{y} \quad K = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}$$

Por tanto

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t \quad \text{Componente tangencial}$$

y

$$a_N = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{2}{(t^2 + 2)^2} (t^2 + 2)^2 = 2 \quad \text{Componente normal} \quad \square$$

Aplicaciones

Las relaciones entre rapidez, longitud de arco y aceleración hacen acto de presencia en muchos problemas prácticos de Física y de Ingeniería, en particular cuando actúa una fuerza de rozamiento.

Supongamos un móvil de masa m en contacto con un objeto estacionario. La fuerza total requerida para producir una aceleración \mathbf{a} a lo largo de una cierta trayectoria es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = m\mathbf{a} &= m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\mathbf{T} + mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N} \\ &= ma_T\mathbf{T} + ma_N\mathbf{N}\end{aligned}$$

La porción de esta fuerza que es ejercida por el objeto en reposo se llama **fuerza de rozamiento** (o de fricción). Así, si un automóvil toma una curva a velocidad constante, la carretera ejerce una fuerza de rozamiento que impide que el automóvil salga de ella. Si el coche no desliza, la fuerza de rozamiento es perpendicular a la dirección del movimiento y su magnitud es igual a la componente normal de la aceleración (Figura 11.38). La fuerza de rozamiento en una curva puede aumentarse peraltando la carretera.

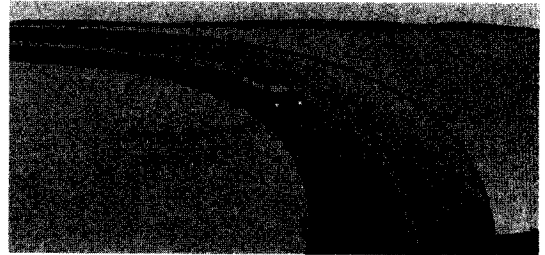


FIGURA 11.38

La fuerza de rozamiento es perpendicular a la dirección del movimiento.

EJEMPLO 8 Fuerza de rozamiento

Un kart de 360 kg viaja a 60 km/h por una pista circular de 12 metros de radio. ¿Qué fuerza de rozamiento hace falta para impedir que deslice? (véase Figura 11.39).

Solución: La fuerza de rozamiento ha de ser igual a la masa por la aceleración normal. Para esa pista circular sabemos que la curvatura es

$$K = \frac{1}{12} \quad \text{Curvatura de la pista}$$

En consecuencia, la fuerza de rozamiento ha de ser

$$\begin{aligned}ma_N &= mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &= (360 \text{ kg})\left(\frac{1}{12 \text{ m}}\right)\left(\frac{60.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}}\right)^2 \\ &\approx 8.333 \text{ (kg)(m)/s}^2\end{aligned}$$

□

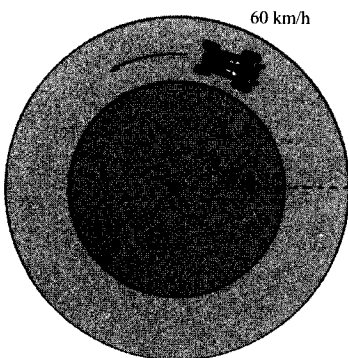


FIGURA 11.39

Resumen sobre velocidad, aceleración y curvatura

Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Curva en el plano}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{Curva en el espacio}$$

Vector velocidad, rapidez y vector aceleración:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_T\mathbf{T}(t) + a_N\mathbf{N}(t)$$

Vector tangente unitario y vector normal principal unitario:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Componentes de la aceleración:

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a_N = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

Fórmulas para la curvatura en el plano:

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad C \text{ dada por } y = f(x)$$

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad C \text{ viene dada por } x = x(t), y = y(t)$$

Fórmulas para la curvatura en el plano o en el espacio:

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \quad s \text{ es el parámetro longitud de arco}$$

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad t \text{ es un parámetro arbitrario}$$

$$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

Las fórmulas con productos vectoriales se aplican sólo a curvas en el espacio.

Ejercicios de la Sección 11.5

En los Ejercicios 1-4, dibujar la curva plana y calcular su longitud en el intervalo que se indica.

<i>Función</i>	<i>Intervalo</i>
1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$	[0, 4]
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$	[0, 4]
3. $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j}$	[0, 2\pi]
4. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j}$	[0, 2\pi]

En los Ejercicios 5-8, dibujar la curva espacial y calcular su longitud en el intervalo propuesto.

<i>Función</i>	<i>Intervalo</i>
5. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$	[0, 2]
6. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle$	[0, \pi/2]
7. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$	[0, 2\pi]
8. $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, t^2 \rangle$	[0, \pi/2]

En los Ejercicios 9 y 10, usar integración en la calculadora para estimar la longitud de la curva en el intervalo especificado.

Función	Intervalo
---------	-----------

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$ $1 \leq t \leq 3$

10. $\mathbf{r}(t) = \sin \pi t\mathbf{i} + \cos \pi t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ $0 \leq t \leq 2$

11. **Investigación** Consideremos la gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el intervalo $[0, 2]$.

a) Estimar su longitud mediante la del segmento de recta que une sus puntos terminales.

b) Aproximar la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos rectos que unen los puntos finales de los vectores $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(0,5)$, $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1,5)$, y $\mathbf{r}(2)$.

c) Describir cómo se podría obtener una estimación más precisa continuando los procesos de los apartados a) y b).

d) Usar integración en la calculadora para estimar la longitud de esa curva. Comparar el resultado con los de los apartados a) y b).

12. **Investigación** Repetir el Ejercicio 11 para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos(\pi t/4)\mathbf{i} + 2 \sin(\pi t/4)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

13. **Investigación** Consideremos la hélice dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, t \rangle$.

a) Expresar la longitud de arco s sobre la hélice como función de t , evaluando la integral

$$s = \int_0^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du$$

b) Despejar t y sustituir el resultado en las ecuaciones paramétricas originales. Así se obtiene una parametrización de la curva con parámetro longitud de arco s .

c) Calcular las coordenadas de los puntos de la hélice correspondientes a $s = \sqrt{5}$ y $s = 4$.

d) Comprobar que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

14. **Investigación** Repetir el Ejercicio 13 para la curva dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 4(\sin t - t \cos t), 4(\cos t + t \sin t), \frac{3}{2}t^2 \rangle$$

En los Ejercicios 15-18, calcular la curvatura K de la curva, siendo s el parámetro longitud de arco.

15. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{r}(s) = (3 + s)\mathbf{i} + \mathbf{j}$

17. La hélice del Ejercicio 13.

18. La curva del Ejercicio 14.

En los Ejercicios 19-22, calcular la curvatura K de la curva plana en el valor indicado del parámetro.

19. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$, $t = 1$ 20. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t = 0$

21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t = 1$ 22. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t = 1$

En los Ejercicios 23-34, hallar la curvatura K de la curva.

23. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos 2\pi t\mathbf{i} + 4 \sin 2\pi t\mathbf{j}$

24. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + \sin \pi t\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + a \sin \omega t\mathbf{j}$

26. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + b \sin \omega t\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = \langle a(\omega t - \sin \omega t), a(1 - \cos \omega t) \rangle$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \omega t + \omega t \sin \omega t, \sin \omega t - \omega t \cos \omega t \rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$

32. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$

33. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} + 3 \sin t\mathbf{k}$

34. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

En los Ejercicios 35-40, calcular la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor de x propuesto.

Función	Punto
---------	-------

35. $y = 3x - 2$ $x = a$

36. $y = mx + b$ $x = a$

37. $y = 2x^2 + 3$ $x = -1$

38. $y = x + \frac{1}{x}$ $x = 1$

39. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $x = 0$

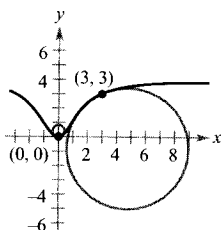
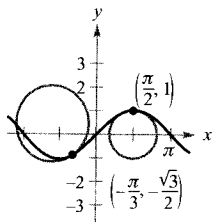
40. $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ $x = 0$

Redacción En los Ejercicios 41 y 42, se dan dos círculos de curvatura de la gráfica de una función. a) Hallar la ecuación

ción del menor de ellos, y *b*) escribir unas líneas comentando por qué los dos círculos tienen radios distintos.

41. $f(x) = \sin x$

42. $f(x) = 4x^2/(x^2 + 3)$



En los Ejercicios 43-46, representar en una misma pantalla de una calculadora la función y el círculo de curvatura en el valor indicado de x .

43. $y = x + \frac{1}{x}, x = 1$

44. $y = \ln x, x = 1$

45. $y = e^x, x = 0$

46. $y = \frac{1}{3}x^3, x = 1$

En los Ejercicios 47-50, *a*) hallar el punto de la curva en el que la curvatura K es máxima y *b*) calcular el límite de K cuando $x \rightarrow \infty$.

47. $y = (x - 1)^2 + 3$

48. $y = x^3$

49. $y = x^{2/3}$

50. $y = \ln x$

51. Hallar todos los puntos de la gráfica de

$$y = (x - 1)^3 + 3$$

en los que la curvatura es 0.

52. **Redacción** Usando el resultado del Ejercicio 51, redactar unas líneas describiendo los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ en los que la curvatura es 0.

53. Demostrar que la curvatura de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es máxima en los extremos del eje mayor y mínima en los extremos del eje menor.

54. Verificar que la curvatura de la gráfica de $y = \cosh x$ en cualquier punto (x, y) es y^2 .

55. **Investigación** Consideremos la función $f(x) = x^4 - x^2$

a) Expresar la curvatura K de la curva en función de x .

b) Usar ese resultado para calcular el círculo de curvatura de la gráfica de f en $x = 0$ y en $x = 1$. Representar en la calculadora la gráfica y los dos círculos de curvatura.

c) Representar $K(x)$ y compararla con la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, ¿ocurren en los mismos puntos

críticos los extremos de f y de K ? Explicar la respuesta.

56. **Investigación** La superficie de una copa se ha generado haciendo girar la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{4}x^{8/5}, 0 \leq x \leq 5$$

en torno al eje y . Las medidas se dan en centímetros.

a) Representar la superficie en una calculadora.

b) Calcular el volumen de la copa.

c) Calcular la curvatura K de la curva generatriz en función de x . Usar la calculadora para representar K .

d) Si se introduce un objeto esférico en la copa, ¿puede tocar el fondo? Justifique la respuesta.

57. Se introduce una esfera de radio 4 en el paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$.

a) ¿A qué distancia quedará la esfera del vértice del paraboloides?

b) ¿Cuál es el radio máximo de una esfera que llegue a tocar el vértice?

58. **Investigación** Determinar a y b de manera tal que las curvas

$$y_1 = ax(b - x) \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{x}{x + 2}$$

se corten en un único punto con recta tangente común y con la misma curvatura en ese punto. Dibujar la gráfica para los valores de a y b encontrados.

59. **Para pensar** Dada una función $y = f(x)$, dos veces derivable, hallar su curvatura en un extremo relativo. ¿Puede haber valores de la curvatura mayores que los que alcanza en un extremo relativo? ¿Por qué?

60. **Rapidez** Cuanto menor es la curvatura en un giro de la carretera, a mayor velocidad pueden recorrerla los automóviles. Supongamos que la velocidad máxima en una curva es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura. Un automóvil que viaja por la trayectoria

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

(x, y) medidos en millas) puede ir hasta a 30 millas/h en el punto $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. ¿A qué velocidad puede ir en el punto

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)?$$

61. Sea C dada por $y = f(x)$. Probar que el centro de curvatura de C en (x, y) es $(x_0, y_0) = (x - y'z, y + z)$, donde

$$z = \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

Hallar el centro de curvatura para $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

62. Una curva viene dada por la ecuación polar $r = f(\theta)$. Demostrar que su curvatura K en el punto (r, θ) es

$$K = \frac{|2(r')^2 - rr'' + r^2|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}$$

[Ayuda: Parametrizar la curva como $\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$.]

En los Ejercicios 63-66, usar el resultado del Ejercicio 62 para calcular la curvatura de la curva polar propuesta.

63. $r = 1 + \sin \theta$ 64. $r = \theta$
 65. $r = a \sin \theta$ 66. $r = e^\theta$
67. Dada la curva polar $r = e^{a\theta}$, $a > 0$, calcular su curvatura K y el límite de K cuando a) $\theta \rightarrow \infty$ y b) $a \rightarrow \infty$.
68. Probar que la fórmula para la curvatura de una curva polar $r = f(\theta)$ del Ejercicio 62 se reduce a

$$K = 2/|r'|$$

para la curvatura en el polo.

En los Ejercicios 69 y 70, usar el resultado del Ejercicio 68 para calcular la curvatura de la curva rosa en el polo.

69. $r = 4 \sin 2\theta$
 70. $r = 6 \cos 3\theta$
71. Para una curva suave definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, demostrar que la curvatura viene dada por

$$K = \frac{|f''(t)g'(t) - g''(t)f'(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}}$$

72. Usar el resultado del Ejercicio 71 para calcular la curvatura K de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x(t) = t^3$ e $y(t) = \frac{1}{2}t^2$. Representar K en una calculadora y hallar las asíntotas horizontales. Interpretar las asíntotas en el contexto de este ejercicio.
73. Usar el resultado del Ejercicio 71 para calcular la curvatura K de la cicloide

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \quad \text{e} \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta)$$

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de K ?

74. Usar el Teorema 11.10 para hallar a_T y a_N para cada una de las curvas determinadas por
- a) $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j}$
 b) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

75. **Fuerza de rozamiento** Un vehículo de 4.000 libras viaja a 30 millas/h por un cambio de sentido de radio 100 pies. Con el fin de evitar que deslice, ¿qué fuerza de rozamiento ha de ejercer sobre él la carretera?
76. Verificar, mediante la definición de curvatura en el espacio $K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(t)\|$, las tres fórmulas siguientes.

a) $K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$
 b) $K = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$
 c) $K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$

Leyes de Kepler En los Ejercicios 77-84, se pide verificar la ley de Kepler del movimiento de los planetas. En estos ejercicios, suponemos que cada planeta se mueve en una órbita dada por la función vectorial \mathbf{r} . Sean $\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|$, G la constante de gravitación universal, M la masa del Sol y m la masa del planeta.

77. Demostrar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r \frac{dr}{dt}$

78. Usando la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y la ley newtoniana de la gravitación, $\mathbf{F} = -(GmM/r^3)\mathbf{r}$, probar que \mathbf{a} y \mathbf{r} son paralelos, y que

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{L}$$

es un vector constante. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ se mueve en un plano fijo, ortogonal a \mathbf{L} .

79. Demostrar que $\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{1}{r^3} \{[\mathbf{r} \times \mathbf{r}'] \times \mathbf{r}\}$

80. Demostrar que

$$\frac{\mathbf{r}'}{GM} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}$$

es un vector constante.

81. Demostrar la primera ley de Kepler: cada planeta describe una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos.

82. Sea la órbita elíptica

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

en el plano xy , con \mathbf{L} en el eje z . Probar que

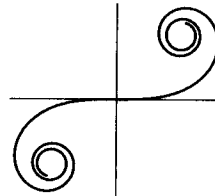
$$\|\mathbf{L}\| = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

83. Demostrar la segunda ley de Kepler: un rayo trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
84. Demostrar la tercera ley de Kepler: el cuadrado del período de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.
85. **Espiral de Cornu** La espiral de Cornu viene dada por

$$x = \int_0^s \cos \frac{\pi u^2}{2} du \quad \text{e} \quad y = \int_0^s \sin \frac{\pi u^2}{2} du$$

La figura muestra su aspecto en el intervalo $-\pi \leq s \leq \pi$.

- a) Calcular su longitud de arco entre $s = 0$ y $s = a$.
- b) Calcular su curvatura en $s = a$.
- c) Esta espiral fue descubierta por Jacques Bernoulli, quien se dio cuenta de que en ella se produce una sorprendente relación entre curvatura y la longitud de arco. ¿Cuál es esa relación?



Creado con Mathematica

Ejercicios de repaso del Capítulo 11

En los Ejercicios 1-4, hallar *a*) el dominio de \mathbf{r} , y *b*) los valores (si los hay) de t en los que la función es continua.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \operatorname{cosec} t\mathbf{k}$ 2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{1}{t-4}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ 4. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los Ejercicios 5 y 6, evaluar (si es posible) la función vectorial en el punto indicado.

5. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$
 a) $\mathbf{r}(0)$ b) $\mathbf{r}(-2)$ c) $\mathbf{r}(c-1)$ d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$
6. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$
 a) $\mathbf{r}(0)$ b) $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\mathbf{r}(s-\pi)$ d) $\mathbf{r}(\pi+\Delta t) - \mathbf{r}(\pi)$

Para pensar En los Ejercicios 7 y 8, hallar $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. El resultado, ¿es una función vectorial?

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{g} t\mathbf{i} - \sec t\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$
 $\mathbf{u}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t \cos t\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{-t}, 2 \rangle$, $\mathbf{u}(t) = \langle 4e^{-t}, 2, t \rangle$

En los Ejercicios 9 y 10, dibujar la curva plana representada por la función vectorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, 2 \sin^2 t \rangle$ 10. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t/(t-1) \rangle$

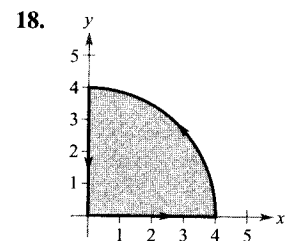
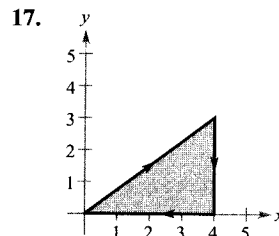
En los Ejercicios 11-14, representar en una calculadora la curva espacial correspondiente a la función vectorial propuesta.

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ 12. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \sin t, 1 \rangle$ 14. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, t, 2 \sin t \rangle$

En los Ejercicios 15 y 16, representar en la calculadora la curva dada por la función vectorial.

15. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \ln t, \frac{1}{2}t^2 \right\rangle$ 16. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2}t, \sqrt{t}, \frac{1}{4}t^3 \right\rangle$

En los Ejercicios 17 y 18, hallar funciones vectoriales que describan la frontera de la región de la figura.



19. Una partícula se mueve sobre un segmento recto que pasa por los puntos $(-2, -3, 8)$ y $(5, 1, -2)$. Hallar una función vectorial para esa trayectoria (hay muchas respuestas correctas).

20. El borde exterior de una escalera de caracol tiene forma de hélice de 2 metros de radio, una altura de 2 metros y da $3/4$ de vuelta desde abajo hasta arriba. Hallar una función vectorial para esa hélice (hay muchas respuestas correctas).

En los Ejercicios 21 y 22, dibujar la curva intersección de las dos superficies. Usar $x = t$ como parámetro para escribir una función vectorial para la curva.

21. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$

22. $x^2 + z^2 = 4 \quad x - y = 0$

En los Ejercicios 23 y 24, hallar el límite.

23. $\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 \mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2} \mathbf{j} + \mathbf{k})$

24. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2t}{t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \right)$

En los Ejercicios 25 y 26, calcular

- a) $\mathbf{r}'(t)$ b) $\mathbf{r}''(t)$ c) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$
 d) $D_t[\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{r}(t)]$ e) $D_t[|\mathbf{r}(t)|], t > 0$
 f) $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$

25. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, \mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \mathbf{u}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$

En los Ejercicios 27 y 28, hallar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva espacial en el punto que se especifica.

27. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, t = \frac{3\pi}{4}$

28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}, t = 2$

29. **Redacción** Las componentes x e y de la derivada de la función vectorial \mathbf{u} son positivas en $t = t_0$, y la componente z es negativa. Describir el comportamiento de \mathbf{u} en $t = t_0$.
30. **Redacción** La componente x de la derivada de la función vectorial \mathbf{u} es 0 para todo t en su dominio. ¿Qué implica esta información sobre la gráfica de \mathbf{u} ?

Aproximación lineal En los Ejercicios 31 y 32, hallar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica de

la función vectorial en $t = t_0$. Usar esas ecuaciones para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0,1)$.

31. $\mathbf{r}(t) = \ln(t - 3)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}, t_0 = 4$

32. $\mathbf{r}(t) = 3 \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}, t_0 = 0$

En los Ejercicios 33-36, evaluar la integral indefinida.

33. $\int (\cos t\mathbf{i} + t \cos t\mathbf{j}) dt$

34. $\int (\ln t\mathbf{i} + t \ln t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$

35. $\int \|\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\| dt$

36. $\int (t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}) dt$

En los Ejercicios 37 y 38, hallar $\mathbf{r}(t)$ con la condición impuesta.

37. $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}'(t) = \sec t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{k}$

En los Ejercicios 39 y 40, calcular la integral definida.

39. $\int_{-2}^2 (3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}) dt$ 40. $\int_0^1 (\sqrt{t}\mathbf{j} + t \sin t\mathbf{k}) dt$

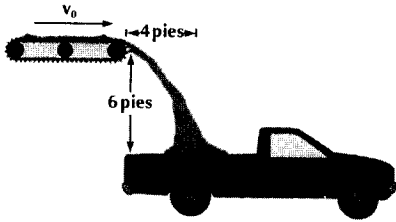
En los Ejercicios 41 y 42, la función posición describe la trayectoria de un objeto que se mueve por el espacio. Calcular su velocidad, su rapidez y su aceleración.

41. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \sin^3 t, 3t \rangle$ 42. $\mathbf{r}(t) = \langle t, -\tan t, e^t \rangle$

Movimiento de un proyectil En los Ejercicios 43-46, usar el modelo para la descripción del movimiento de proyectiles, despreciando la resistencia del aire, $[a(t) = -32 \text{ pies/s}^2 \text{ o } a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2]$.

43. Se lanza un proyectil desde el suelo con ángulo de elevación 30° . Calcular su alcance si la velocidad inicial es 75 pies/s.

44. Una cinta mecánica está descargando arena en un camión, desde una altura de 6 pies por encima del nivel de la caja del camión (véase figura en la página siguiente). Determinar la rapidez ds/dt con que debe moverse la cinta para que la arena caiga en el centro de la caja del camión, que dista horizontalmente 4 pies del extremo de la cinta.



45. Si se lanza un proyectil desde el suelo, con ángulo de elevación de 20° , ¿cuál debe ser su velocidad inicial para que el disparo alcance 80 metros de distancia horizontal?

46. Representar en una calculadora las trayectorias de un proyectil si $v_0 = 20$ m/s y
 a) $\theta = 30^\circ$, b) $\theta = 45^\circ$, y c) $\theta = 60^\circ$

Usar esas gráficas para estimar la altura máxima y el alcance del proyectil en cada caso.

En los Ejercicios 47-54, calcular la velocidad, rapidez y aceleración en el instante t . A continuación, calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ y la curvatura en el instante t .

47. $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i}$ 48. $\mathbf{r}(t) = (1 + 4t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j}$

49. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$ 50. $\mathbf{r}(t) = 2(t + 1)\mathbf{i} + \frac{2}{t + 1}\mathbf{j}$

51. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ 52. $\mathbf{r}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j}$

53. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ 54. $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$

En los Ejercicios 55 y 56, utilizar integración en la calculadora para hallar la longitud de la curva espacial en el intervalo que se indica.

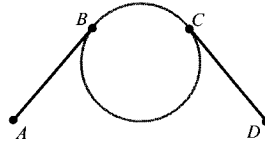
55. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

56. $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

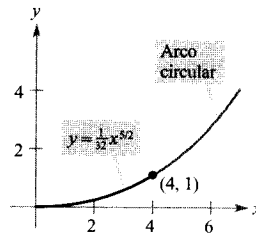
57. **Órbita de un satélite** Calcular la velocidad necesaria para que un satélite mantenga una órbita circular a 600 millas de altura sobre la superficie terrestre.

58. **Fuerza centrípeta** Un automóvil circula por una curva a velocidad doble de la permitida. ¿Por qué factor queda multiplicada la fuerza centrípeta?

59. **Redacción** Un ingeniero diseña una carretera como la indicada en la figura. BC es un arco de círculo. AB y CD son rectas tangentes al círculo. Criticar el diseño.



60. **Redacción** Una autopista tiene una rampa de salida que empieza en el origen de coordenadas y sigue la curva $y = \frac{1}{32}x^{5/2}$ hasta el punto $(4, 1)$ (véase figura). Continúa con un arco circular cuyo radio de curvatura en $(4, 1)$ viene dado por el de la curva. ¿Cuál es el radio del arco circular? Explicar por qué la curva y el arco circular deben tener la misma curvatura en $(4, 1)$.



61. **Investigación** Consideremos la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos \pi t, t \sin \pi t \rangle$, $0 \leq t \leq 2$.

- Representar la función con ayuda de una calculadora.
- Calcular la longitud del arco del apartado a).
- Expresar la curvatura K en función de t . Calcular K cuando t es 0, 1 y 2.
- Representar la función K con ayuda de una calculadora.
- Calcular (si es posible) $\lim_{t \rightarrow \infty} K$.
- Usando el resultado de e), enunciar una conjetura acerca de la gráfica de \mathbf{r} para $t \rightarrow \infty$.

Capítulo 12

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

Las antiguas antenas receptoras de satélites tenían un diámetro de 10 pies. Los suscriptores de emisiones vía satélite pueden captar dichas emisiones en la actualidad mediante antenas de pie y medio de diámetro.

Antenas receptoras de satélites

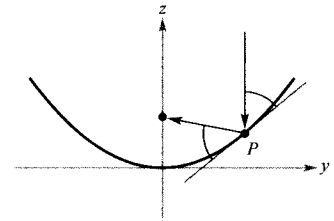
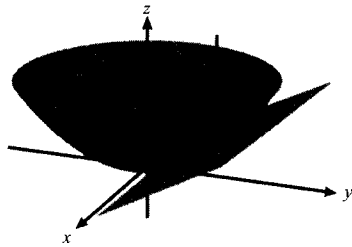
A partir de 1970, los tamaños de las antenas receptoras de satélites han evolucionado, pasando de modelos grandes y difíciles de manejar a otros mucho más pequeños, sencillos de acoplar en techos o en diversos objetos estáticos. No obstante, la forma de las antenas ha permanecido invariable. Todas tienen forma de paraboloides circular, una forma que permite captar señales cuya intensidad es de apenas unas milmillonésimas de vatio.

Un modelo de paraboloides circular se obtiene modificando la fórmula del paraboloides elíptico descrita en la Sección 10.6.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \quad \text{Paraboloides circular}$$

En este modelo, el paraboloides tiene su concavidad hacia arriba y su vértice en el origen. En una antena, el eje debe pasar por la posición del satélite que se desea captar, de tal manera que las señales sean paralelas al eje del paraboloides. Cuando esos rayos incidan en la superficie de la antena en cualquier punto P , se reflejarán como si la reflexión se produjera en el plano tangente a la superficie en P , como indica la primera de las figuras de la página siguiente.

Todas las parábolas poseen una propiedad de reflexión especial: todos los rayos incidentes paralelos al eje de la parábola se reflejan hacia el foco de la parábola, como se ve en la segunda figura de la página siguiente.



CUESTIONES

1. Si está diseñando una antena receptora de un satélite, ¿en qué punto debe colocar el receptor? Explique su razonamiento.
2. Aparte de las antenas receptoras, ¿qué otros objetos de uso común utilizan en su diseño la propiedad reflectora de las parábolas?
3. Consideremos el paraboloides circular de ecuación

$$z = x^2 + y^2$$

y el punto $P(1, 1, 2)$ en él. Se puede caracterizar el plano tangente a esa superficie en P diciendo que es el único plano cuya intersección con el paraboloides consta de un único punto, el punto P . Halle una ecuación para el plano tangente. Explique cómo lo ha encontrado.

4. ¿Tiene sentido hablar de la «pendiente» del plano tangente de la cuestión anterior? Si es así, ¿cuál es la pendiente de ese plano? ¿Cómo se puede utilizar la derivación para calcular la pendiente de ese plano?

Funciones de varias variables



12.1

Introducción a las funciones de varias variables

- CONTENIDO ▀
- Funciones de varias variables ▀
- La gráfica de una función de dos variables ▀
- Curvas de nivel ▀
- Superficies de nivel ▀
- Gráficas en una calculadora ▀

Funciones de varias variables

Hasta ahora hemos manejado sólo funciones de una variable independiente. Sin embargo, muchos problemas comunes vienen planteados en términos de funciones de dos o más variables. Así, por ejemplo, el trabajo efectuado por una fuerza ($W = FD$) y el volumen de un cilindro circular recto ($V = \pi r^2 h$) son funciones de dos variables. El volumen de un sólido rectangular ($V = lwh$) es una función de tres variables. La notación para las funciones de dos o tres variables es similar a la utilizada para funciones de una sola variable. Sirvan como ejemplos

$$z = f(x, y) = x^2 + xy$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$
 2 variables

y

$$w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$
 3 variables

EXPLORACIÓN

Comparación de dimensiones

Sin dibujar sus gráficas en una calculadora, describir las gráficas de estas funciones de dos variables.

- a) $z = x^2 + y^2$
- b) $z = x + y$
- c) $z = x^2 + y$
- d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- e) $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) en D le corresponde un único número real $f(x, y)$, se dice que f es **función de x e y** . El conjunto D es el **dominio** de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el **recorrido** de f .



MARY FAIRFAX SOMERVILLE (1780-1872)

Somerville se interesó por la creación de modelos geométricos para funciones de varias variables. Su libro más conocido, *The Mechanics of the Heavens*, se publicó en 1831.

Para la función $z = f(x, y)$ llamamos **variables independientes** a x e y , y **variable dependiente** a z .

Definiciones análogas se aplican a funciones de tres, cuatro o n variables, donde los dominios constan de tríadas (x_1, x_2, x_3) , tétradas (x_1, x_2, x_3, x_4) o n -ádas (x_1, x_2, \dots, x_n) . En todos los casos, el recorrido está constituido por números reales. En este capítulo restringiremos nuestro análisis a funciones de dos o tres variables.

Como ocurre con funciones de una variable, la forma más usual de escribir una función de varias variables es por medio de una *ecuación* y , a menos que se diga explícitamente otra cosa, supondremos que el dominio es el conjunto de todos los puntos en los que dicha ecuación tiene sentido. Por ejemplo, el dominio de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

se supone que es todo el plano xy . Análogamente, el dominio de

$$f(x, y) = \ln xy$$

es el conjunto de puntos (x, y) en el plano tales que $xy > 0$, es decir, todos los puntos del primer y del tercer cuadrantes.

EJEMPLO 1 Dominios de funciones de varias variables

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

$$b) g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

Solución:

a) La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y

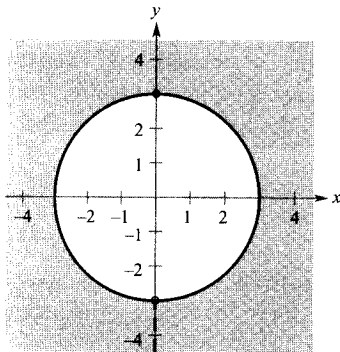
$$x^2 + y^2 \geq 9$$

Así pues, el dominio es el conjunto de puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior, *excepto* los que se encuentran en el eje y , como indica la Figura 12.1.

b) La función g está definida para todos los puntos (x, y, z) tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 < 9$$

En consecuencia, su dominio lo constituyen los puntos (x, y, z) interiores a la esfera de radio 3 centrada en el origen. \square



Dominio de
 $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

FIGURA 12.1

Las funciones de varias variables se pueden combinar igual que las de una variable. Así, podemos sumar, restar, multiplicar o dividir funciones de dos variables como sigue:

$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$	Suma o diferencia
$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$	Producto
$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0$	Cociente

No se puede formar la composición de funciones de varias variables. No obstante, si h es una función de varias variables y g una función de una sola variable, puede formarse la función compuesta $(g \circ h)(x, y)$ de la manera siguiente

$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$	Composición
----------------------------------	-------------

El dominio de esta función compuesta lo constituyen todos los puntos (x, y) en el dominio de h tales que $h(x, y)$ está en el dominio de g . Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

puede verse como la composición de $h(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ con la función de una variable $g(u) = \sqrt{u}$. Su dominio es el conjunto de los puntos de la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ o interiores a ella.

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real, y m, n son enteros no negativos) se llama **función polinómica** (o polinomio, para abreviar) de dos variables. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad y \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2$$

son funciones polinómicas de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinómicas. La misma terminología se utiliza para funciones de tres o más variables.

La gráfica de una función de dos variables

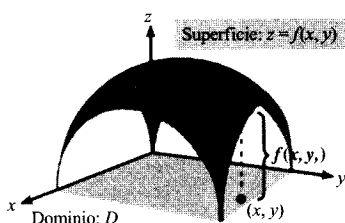


FIGURA 12.2

Al igual que sucedía con las funciones de una variable, podemos aprender mucho sobre una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función de dos variables es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen $z = f(x, y)$, con (x, y) en el dominio de f . Puede interpretarse geoméricamente como una *superficie en el espacio*, tal como se explicó en las Secciones 10.5 y 10.6. En la Figura 12.2 se ve que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D , el dominio de f . A cada (x, y) en D le corresponde un punto (x, y, z) en la superficie y, recíprocamente, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) de D .

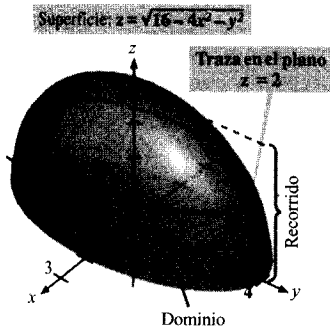


FIGURA 12.3

La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la mitad superior de un elipsoide.

EJEMPLO 2 Descripción de la gráfica de una función de dos variables

¿Cuál es el recorrido de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$? Describir la gráfica de f .

Solución: El dominio de f , deducido de su ecuación, es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. Por tanto, D es el conjunto de puntos que pertenecen o son interiores a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El recorrido de f lo constituyen todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$, esto es,

$$0 \leq z \leq 4 \quad \text{Recorrido de } f$$

Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y sólo si

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \\ z^2 &= 16 - 4x^2 - y^2 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 &= 16 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} &= 1, \quad 0 \leq z \leq 4 \end{aligned}$$

Por la Sección 10.6 sabemos que la gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide, como ilustra la Figura 12.3. □

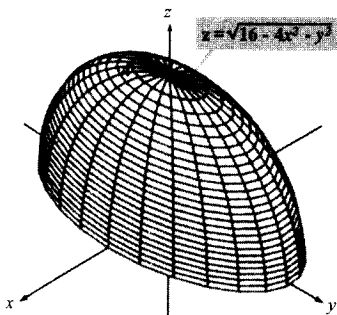


FIGURA 12.4

Para dibujar a mano una superficie en el espacio es útil usar las trazas en planos paralelos a los planos de coordenadas, como muestra la Figura 12.3. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie en el plano $z = 2$, sustituimos $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$, con lo que obtenemos

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes de longitudes $4\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

Las trazas se utilizan también en muchas representaciones gráficas tridimensionales en las calculadoras. Por ejemplo, la Figura 12.4 presenta una versión generada por un programa informático de la superficie del Ejemplo 2. Para conseguir esta gráfica, la calculadora obtuvo 25 trazas paralelas al plano xy y 12 trazas en planos verticales.

Si dispone de un programa al efecto, represente con él varias superficies.



FIGURA 12.5

Las curvas de nivel muestran las líneas de igual presión (isobaras) medida en milibares.

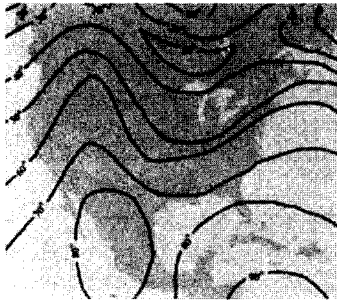


FIGURA 12.6

Las curvas de nivel muestran las líneas de igual temperatura (isotermas) medida en grados Fahrenheit.

Curvas de nivel

Otra forma de visualizar una función de dos variables consiste en utilizar un **campo escalar** en el que se asigna al punto (x, y) el escalar $z = f(x, y)$. Un campo escalar queda caracterizado por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante. El mapa del tiempo de la Figura 12.5 muestra curvas **isobaras**, de nivel de presión constante. Las curvas que representan temperatura constante en los mapas del tiempo, como las de la Figura 12.6, se denominan **isotermas**. Las curvas de nivel en las representaciones de los campos de potencial eléctrico se llaman **líneas equipotenciales**.

Los mapas de contorno suelen utilizarse para representar regiones de la superficie terrestre, con las curvas de nivel correspondiendo a líneas de altura constante sobre el nivel del mar. Los mapas de este tipo se llaman **mapas topográficos**.

Un mapa de contorno traduce la variación de z respecto de x e y gracias al espaciado entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel significa que z está variando lentamente, mientras que curvas de nivel muy juntas quieren decir que z cambia muy deprisa. Además, con el propósito de proporcionar una ilusión tridimensional en un mapa de contorno, es importante elegir valores de c espaciados de manera uniforme.

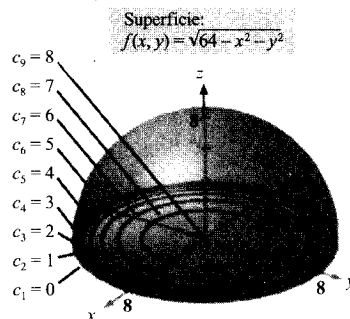
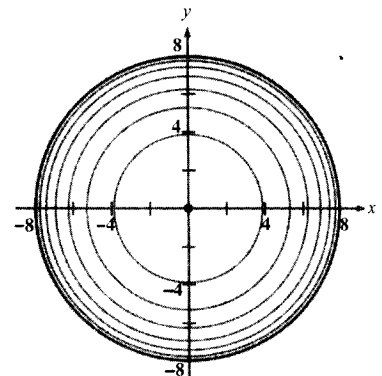
EJEMPLO 3 Un mapa de contorno

La Figura 12.7 muestra el hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$. Dibujar un mapa de contorno para esta superficie utilizando curvas de nivel correspondientes a $c = 0, 1, 2, \dots, 8$.

Solución: Para cada valor de c , la ecuación $f(x, y) = c$ representa un círculo (o un punto) en el plano xy . Así, para $c_1 = 0$ la curva de nivel

$$x^2 + y^2 = 64 \quad \text{Círculo de radio 8}$$

es un círculo de radio 8. La Figura 12.8 muestra las nueve curvas de nivel para el hemisferio.

FIGURA 12.7
Curvas de nivel.FIGURA 12.8
Mapa de contorno. □

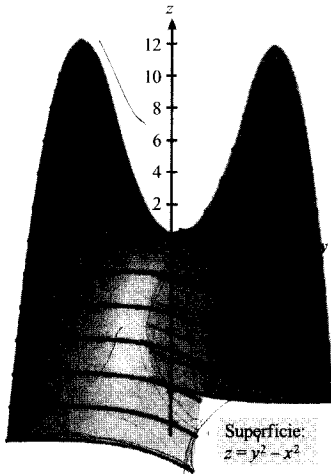


FIGURA 12.9
Paraboloide hiperbólico.

EJEMPLO 4 Un mapa de contorno

La Figura 12.9 muestra el paraboloide hiperbólico de ecuación

$$z = y^2 - x^2$$

Dibujar un mapa de contorno para ella.

Solución: Para cada valor de c hacemos $f(x, y) = c$ y dibujamos la curva de nivel resultante en el plano xy . Para la función dada, cada curva de nivel (si $c \neq 0$) es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm x$. Si $c < 0$, el eje transversal es horizontal. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = -4$ viene dada por

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad \text{Hipérbola con eje transversal horizontal}$$

Si $c > 0$, el eje transversal es vertical. Así, la curva de nivel para $c = 4$ viene dada por

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1 \quad \text{Hipérbola con eje transversal vertical}$$

Si $c = 0$, la curva de nivel es la cónica degenerada formada por las dos asíntotas (Figura 12.10). □

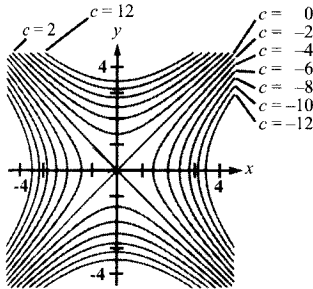


FIGURA 12.10
Curvas de nivel hiperbólicas (a incrementos de 2).

Un ejemplo de función de dos variables en Economía lo constituye la **función de producción de Cobb-Douglas**, que se utiliza como modelo para representar el número de unidades producidas en términos de las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo e y las unidades de capital, el número de unidades producidas viene dado en este modelo por

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

donde C es una constante y $0 < a < 1$.

EJEMPLO 5 La función de producción de Cobb-Douglas

Un fabricante estima que su función de producción es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$, donde x es el número de unidades de trabajo e y el de unidades de capital. Comparar el nivel de producción cuando $x = 1.000$ e $y = 500$ con el nivel de producción para $x = 2.000$ e $y = 1.000$.

Solución: Cuando $x = 1.000$ e $y = 500$, el nivel de producción es

$$f(1.000, 500) = 100(1.000^{0.6})(500^{0.4}) \approx 75.786$$

Cuando $x = 2.000$ e $y = 1.000$, el nivel de producción es

$$f(2.000, 1.000) = 100(2.000^{0.6})(1.000^{0.4}) \approx 151.572$$

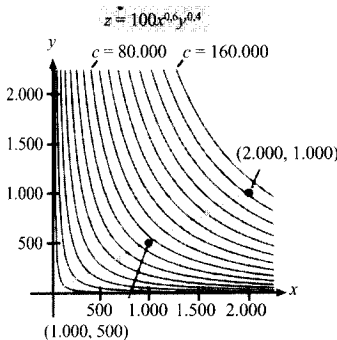


FIGURA 12.11
Curvas de nivel (a incrementos de 10.000).

Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se muestran en la Figura 12.11. Nótese que al doblar *ambas*, x e y , se dobla el nivel de producción (véase Ejercicio 72). □

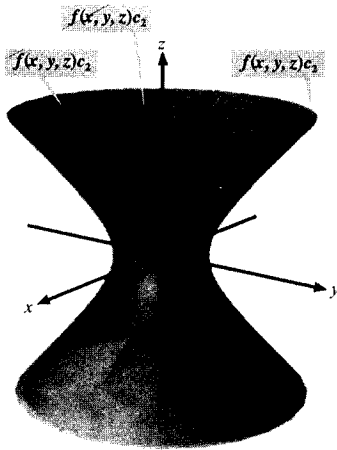


FIGURA 12.12
Superficies de nivel de f .

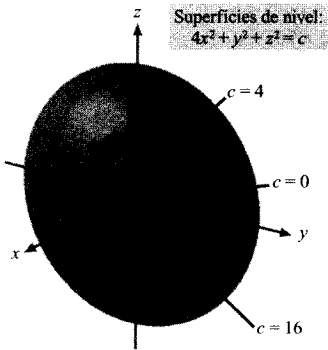


FIGURA 12.13

Superficies de nivel

Las curvas de nivel pasan a ser **superficies de nivel** cuando se añade una dimensión. Si f es una función de tres variables y c una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de la función f (véase Figura 12.12).

Gracias a las calculadoras, los científicos e ingenieros han ideado nuevas formas de visualizar las funciones de tres variables. Por ejemplo, puede aplicarse en una simulación por ordenador que utiliza colores con el fin de representar la distribución óptima de esfuerzos en la puerta de un automóvil.

EJEMPLO 6 Superficies de nivel

Describir las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$$

Solución: Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c \quad \text{Ecuación de una superficie de nivel}$$

Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones paralelas al plano yz son círculos). Al crecer c , los radios de las secciones circulares crecen con la raíz cuadrada de c . Así, las superficies de nivel correspondientes a $c = 0$, $c = 4$ y $c = 16$ son

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 0 \text{ (un punto)}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 4 \text{ (elipsoide)}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 16 \text{ (elipsoide)}$$

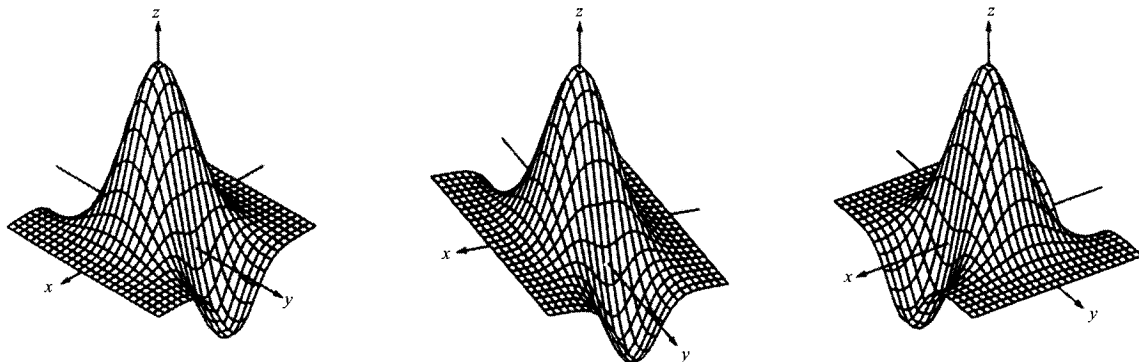
Estas superficies de nivel pueden verse en la Figura 12.13. □

| Nota. Si la función del Ejemplo 6 representara la temperatura en el punto (x, y, z) , las superficies de nivel de la Figura 12.13 se llamarían **superficies isotermas**.

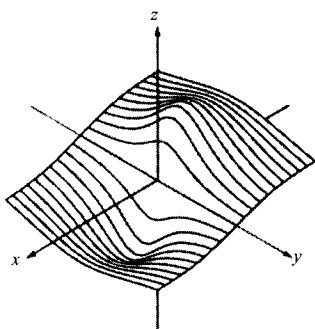
Gráficas en una calculadora

Las calculadoras simplifican mucho la tarea de dibujar la gráfica de una función en el espacio. Aunque hay una gran diversidad de programas para ello, la mayoría utilizan algún tipo de análisis de trazas con el propósito de ofrecer una ilusión tridimensional. Suele ser necesario proporcionar a la calculadora la ecuación de la superficie, la región del plano xy donde se desea dibujar la superficie y el número de trazas a considerar. Por ejemplo, para representar la superficie dada por

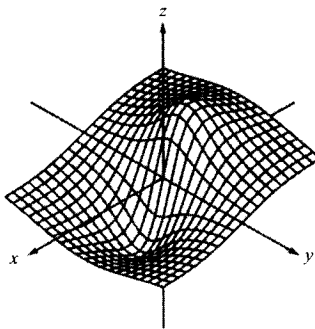
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



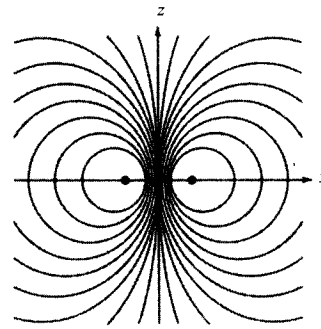
Tres perspectivas diferentes de la gráfica de $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1 - x^2 - (y^2)/4}$



Trazas simples

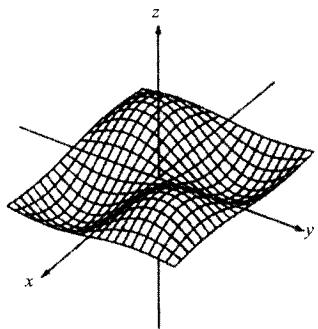


Trazas dobles

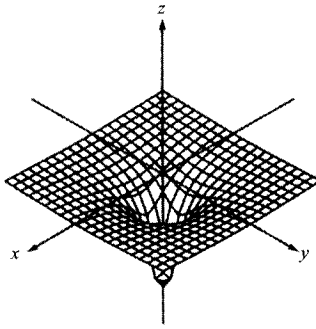


Curvas de nivel

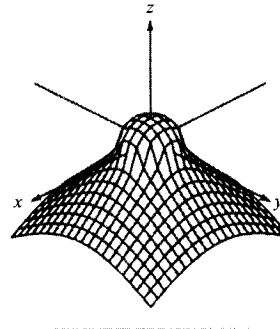
Trazas y curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$



$f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$



$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

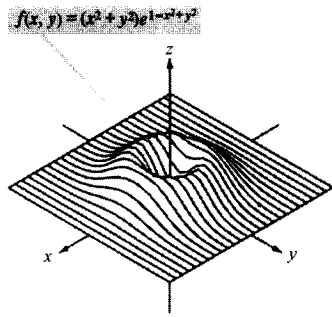


FIGURA 12.14

podemos tomar las siguientes cotas para x , y , z :

$$\begin{array}{ll} -3 \leq x \leq 3 & \text{Límites para } x \\ -3 \leq y \leq 3 & \text{Límites para } y \\ 0 \leq z \leq 3 & \text{Límites para } z \end{array}$$

La Figura 12-14 muestra una gráfica de esa superficie generada por una calculadora, mediante 26 trazas paralelas al plano yz . Para realizar el efecto tridimensional, el programa utiliza una rutina de «líneas ocultas». Esto es, comienza dibujando las trazas correspondientes a los valores más grandes de x y después, al calcular cada nueva traza, la calculadora decide si deberá mostrar la siguiente traza por completo o sólo en parte.

Las gráficas de la página 1111 presentan varias superficies dibujadas en una calculadora. Intente reproducirlas si dispone de medios informáticos apropiados.

Ejercicios de la Sección 12.1

En los Ejercicios 1-4, determinar si z es función de x e y .

- $x^2z + yz - xy = 10$
- $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$
- $z + x \ln y - 8 = 0$

En los Ejercicios 5-16, hallar y simplificar los valores de las funciones.

- $f(x, y) = x/y$
 - $(3, 2)$
 - $(-1, 4)$
 - $(30, 5)$
 - $(5, y)$
 - $(x, 2)$
 - $(5, t)$
- $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$
 - $(0, 0)$
 - $(0, 1)$
 - $(2, 3)$
 - $(1, y)$
 - $(x, 0)$
 - $(t, 1)$
- $f(x, y) = xe^y$
 - $(5, 0)$
 - $(3, 2)$
 - $(2, -1)$
 - $(5, y)$
 - $(x, 2)$
 - (t, t)
- $g(x, y) = \ln |x + y|$
 - $(2, 3)$
 - $(5, 6)$
 - $(e, 0)$
 - $(0, 1)$
 - $(2, -3)$
 - (e, e)
- $h(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 - $(2, 3, 9)$
 - $(1, 0, 1)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
 - $(0, 5, 4)$
 - $(6, 8, -3)$
- $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$
 - $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
 - $(3, 1)$
- $V(r, h) = \pi r^2 h$
 - $(3, 10)$
 - $(5, 2)$
- $g(x, y) = \int_x^y (2t - 3) dt$
 - $(0, 4)$
 - $(1, 4)$
- $g(x, y) = \int_x^y \frac{1}{t} dt$
 - $(4, 1)$
 - $(6, 3)$
- $f(x, y) = x^2 - 2y$
 - $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
 - $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$
- $f(x, y) = 3xy + y^2$
 - $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
 - $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

En los Ejercicios 17-28, describir el dominio y el recorrido de la función.

17. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 18. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

19. $f(x, y) = \arcsen(x + y)$ 20. $f(x, y) = \arccos(y/x)$

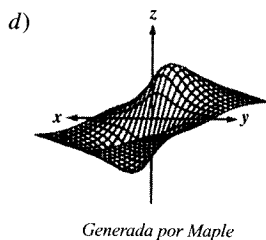
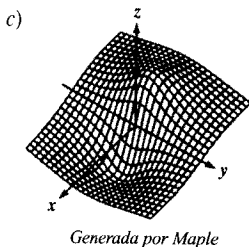
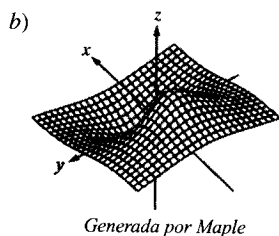
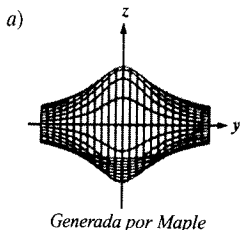
21. $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$ 22. $f(x, y) = \ln(4 - xy)$

23. $z = \frac{x + y}{xy}$ 24. $z = \frac{xy}{x - y}$

25. $f(x, y) = e^{x/y}$ 26. $f(x, y) = x^2 + y^2$

27. $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ 28. $g(x, y) = x\sqrt{y}$

29. **Para pensar** Las cuatro figuras adjuntas son gráficas de la función $f(x, y) = -4x/(x^2 + y^2 + 1)$. Asociar cada una de ellas con el punto del espacio desde el que está contemplada esa superficie. Los cuatro puntos, desordenados, son (20, 15, 25), (-15, 10, 20), (20, 20, 0) y (20, 0, 0).



30. **Para pensar** Usar la función del Ejercicio 29.
- Hallar su dominio y su recorrido.
 - Identificar los puntos del plano xy donde el valor de la función es 0.
 - ¿Pasa la superficie por todos los octantes del sistema rectangular de coordenadas? Razonar la respuesta.

En los Ejercicios 31-38, dibujar la superficie dada por la función.

31. $f(x, y) = 5$ 32. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

33. $f(x, y) = y^2$ 34. $f(x, y) = \frac{1}{2}x$

35. $z = 4 - x^2 - y^2$ 36. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

37. $f(x, y) = e^{-x}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 39-42, representar la función con ayuda de calculadora.

39. $z = y^2 - x^2 + 1$ 40. $z = \frac{1}{12} \sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$

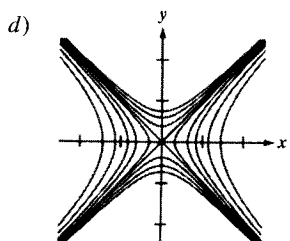
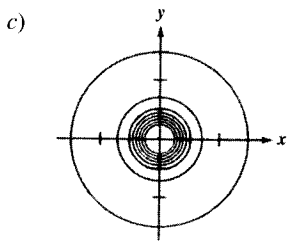
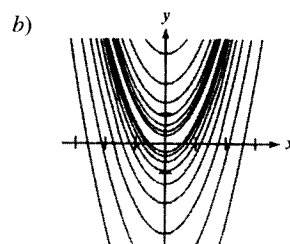
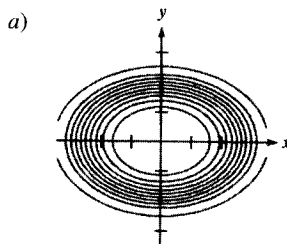
41. $f(x, y) = x^2 e^{(-xy/2)}$ 42. $f(x, y) = x \sen y$

43. **Conjetura** Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- Dibujar la superficie determinada por f .
 - Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = f(x, y) + 2$. Confirmarla en la calculadora.
 - Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = f(x, y - 2)$. Comprobarla en la calculadora.
 - Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = 4 - f(x, y)$. Verificarla en la calculadora.
 - Sobre la superficie del apartado a) dibujar las gráficas de $z = f(1, y)$ y de $z = f(x, 1)$.

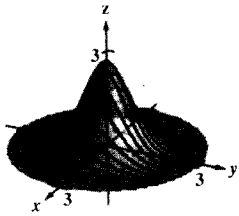
44. **Conjetura** Consideremos la función $f(x, y) = xy$ para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Dibujar la superficie dada por f .
- Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = f(x, y) - 3$. Confirmarla en la calculadora.
- Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = -f(x, y)$. Comprobarla en la calculadora.
- Formular una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y de $g(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y)$. Confirmarla en la calculadora.
- Sobre la superficie del apartado a) dibujar las gráficas de $z = f(x, x)$.

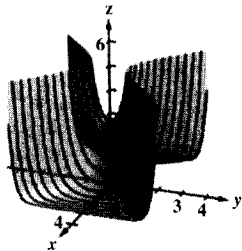
En los Ejercicios 45-48, asociar cada superficie con uno de los mapas de contorno.



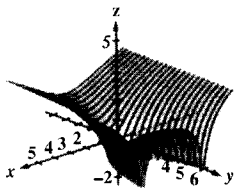
45. $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$



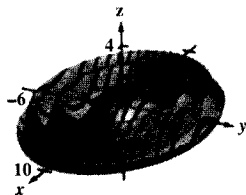
46. $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$



47. $f(x, y) = \ln |y - x^2|$



48. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + 2y^2}{4}\right)$



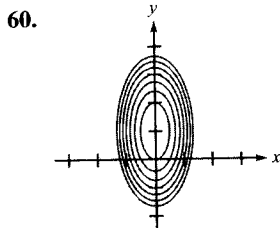
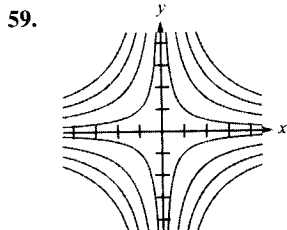
En los Ejercicios 49-56, describir las curvas de nivel de la función y dibujarlas para los valores de c que se indican.

- 49. $z = x + y$ $c = -1, 0, 2, 4$
- 50. $z = 6 - 2x - 3y$ $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$
- 51. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- 52. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $c = 0, 2, 4, 6, 8$
- 53. $f(x, y) = xy$ $c = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$
- 54. $f(x, y) = e^{xy}$ $c = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
- 55. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ $c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$
- 56. $f(x, y) = \ln(x - y)$ $c = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$

57. **Para pensar** Todas las curvas de nivel de la superficie dada por $z = f(x, y)$ son círculos concéntricos. ¿Implica eso que la gráfica de f es un hemisferio? Ilustrar la respuesta con un ejemplo.

58. **Para pensar** Construir una función cuyas curvas de nivel sean rectas que pasan por el origen.

Redacción En los Ejercicios 59 y 60, usar las gráficas de las curvas de nivel (valores de c uniformemente espaciados) de la función f para redactar unas líneas describiendo una posible gráfica de f . ¿Es única la gráfica de f ? Explicar la respuesta.



61. **Inversión** En 1998 se efectuó una inversión de \$1.000 al 10 por 100 de interés compuesto anualmente. Supuesto que el inversor paga una tasa anual R de impuestos y que la tasa anual de inflación es I , el valor V de la inversión en el año 2008, en dólares constantes de 1998, es

$$V(I, R) = 1.000 \left[\frac{1 + 0,10(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

Usar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa de impuestos	Tasa de inflación		
	0	0,03	0,05
0,00			
0,28			
0,35			

62. **Inversión** Se depositan \$1.000 en una cuenta de ahorro que produce una tasa r de interés (expresado como decimal), compuesto continuamente. Tras t años, la cantidad $A(r, t)$ es

$$A(r, t) = 1.000e^{rt}$$

Usar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa	Número de años			
	5	10	15	20
0,08				
0,10				
0,12				
0,14				

En los Ejercicios 63-68, dibujar la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor indicado de c .

- 63. $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ $c = 6$
- 64. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z$ $c = 4$
- 65. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $c = 9$
- 66. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ $c = 1$
- 67. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$ $c = 0$
- 68. $f(x, y, z) = \text{sen } x - z$ $c = 0$

69. **Explotación forestal** La regla de los troncos de Doyle es uno de los métodos utilizados para determinar el rendimiento en madera aserrada de un tronco (en tablon-pie) en términos de su diámetro d (en pulgadas) y de su longitud L (en pies). El número de tablon-pie viene dado en este modelo por

$$N(d, L) = \left(\frac{d-4}{4}\right)^2 L$$

- a) Hallar el número de tablon-pie de madera aserrada producida por un tronco de 22 pulgadas de diámetro y 12 pies de longitud.
b) Evaluar $N(30, 12)$.
70. **Modelo de colas** El intervalo medio de tiempo que un cliente está en línea de espera es

$$W(x, y) = \frac{1}{x-y}, \quad x > y$$

donde y denota el ritmo medio de llegadas, expresado como el número de clientes por unidad de tiempo, y x el ritmo medio de servicio, expresado en esas mismas unidades. Evaluar las siguientes cantidades.

- a) $W(15, 10)$ b) $W(12, 9)$ c) $W(12, 6)$ d) $W(4, 2)$
71. **Distribución de temperaturas** La temperatura (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de una placa circular de 10 metros de radio es

$$T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$$

donde x e y se miden en metros. Dibujar algunas curvas isotermas.

72. **Función de producción de Cobb-Douglas** Usar la función de Cobb-Douglas (véase el Ejemplo 5) para probar que si el número de unidades de trabajo y de capital se doblan, entonces el nivel de producción también se dobla.
73. **Coste de construcción** Una caja rectangular, abierta por arriba, mide x pies de largo, y de ancho y z de alto. Expresar el coste C de su construcción como función de x , y , z si la base cuesta \$0,75 por pie cuadrado y los laterales \$0,40 por pie cuadrado.
74. **Volumen** Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio r del cilindro y de su altura h .
75. **Ley de los gases ideales** La ley de los gases ideales establece que $PV = kT$, siendo P la presión, V el volumen, T la temperatura y k una constante de proporcionalidad. Un depósito contiene 2.600 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 20 libras por pulgada cuadrada y a una temperatura de 300 °K.
- a) Determinar k .
b) Expresar P como función de V y T , y describir sus curvas de nivel.

76. **Un modelo matemático** La tabla da (en miles de millones de dólares) las ventas netas x , los activos totales y , y los derechos z de los accionistas de Wal-Mart entre 1991 y 1996. (Fuente: 1996 Annual Report.)

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996
x	32,6	43,9	55,5	67,3	82,5	93,6
y	11,4	15,4	20,6	26,4	32,8	37,5
z	5,4	7,0	8,8	10,8	12,7	14,8

Un modelo para esos datos es

$$z = f(x, y) = 0,083x + 0,160y + 0,890$$

- a) Usando el modelo, y con ayuda de calculadora, estimar z para los valores indicados de x e y .
b) ¿Cuál de las dos variables tiene, en este modelo, mayor influencia sobre los derechos de los accionistas?
c) Simplificar la expresión de $f(x, 25)$ e interpretar su significado en el contexto del problema.
77. **Meteorología** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de sus observaciones elaboran los mapas del tiempo (véase figura) en los que se muestran las curvas de presión atmosférica constante (isobaras). Sabiendo que cuanto más juntas están las isobaras mayor es la velocidad del viento, asociar a los puntos A , B y C a) la máxima presión, b) la mínima presión, y c) la máxima velocidad del viento.

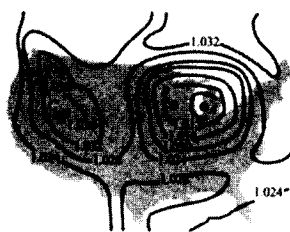


FIGURA E.77

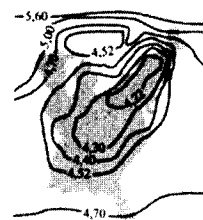
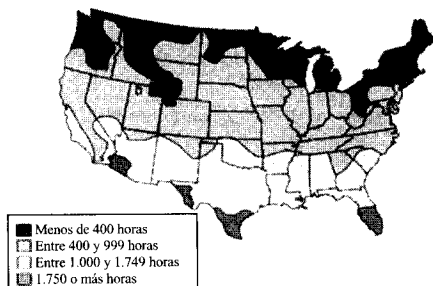


FIGURA E.78

78. **Lluvia ácida** La acidez del agua de lluvia se mide en unidades pH. Un valor 7 del pH es neutro, valores menores corresponden a acidez creciente y valores mayores a carácter alcalino creciente. El mapa muestra las curvas de pH constante y proporciona evidencia de que siguiendo el viento de las áreas muy industrializadas, la acidez va creciendo. Usando las curvas de nivel de ese mapa, determinar la dirección de los vientos dominantes en el nordeste de EE.UU.

79. Aire acondicionado El mapa de contorno de la figura muestra las horas anuales estimadas de uso de aire acondicionado en promedio en los hogares en 1991. (Fuente: *Association of Home Appliance Manufacturers.*)

- Comentar el uso de colores para representar las curvas de nivel.
- ¿Corresponden las curvas a usos uniformemente espaciados?
- Describir cómo se podría lograr un mapa de contorno más detallado.



¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 80-83, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

- Si $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, entonces $x_0 = x_1$ e $y_0 = y_1$.
- Una recta vertical puede cortar a la gráfica de $z = f(x, y)$ a lo sumo una vez.
- Si f es una función, entonces $f(ax, ay) = a^2f(x, y)$.
- La gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$ es un paraboloides hiperbólico.

CONTENIDO

- Entornos en el plano
- Límite de una función de dos variables
- Continuidad de una función de dos variables
- Continuidad de una función de tres variables



12.2

Límites y continuidad

Entornos en el plano

En esta sección vamos a estudiar los límites de funciones de dos o tres variables. Comenzaremos por dos variables y extenderemos los conceptos a tres variables al final de la sección.

Iniciamos la discusión definiendo al análogo bidimensional de lo que era un intervalo en la recta. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) del plano, podemos definir el δ -entorno centrado en (x_0, y_0) como el disco centrado en (x_0, y_0) de radio $\delta > 0$.

$$\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

Disco abierto

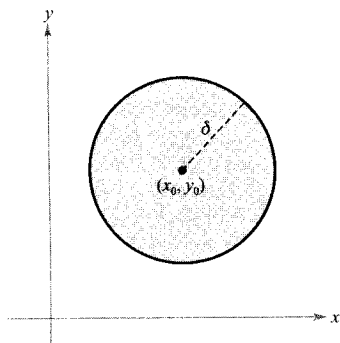


FIGURA 12.15
Un disco abierto.

como se muestra en la Figura 12.15. Cuando en esta fórmula aparece el signo $<$ (*menor*) el disco se llama **abierto**, y cuando aparece el signo \leq (*menor o igual*) el disco se llama **cerrado**. Esta denominación se corresponde con la análoga para definir los intervalos abiertos y cerrados en la recta real.

Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un **punto interior** de R si existe un δ -entorno centrado en (x_0, y_0) que está contenido completamente en R , como se indica en la Figura 12.16. Si todo punto de R es interior, se dice que R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en él contiene puntos de R y puntos que no pertenecen a R . Por definición, una región debe contener a sus puntos interiores, pero no

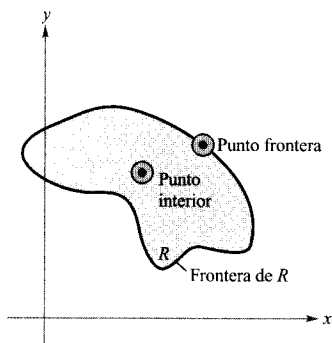


FIGURA 12.16

La frontera y los puntos interiores de una región R .



SONYA KOVALEVSKY (1850-1891)

Gran parte de la terminología empleada en las definiciones de límites y continuidad de funciones de dos o tres variables fue introducida por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). Por su tratamiento riguroso de los límites y otros conceptos del Cálculo se le considera el «padre» del Análisis moderno. Weierstrass fue un excelente maestro. Una de sus alumnas más famosas fue la rusa Sonya Kovalevsky, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la Física Matemática. Fue una de las primeras mujeres merecedora de alta estima como investigadora en Matemáticas.

PARA MÁS INFORMACIÓN

Para más información acerca de Sonya Kovalevsky, véase el artículo «S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson», de Karen D. Rappaport, en *The American Mathematical Monthly*, octubre 1981.

tiene por qué contener a todos sus puntos frontera. Si una región contiene a todos sus puntos frontera, se dice que es cerrada. Una región que contiene algunos de sus puntos frontera, pero no todos, no es abierta ni cerrada.

Límite de una función de dos variables

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto quizás en el punto (x_0, y_0) , y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

| Nota. Gráficamente, esta definición de límite implica que para cualquier punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ , el valor de $f(x, y)$ está entre $L + \epsilon$ y $L - \epsilon$ (véase Figura 12.17).

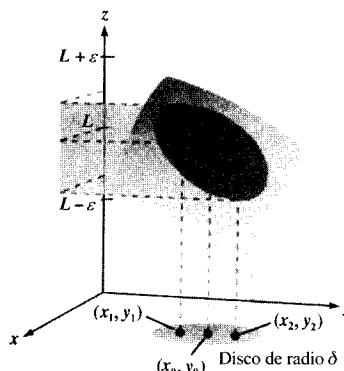


FIGURA 12.17

Para cualquier (x, y) del disco de radio δ , el valor $f(x, y)$ está entre $L + \epsilon$ y $L - \epsilon$.

La definición anterior es análoga a la del límite de una función de una variable, pero hay una diferencia fundamental. Para saber si una función de una variable tiene límite, basta ver qué sucede al tender hacia el punto en dos direcciones: izquierda y derecha. Si la función tiende al mismo número por la izquierda que por la derecha, el límite existe. Ahora bien, para una función de dos variables, la afirmación

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

significa que al punto (x, y) se le permite tender hacia el punto (x_0, y_0) por cualquier «dirección». Si el valor de

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

no es el mismo para todas esas maneras (o **caminos**) de acercarnos al (x_0, y_0) , el límite no existe.

EJEMPLO 1 Verificando un límite mediante la definición

Probar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} x = a$$

Solución: Tomamos $f(x, y) = x$, y sea $L = a$. Hemos de probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un δ -entorno centrado en (a, b) tal que

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ esté en ese entorno. Observamos que de

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

se sigue que

$$|f(x, y) - a| = |x - a| = \sqrt{(x - a)^2} \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

Por tanto, podemos tomar $\delta = \varepsilon$, y el límite queda verificado. \square

Los límites de funciones de varias variables tienen, por lo que respecta a sumas, diferencias, productos y cocientes, las mismas propiedades que los límites de funciones de una variable. (Véase el Teorema 1.2 en la Sección 1.3.) En el próximo ejemplo se utilizan algunas de ellas.

EJEMPLO 2 Cálculo de límites

Calcular:

$$a) \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \quad b) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

Solución:

a) Usando las propiedades de la suma y el producto de límites obtenemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 5x^2y = 5(1^2)(2) = 10$$

y

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (x^2 + y^2) = (1^2 + 2^2) = 5$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (si el del denominador no es 0), tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

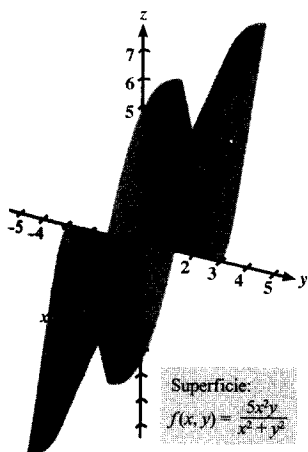


FIGURA 12.18

b) En este caso, los límites de numerador y denominador son ambos 0, de modo que no podemos determinar si existe límite tomando separadamente los límites de numerador y denominador y dividiendo a continuación. No obstante, la gráfica de f en la Figura 12.18 hace pensar que el límite puede ser 0. En consecuencia, intentamos aplicar la definición con $L = 0$. En primer lugar, hagamos notar que

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

En un δ -entorno de $(0, 0)$ es $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, luego, para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= 5|y| \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\leq 5|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 5\delta \end{aligned}$$

Así pues, basta tomar $\delta = \varepsilon/5$ para concluir que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \square$$

Para algunas funciones es fácil reconocer que un límite no existe. Por ejemplo, es claro que el límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

no existe, ya que los valores de $f(x, y)$ crecen sin tope cuando (x, y) se aproxima al $(0, 0)$ a lo largo de *cualquier* camino (Figura 12.19).

Para otras, no es fácil darse cuenta de que el límite no existe. El próximo ejemplo describe un límite que no existe debido a que la función tiende a valores distintos por caminos distintos.

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

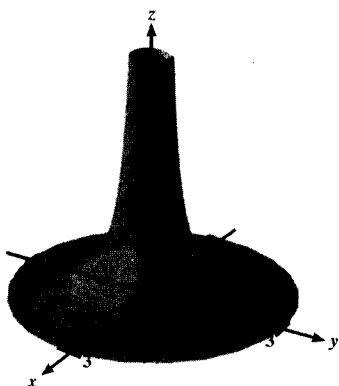


FIGURA 12.19

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ no existe.}$$

Probar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

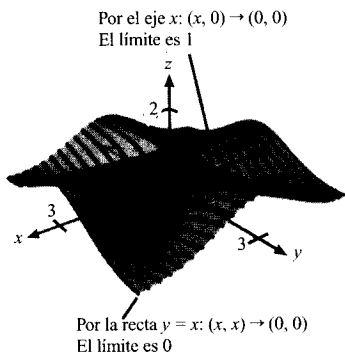


FIGURA 12.20

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ no existe.}$$

Solución: El dominio de la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

está constituido por todos los puntos (x, y) excepto el $(0, 0)$. Para probar que no existe el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, vamos a ir hacia $(0, 0)$ por los dos caminos que indica la Figura 12.20. A lo largo del eje x , todo punto es de la forma $(x, 0)$, así que el límite por ese camino es

$$\lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} \right)^2 = \lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} (1)^2 = 1 \quad \text{Límite por el eje } x$$

Sin embargo, si (x, y) tiende hacia el $(0, 0)$ por la recta $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} \right)^2 = \lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{0}{2x^2} \right)^2 = 0 \quad \text{Límite por la recta } y = x$$

Eso quiere decir que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ hay puntos (x, y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f toma el valor 0. Por ejemplo, $f(x, y) = 1$ en los puntos

$$(1, 0), (0, 1, 0), (0, 01, 0) \text{ y } (0, 001, 0)$$

y $f(x, y) = 0$ en los puntos

$$(1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 01, 0, 01) \text{ y } (0, 001, 0, 001)$$

Por consiguiente, f no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. □

| Nota. Del Ejemplo 3 se saca la conclusión de que no existe límite debido a que dos caminos distintos producen valores límite distintos. Si dos caminos llevan al mismo valor límite, no se puede concluir que el límite existe. Para llegar a esta conclusión hay que demostrar que *todos* los caminos posibles llevan al mismo valor límite.

Continuidad de una función de dos variables

En el Ejemplo 2a el límite de

$$f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$$

cundo $(x, y) \rightarrow (1, 2)$, puede calcularse por sustitución directa, es decir, el límite es $f(1, 2) = 2$. En estos casos se dice que f es una función **continua** en el punto $(1, 2)$.

| Nota. Esta definición de continuidad puede extenderse a los puntos frontera de la región abierta R , considerando un tipo especial de límite, en el que sólo se permite a (x, y) tender hacia (x_0, y_0) por caminos que discurren dentro de R . Esta noción de límite es similar a la de límite lateral para funciones de una variable (Capítulo 1).

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Una función f de dos variables es **continua en un punto** (x_0, y_0) de una región abierta R , si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Esto es, si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Se dice que f es **continua en la región abierta R** si es continua en todo punto de R .

En el Ejemplo 2b vimos que la función

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en $(0, 0)$. Ahora bien, como existe el límite de esa función en ese punto, podemos evitar la discontinuidad definiendo f en $(0, 0)$ con un valor igual a dicho límite. Tales discontinuidades se denominan **evitables**. En el Ejemplo 3, vimos que la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

tampoco es continua en $(0, 0)$, pero esta discontinuidad **no es evitable**.

TEOREMA 12.1

FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES

Si k es un número real y f, g son funciones continuas en (x_0, y_0) , las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0) .

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: f/g , si $g(x_0, y_0) \neq 0$

El Teorema 12.1 garantiza la continuidad de las funciones polinómicas y racionales en sus dominios. La continuidad de otras familias de funciones puede extenderse de forma natural de una a dos variables. Así, las funciones cuyas gráficas aparecen en las Figuras 12.21 y 12.22 son continuas en todos los puntos del plano.

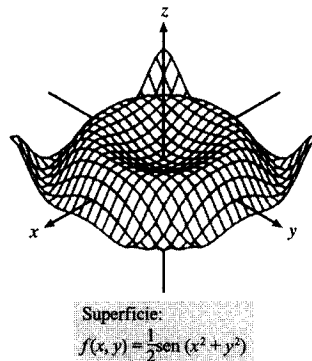


FIGURA 12.21

La función f es continua en todos los puntos del plano.

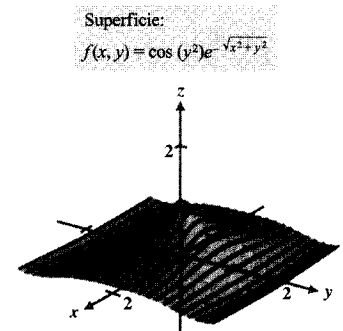


FIGURA 12.22

La función f es continua en todos los puntos del plano.

EXPLORACIÓN

Coloque a un palmo de distancia una cuchara (poco profunda a ser posible) y mire su imagen en ella. Está invertida. Ahora, vaya acercando la cuchara a uno de sus ojos. En algún momento, la imagen ha dejado de estar invertida. ¿Puede ocurrir que la imagen haya ido cambiando de forma continua? Comente esta cuestión, así como el significado general del término continuidad, con los compañeros. Esta exploración fue sugerida por Irvin Roy Hentzel, Iowa State University.

El próximo teorema establece condiciones que aseguran la continuidad de una función compuesta.

TEOREMA 12.2 CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0) . Es decir,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

[Nota. Conviene hacer notar que en el Teorema 12.2 h es función de dos variables y g es función de una variable.

EJEMPLO 4 Análisis de la continuidad

Discutir la continuidad de las funciones

$$a) f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2} \quad b) g(x, y) = \frac{2}{y - x^2}$$

Solución:

- a) Como una función racional es continua en todos los puntos de su dominio, f es continua en todos los puntos del plano xy excepto en el $(0, 0)$, como muestra la Figura 12.23.
- b) La función $g(x, y) = 2/(y - x^2)$ es continua salvo en los puntos donde el denominador se hace 0, es decir $y - x^2 = 0$. Por tanto, la función es continua excepto en los puntos de la parábola $y = x^2$. A un lado de la parábola es $y > x^2$ y la superficie representada por la función está por encima del plano xy (Figura 12.24). Al otro lado de la parábola, $y < x^2$, y la superficie queda por debajo del plano xy .

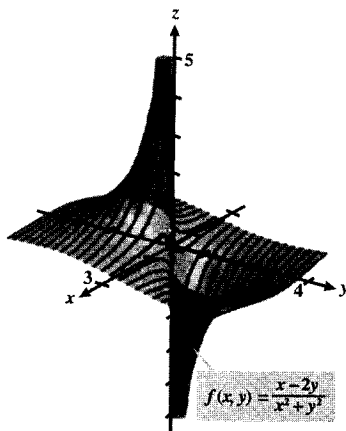


FIGURA 12.23
La función f no es continua en $(0, 0)$.

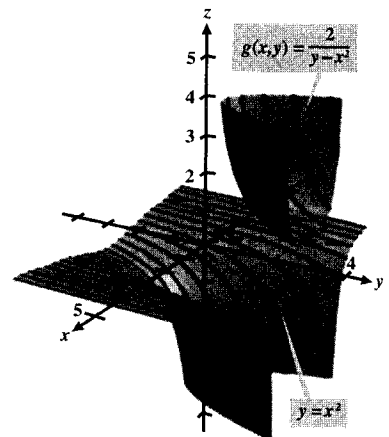


FIGURA 12.24
La función g no es continua en los puntos de la parábola $y = x^2$.

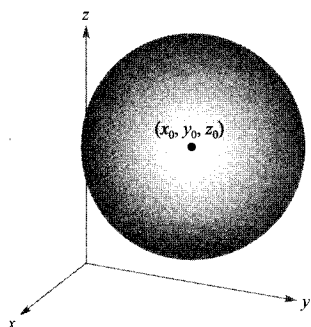


FIGURA 12.25
Una esfera abierta en el espacio.

Continuidad de una función de tres variables

Las definiciones anteriores de límites y continuidad admiten extensión a funciones de tres variables, considerando para ellas puntos (x, y, z) dentro de una *esfera abierta*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$$

Esfera abierta

El radio de esta esfera es δ y su centro (x_0, y_0, z_0) , como ilustra la Figura 12.25. Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R del espacio es un **punto interior** de R si existe una δ -esfera centrada en (x_0, y_0, z_0) que está completamente contenida en R . Si todo punto de R es interior, se dice que R es una **región abierta**.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Una función f de tres variables es **continua en un punto** (x_0, y_0, z_0) de una **región abierta** R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) tiende a (x_0, y_0, z_0) . Esto es, si

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

La función f se dice que es **continua en una región abierta** R si es continua en todos los puntos de R .

EJEMPLO 5 Continuidad de una función de tres variables

La función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

es continua en todos los puntos del espacio excepto en los del paraboloide $z = x^2 + y^2$. \square

Ejercicios de la Sección 12.2

En los Ejercicios 1-4, calcular el límite que se indica, sabiendo que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = 5$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = 3$.

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} [f(x, y) - g(x, y)]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left[\frac{4f(x, y)}{g(x, y)} \right]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} [f(x, y)g(x, y)]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left[\frac{f(x, y) - g(x, y)}{f(x, y)} \right]$

En los Ejercicios 5-14, calcular el límite y discutir la continuidad de la función.

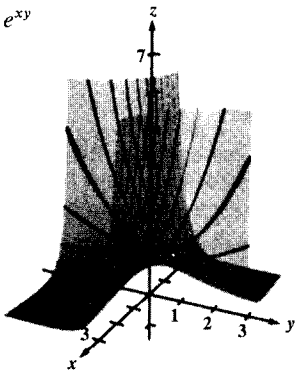
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} (x + 3y^2)$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (5x + y + 1)$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 4)} \frac{x + y}{x - y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x}{\sqrt{x + y}}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\arcsen(x/y)}{1 + xy}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (\pi/4, 2)} y \sen xy$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} e^{xy}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$13. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,5)} \sqrt{x+y+z}$$

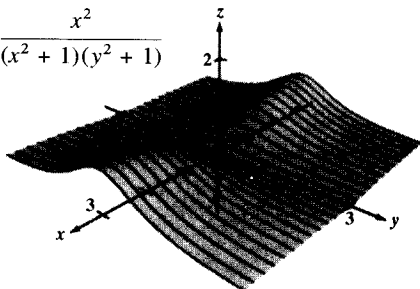
$$14. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,1)} xe^{yz}$$

En los Ejercicios 15-18, discutir la continuidad de la función y evaluar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

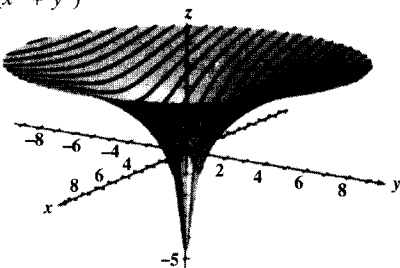
$$15. f(x, y) = e^{xy}$$



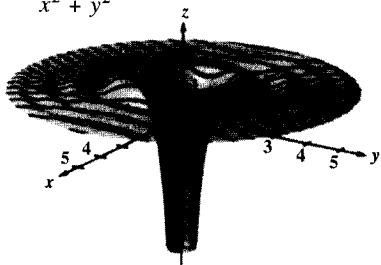
$$16. f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$



$$17. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$



$$18. f(x, y) = 1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$



En los Ejercicios 19-22, usar una calculadora para elaborar una tabla de valores de f en los puntos que se especifican. Con esos resultados, formular una conjetura sobre el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Investigar analíticamente si existe el límite y estudiar la continuidad de la función.

$$19. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Curva: } y = 0$$

$$\text{Puntos: } (1, 0),$$

$$(0,5, 0), (0,1, 0),$$

$$(0,01, 0), (0,001, 0)$$

$$\text{Curva: } y = x$$

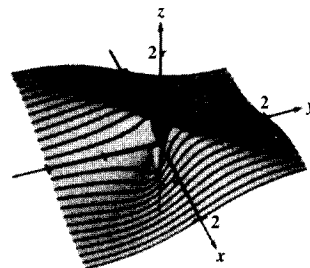
$$\text{Puntos: } (1, 1),$$

$$(0,5, 0,5),$$

$$(0,1, 0,1),$$

$$(0,01, 0,01),$$

$$(0,001, 0,001)$$



$$20. f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Curva: } y = 0$$

$$\text{Puntos: } (1, 0),$$

$$(0,5, 0),$$

$$(0,1, 0),$$

$$(0,01, 0),$$

$$(0,001, 0)$$

$$\text{Curva: } y = x$$

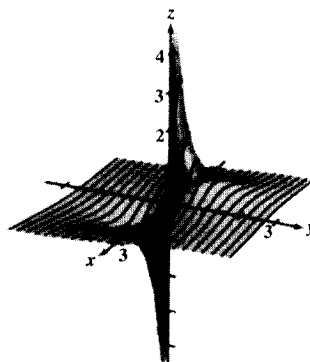
$$\text{Puntos: } (1, 1),$$

$$(0,5, 0,5),$$

$$(0,1, 0,1),$$

$$(0,01, 0,01),$$

$$(0,001, 0,001)$$



$$21. f(x, y) = -\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\text{Curva: } x = y^2$$

$$\text{Puntos: } (1, 1),$$

$$(0,25, 0,5),$$

$$(0,01, 0,1),$$

$$(0,0001, 0,01),$$

$$(0,000001, 0,001)$$

$$\text{Curva: } x = -y^2$$

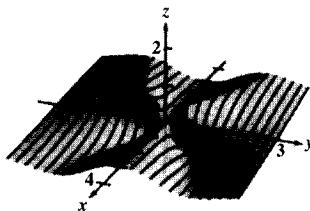
$$\text{Puntos: } (-1, 1),$$

$$(-0,25, 0,5),$$

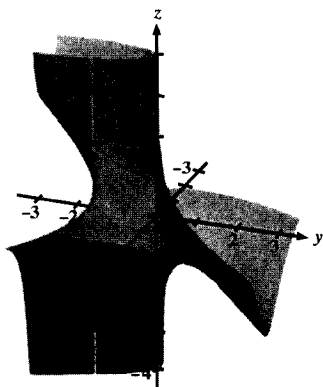
$$(-0,01, 0,1),$$

$$(-0,0001, 0,01),$$

$$(-0,000001, 0,001)$$



$$22. f(x, y) = \frac{2x - y^2}{2x^2 + y}$$

Curva: $y = 0$ Puntos: $(1, 0)$, $(0, 25, 0)$, $(0, 01, 0)$, $(0, 001, 0)$, $(0, 000001, 0)$ Curva: $y = x$ Puntos: $(1, 1)$, $(0, 25, 0, 25)$, $(0, 01, 0, 01)$, $(0, 001, 0, 001)$, $(0, 0001, 0, 0001)$ 

En los Ejercicios 23-28, representar la función con ayuda de una calculadora y hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ (si existe).

$$23. f(x, y) = \sin x + \sin y \quad 24. f(x, y) = \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$$

$$25. f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2} \quad 26. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}$$

$$27. f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + 2y^6} \quad 28. f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

En los Ejercicios 29-32, usar coordenadas polares para calcular el límite. [Ayuda: Hacer $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, y observar que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ es equivalente a $r \rightarrow 0$.]

$$29. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad 30. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$31. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad 32. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

En los Ejercicios 33-36, analizar la continuidad de la función.

$$33. f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad 34. f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 - 4}$$

$$35. f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y} \quad 36. f(x, y, z) = xy \sin z$$

En los Ejercicios 37-40, investigar la continuidad de la función compuesta $f \circ g$.

$$37. f(t) = t^2 \quad 38. f(t) = \frac{1}{t}$$

$$g(x, y) = 3x - 2y \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$39. f(t) = \frac{1}{t} \quad 40. f(t) = \frac{1}{4 - t}$$

$$g(x, y) = 3x - 2y \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

En los Ejercicios 41-44, calcular los límites

$$a) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$b) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$41. f(x, y) = x^2 - 4y \quad 42. f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$43. f(x, y) = 2x + xy - 3y \quad 44. f(x, y) = \sqrt{y}(y + 1)$$

45. Probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$$

supuesto que $f(x, y)$ tiende a L_1 y $g(x, y)$ tiende a L_2 cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

46. Demostrar que si f es continua y $f(a, b) < 0$, existe un δ -entorno centrado en (a, b) tal que $f(x, y) < 0$ en todo punto (x, y) de ese entorno.

47. **Para pensar** Si $f(2, 3) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y)?$$

Razonar la respuesta.

48. **Para pensar** Si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y) = 4$$

¿se puede concluir algo sobre $f(2, 3)$? Razonar la respuesta.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 49-52, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar algún ejemplo que ratifique su falsedad.

49. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

50. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

51. Si f es continua para todos los x , y no nulos, y $f(0, 0) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

52. Si g y h son funciones continuas de x e y , y $f(x, y) = g(x) + h(y)$, entonces f es continua.

CONTENIDO ▀

- Derivadas parciales de una función de dos variables ▀
- Derivadas parciales de una función de tres o más variables ▀
- Derivadas parciales de orden superior ▀



JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

La introducción de las derivadas parciales se llevó a cabo años después de los trabajos de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron, independientemente, varios artículos sobre dinámica en los que utilizan buena parte de la teoría de las derivadas parciales. En esos trabajos, manejaban funciones de dos o más variables con el propósito de investigar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.



12.3

Derivadas parciales

Derivadas parciales de una función de dos variables

En las aplicaciones en que intervienen funciones de varias variables suele presentarse la cuestión de cómo resulta afectada la función por un cambio en una de sus variables independientes. Se puede contestar esta pregunta considerando por separado esa variable independiente. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico puede realizar varias veces el experimento, con distintas cantidades de ese catalizador cada vez, mientras mantiene constantes todas las demás variables, tales como temperatura y presión. Un procedimiento análogo sirve para hallar el ritmo de cambio de una función f con respecto a una de sus varias variables independientes. Este proceso se llama **derivación parcial** y el resultado se llama la **derivada parcial** de f respecto de esa variable independiente elegida.

DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f respecto de x e y son las funciones f_x y f_y definidas como

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre que el límite existe.

Esta definición significa que, dada $z = f(x, y)$, para calcular f_x debemos considerar a y como constante y derivar respecto de x . Del mismo modo, para hallar f_y mantenemos x constante y derivamos respecto de y .

EJEMPLO 1 Cálculo de derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$$

Solución: Considerando y como constante y derivando en x obtenemos

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y$$

Considerando ahora x como constante y derivando en y , se obtiene

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3$$

□

NOTACIÓN PARA LAS DERIVADAS PARCIALES

Dada $z = f(x, y)$, sus derivadas parciales f_x, f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a, b)} = f_x(a, b) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a, b)} = f_y(a, b)$$

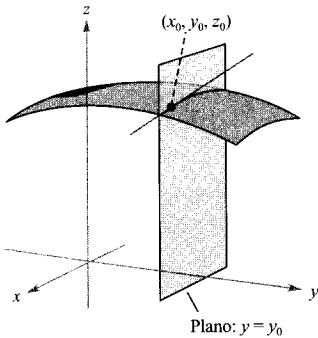


FIGURA 12.26

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = (pendiente en la dirección x).

EJEMPLO 2 Cálculo de las primeras derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, hallar f_x y f_y , y evaluarlas en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución: Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y}$$

la derivada parcial de f respecto de x en $(1, \ln 2)$ es

$$f_x(1, \ln 2) = e^{\ln^2 2}(2 \ln 2) + e^{\ln^2 2} = 4 \ln 2 + 2$$

Como

$$f_y(x, y) = xe^{x^2y}(x^2) = x^3e^{x^2y}$$

la derivada parcial de f respecto de y en $(1, \ln 2)$ es

$$f_y(1, \ln 2) = e^{\ln^2 2} = 2 \quad \square$$

Las derivadas parciales de una función de dos variables $z = f(x, y)$ admiten una interesante interpretación geométrica. Si $y = y_0$, $z = f(x, y_0)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como muestra la Figura 12.26. Por tanto,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

da la pendiente de esa curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Nótese que tanto la curva como la recta tangente están en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

da la pendiente de la curva intersección de $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como indica la Figura 12.27.

Lo que viene a decirnos que los valores de $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ en el punto (x_0, y_0, z_0) dan las pendientes de la superficie en las direcciones x e y .

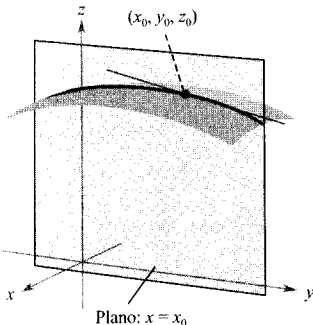


FIGURA 12.27

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = (pendiente en la dirección y).

EJEMPLO 3 Cálculo de las pendientes de una superficie en las direcciones x e y

Hallar las pendientes de la superficie de ecuación

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ en la dirección x y en la dirección y .

Solución: Las derivadas parciales de f respecto de x e y son

$$f_x(x, y) = -x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

Así pues, la pendiente en la dirección x es

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{Figura 12.28a}$$

y en la dirección y es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2 \quad \text{Figura 12.28b}$$

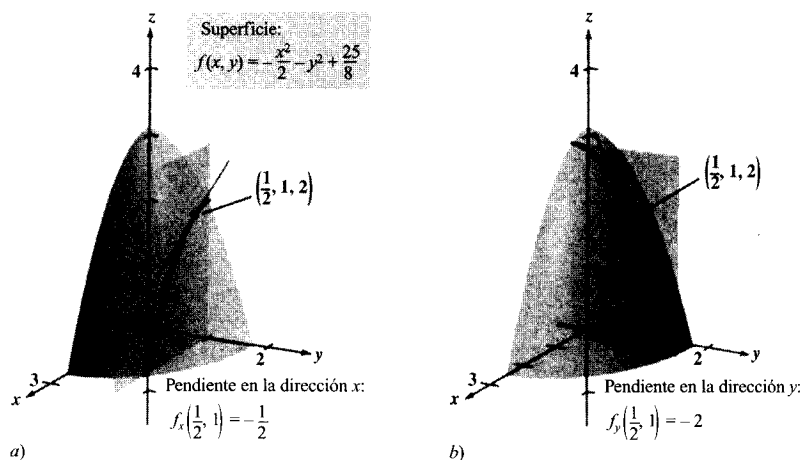


FIGURA 12.28 □

EJEMPLO 4 Cálculo de las pendientes de una superficie en las direcciones x e y

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto $(1, 2, 1)$, en las direcciones x e y .

Solución: Las derivadas parciales de f respecto de x e y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2(y - 2)$$

Por tanto, las pendientes en las direcciones x e y son

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como indica la Figura 12.29. □

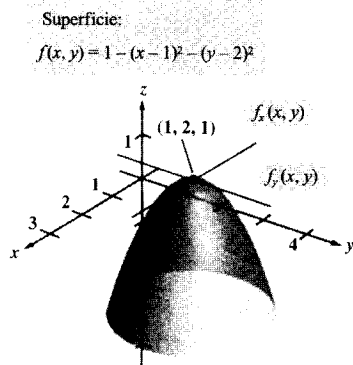


FIGURA 12.29

Con independencia del número de variables involucradas, las derivadas parciales siempre pueden interpretarse como *ritmos de cambio*.

EJEMPLO 5 Las derivadas parciales como ritmos de cambio

El área de un paralelogramo de lados adyacentes a y b , con ángulo θ entre ellos, viene dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$ (Figura 12.30).

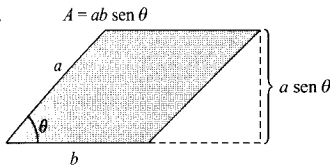


FIGURA 12.30

El área del paralelogramo es $ab \operatorname{sen} \theta$.

- a) Calcular el ritmo de cambio de A respecto de a para $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- b) Calcular el ritmo de cambio de A respecto de θ para $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Solución:

- a) Para calcular el ritmo de cambio respecto de a , mantenemos b y θ constantes y derivamos en a , con lo que obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta \quad \text{Derivada parcial respecto de } a$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10 \quad \text{Sustituir } b \text{ y } \theta$$

- b) Ahora mantenemos constantes a y b , y derivamos respecto de θ :

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \quad \text{Derivada parcial respecto de } \theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos (\pi/6) = 100\sqrt{3} \quad \text{Sustituir } a, b \text{ y } \theta \quad \square$$

Derivadas parciales de funciones de tres o más variables

El concepto de derivada parcial admite extensión a tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales, cada una de las cuales se calcula manteniendo constantes dos de las variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w respecto de x , consideramos y, z como constantes y derivamos respecto de x . Un proceso similar define las derivadas parciales de w respecto de y o respecto de z .

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hay n derivadas parciales, denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Al calcular la derivada parcial respecto de una de las variables, hay que mantener constantes las demás variables y derivar respecto de la variable elegida.

EJEMPLO 6 Cálculo de derivadas parciales

- a) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ respecto de z , consideramos x e y como constantes. Se obtiene así

$$\frac{\partial}{\partial z} [xy + yz^2 + xz] = 2yz + x$$

- b) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$ respecto de z , consideramos x e y constantes, y la regla del producto permite escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z) \frac{\partial}{\partial z} [\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z) \frac{\partial}{\partial z} [z] \\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z) \\ &= 2z \cos(xy^2 + 2z) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z) \end{aligned}$$

- c) Para calcular la derivada parcial de $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ respecto de w , consideramos x, y, z constantes y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{x + y + z}{w} \right] = -\frac{x + y + z}{w^2} \quad \square$$

| Nota. Obsérvese que las dos notaciones para las derivadas parciales tienen convenios diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \begin{array}{l} \text{Orden de derecha} \\ \text{a izquierda} \end{array}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} \quad \begin{array}{l} \text{Orden de izquierda} \\ \text{a derecha} \end{array}$$

Puede recordarse el orden en ambas notaciones sin más que darse cuenta de que se deriva primero respecto de la variable que está «más cerca» de f .

Derivadas parciales de orden superior

Tal como sucedía para las derivadas ordinarias, es posible hallar las derivadas parciales segundas, terceras o de orden más alto, supuesto que existan. Se denotan por el orden en el que se van efectuando las derivaciones. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces respecto de x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces respecto de y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivar primero respecto de x , y luego respecto de y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

4. Derivar primero respecto de y , y después respecto de x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

La tercera y la cuarta se llaman **derivadas parciales cruzadas** (o **mixtas**).

EJEMPLO 7 Cálculo de derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y evaluar $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución: Comenzamos hallando las derivadas parciales de primer orden.

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Ahora, derivamos cada una de éstas respecto de x e y .

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \quad \text{y} \quad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

Para $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$. □

TEOREMA 12.3**IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES CRUZADAS**

Si f es una función de x e y , con f_{xy} , f_{yx} continuas en un disco abierto R , entonces, para todo (x, y) en R es

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

El Teorema 12.3 se aplica también cuando hay *tres o más variables*, siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Así, si $w = f(x, y, z)$ tiene continuas todas sus derivadas parciales de segundo orden, el orden de derivación en sus derivadas parciales de segundo orden es irrelevante. Y si tiene todas las derivadas parciales de tercer orden continuas, el orden de derivación en sus derivadas parciales de tercer orden es asimismo irrelevante.

EJEMPLO 8 Cálculo de derivadas parciales de orden superior

Probar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxx} = f_{zzx}$ para la función

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$$

Solución: Derivadas parciales primeras:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \quad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Segundas derivadas parciales (nótese que las dos primeras son iguales):

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

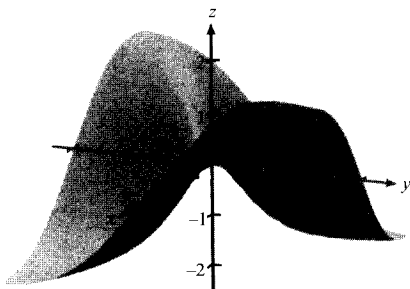
Terceras derivadas parciales (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zxx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} \quad \square$$

| Nota. En el Ejemplo 7 se observa que las dos derivadas parciales mixtas son iguales. El Teorema 12.3 establece condiciones suficientes para que tal cosa ocurra.

Ejercicios de la Sección 12.3

Para pensar En los Ejercicios 1-4, usar la gráfica de la superficie para determinar el signo de la derivada parcial que se especifica.



1. $f_x(4, 1)$
2. $f_y(-1, -2)$
3. $f_y(4, 1)$
4. $f_x(-1, -1)$

En los Ejercicios 5-24, hallar las dos derivadas parciales primeras.

5. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$
6. $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 7$
7. $z = x\sqrt{y}$
8. $z = x^2 - 3xy + y^2$
9. $z = x^2e^{2y}$
10. $z = xe^{x/y}$
11. $z = \ln(x^2 + y^2)$
12. $z = \ln\sqrt{xy}$
13. $z = \ln\frac{x+y}{x-y}$
14. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{4y^2}{x}$
15. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
16. $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
17. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$
18. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
19. $z = \operatorname{tg}(2x - y)$
20. $z = \operatorname{sen} 3x \cos 3y$
21. $z = e^y \operatorname{sen} xy$
22. $z = \cos(x^2 + y^2)$
23. $f(x, y) = \int_x^y (t^2 - 1) dt$
24. $f(x, y) = \int_x^y (2t + 1) dt + \int_y^x (2t - 1) dt$

En los Ejercicios 25-28, utilizar la definición de las derivadas parciales mediante límites con el fin de hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

25. $f(x, y) = 2x + 3y$
26. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$
27. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
28. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

En los Ejercicios 29-32, calcular las pendientes de la superficie en las direcciones x e y en el punto indicado.

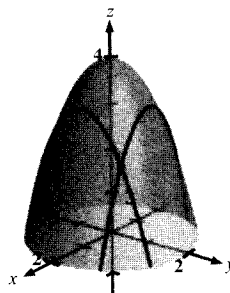


FIGURA E.29

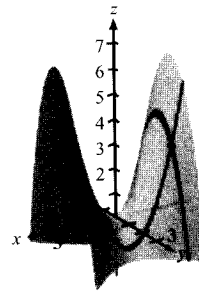


FIGURA E.30

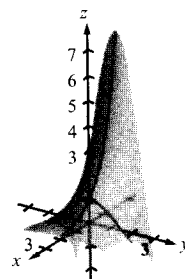


FIGURA E.31

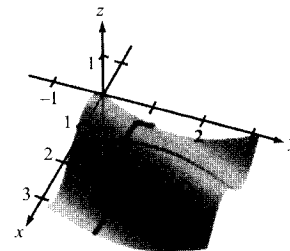


FIGURA E.32

29. $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $(1, 1, 2)$
30. $h(x, y) = x^2 - y^2$, $(-2, 1, 3)$
31. $z = e^{-x} \cos y$, $(0, 0, 1)$
32. $z = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x - y)$, $(\pi/4, \pi/3, 1/2)$

En los Ejercicios 33-36, evaluar f_x y f_y en el punto que se indica.

- | Función | Punto |
|---|---------------------------|
| 33. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ | $(2, -2, -\frac{\pi}{4})$ |
| 34. $f(x, y) = \operatorname{arcsen} xy$ | $(1, 0, \frac{\pi}{2})$ |
| 35. $f(x, y) = xy/(x - y)$ | $(2, -2, -1)$ |
| 36. $f(x, y) = \frac{4xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | $(1, 0, 0)$ |
| 37. Para pensar Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas parciales f_x, f_y sean siempre positivas. | |

38. **Para pensar** Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuya derivada f_x sea siempre negativa y cuya derivada f_y sea siempre positiva.

En los Ejercicios 39-42, representar en una calculadora la curva intersección de la superficie con el plano. Calcular la pendiente de la curva en el punto propuesto.

<u>Superficie</u>	<u>Plano</u>	<u>Punto</u>
39. $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$	$x = 2$	$(2, 3, 6)$
40. $z = x^2 + 4y^2$	$y = 1$	$(2, 1, 8)$
41. $z = 9x^2 - y^2$	$y = 3$	$(1, 3, 0)$
42. $z = 9x^2 - y^2$	$x = 1$	$(1, 3, 0)$

En los Ejercicios 43-46, hallar todos los valores de x e y tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

43. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 16y + 3$
 44. $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$
 45. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$
 46. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

En los Ejercicios 47-54, hallar las cuatro derivadas parciales de segundo orden y observar que las cruzadas son iguales.

47. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$ 48. $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$
 49. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 50. $z = \ln(x - y)$
 51. $z = e^x \operatorname{tg} y$ 52. $z = xe^y + ye^x$
 53. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 54. $z = \operatorname{sen}(x - 2y)$

En los Ejercicios 55-58, usar cálculo simbólico en una calculadora para hallar las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función. Averiguar si existen valores de x e y tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

55. $f(x, y) = x \sec y$ 56. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
 57. $f(x, y) = \ln \frac{x}{x^2 + y^2}$ 58. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$

En los Ejercicios 59-64, hallar las primeras derivadas parciales respecto de x , y , z .

59. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 60. $w = \frac{xy}{x + y + z}$

61. $F(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 62. $G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$
 63. $H(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$
 64. $f(x, y, z) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2$

En los Ejercicios 65-68, verificar que las derivadas parciales cruzadas f_{xy} , f_{yx} y f_{yz} son iguales.

65. $f(x, y, z) = xyz$
 66. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$
 67. $f(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} yz$
 68. $f(x, y, z) = \frac{x}{y + z}$

Ecuación de Laplace En los Ejercicios 69-72, probar que la función satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = 0$.

69. $z = 5xy$ 70. $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \operatorname{sen} x$
 71. $z = e^x \operatorname{sen} y$ 72. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Ecuación de ondas En los Ejercicios 73 y 74, demostrar que la función satisface la ecuación de ondas $\partial^2 z / \partial t^2 = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

73. $z = \operatorname{sen}(x - ct)$ 74. $z = \operatorname{sen} \omega ct \operatorname{sen} \omega x$

Ecuación del calor En los Ejercicios 75 y 76, verificar que la función satisface la ecuación del calor $\partial z / \partial t = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

75. $z = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$ 76. $z = e^{-t} \operatorname{sen} \frac{x}{c}$

77. **Coste marginal** Una empresa produce dos modelos de un mismo producto. El coste de producción de x unidades del primero e y unidades del segundo viene dado por

$$C = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1.050$$

- a) Calcular los costes marginales ($\partial C / \partial x$ y $\partial C / \partial y$) cuando $x = 80$ e $y = 20$.
 b) Cuando se requiera aumentar la producción, ¿qué modelo hará incrementar más el coste de producción?

- 78. Productividad marginal** Consideremos la función de producción de Cobb-Douglas

$$f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$$

Cuando $x = 1.000$ e $y = 500$, hallar

- a) la productividad marginal del trabajo, $\partial f/\partial x$,
 b) la productividad marginal del capital, $\partial f/\partial y$.
- 79. Para pensar** Sea N el número de inscritos en una universidad, p el coste de la alimentación y alojamiento, y t el coste de la matrícula. Supongamos que N es una función de p y de t , con $\partial N/\partial p < 0$ y $\partial N/\partial t < 0$. ¿Qué información se deduce del hecho de que las dos derivadas parciales son negativas?
- 80. Inversión** El valor de una inversión inicial de \$1.000 a una tasa de interés del 10 por 100 compuesta anualmente es

$$V(I, R) = 1.000 \left[\frac{1 + 0,10(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

donde I es la tasa anual de inflación y R la tasa de impuestos del inversor. Calcular $V_I(0,03, 0,28)$ y $V_R(0,03, 0,28)$. Determinar cuál de las dos tasas, la de inflación o la de los impuestos, tiene una influencia más «negativa» sobre el crecimiento de la inversión.

- 81. Distribución de temperaturas** La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa viene dada por

$$T = 500 - 0,6x^2 - 1,5y^2$$

donde x, y se miden en metros. Calcular, en el punto $(2, 3)$, el ritmo de cambio de la temperatura con respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones x e y .

- 82. Temperatura aparente** Una medida de cómo siente una persona el calor lo da el índice de temperatura aparente, que admite como modelo

$$A = 0,885t - 22,4h + 1,20th - 0,544$$

donde A es la temperatura aparente en $^{\circ}\text{C}$, t la temperatura del aire, y h la humedad relativa en forma decimal. (Fuente: *The UMAP Journal*, 1984.)

- a) Hallar $\partial A/\partial t$ y $\partial A/\partial h$ cuando $t = 30^{\circ}$ y $h = 0,80$.
 b) ¿Quién influye más sobre A , la temperatura del aire o la humedad? Explicar la respuesta.

- 83. Utilidad marginal** La función utilidad $U = f(x, y)$ mide la satisfacción (utilidad) que encuentra una persona al consumir dos productos x e y . Supongamos que

$$U = -5x^2 + xy - 3y^2$$

- a) Calcular la utilidad marginal del producto x .
 b) Determinar la utilidad marginal del producto y .
 c) Cuando $x = 2$ e $y = 3$, una persona ¿debe consumir una unidad más de x o de y ? Razonar la respuesta.
 d) Usar una calculadora para representar la función. Interpretar las utilidades marginales de los productos x e y gráficamente.

- 84. Ley de los gases ideales** La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, siendo P la presión, V el volumen, n el número de moles de gas, R una constante (la constante del gas) y T la temperatura absoluta. Probar que

$$\frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

- 85.** Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
 b) Usando la definición de las derivadas parciales, hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

$$\left[\text{Ayuda: } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \right]$$

- c) Usando la definición de las derivadas parciales, calcular $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.
 d) A la vista del Teorema 12.3 y del resultado de c), ¿qué se puede decir acerca de f_{xy} o de f_{yx} ?

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 86-89, discutir si el enunciado es correcto o no. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

- 86.** Si $z = f(x, y)$ y $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y$, entonces $z = c(x + y)$.
87. Si $z = f(x)g(y)$, entonces $(\partial z/\partial x) + (\partial z/\partial y) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$.
88. Si $z = e^{xy}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.
89. Si una superficie cilíndrica $z = f(x, y)$ tiene sus rectas generatrices paralelas al eje y , entonces $\partial z/\partial y = 0$.
90. Sea $f(x, y) = \int_x^y \sqrt{1 + t^3} dt$. Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

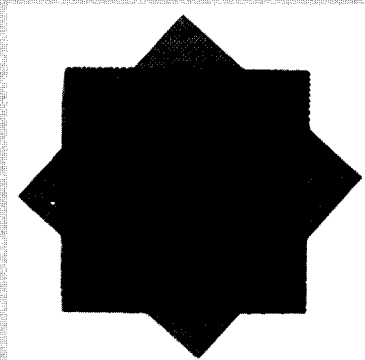
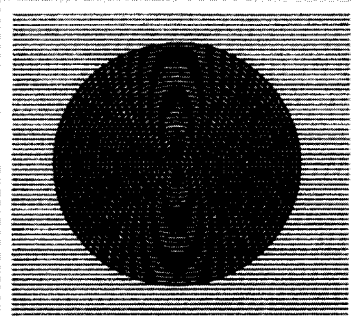
Lea el artículo «Moiré Fringes and the Conic Sections», de Mike Cullen, en *The College Mathematics Journal* (noviembre 1990), donde se describe cómo dos familias de curvas de nivel, dadas por

$$f(x, y) = a \quad \text{y} \quad g(x, y) = b$$

pueden formar franjas de Moiré. Tras la lectura del artículo, redacte una explicación de cómo está relacionada la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

con esas franjas de Moiré formadas por intersección de las dos familias de curvas de nivel. Utilice como modelo, en su explicación, alguna de las figuras siguientes.



12.4

Diferenciales

- CONTENIDO ▪
- Incrementos y diferenciales ▪
- Diferenciabilidad ▪
- Aproximación por diferenciales ▪

Incrementos y diferenciales

En esta sección generalizamos a funciones de varias variables las nociones de incremento y diferencial. En la Sección 3.9, la diferencial de $y = f(x)$ se definió como

$$dy = f'(x) dx$$

Para funciones $z = f(x, y)$ de dos variables se va a utilizar una terminología similar. Esto es, Δx y Δy son los incrementos de x e y , y el incremento de z viene dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Incremento de z

DEFINICIÓN DE LA DIFERENCIAL TOTAL

Si $z = f(x, y)$, y Δx , Δy son incrementos de x e y , las **diferenciales** de las variables independientes x e y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

Esta definición se extiende de manera obvia a funciones de tres o más variables. Así, si $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, $du = \Delta u$, y la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du$$

EJEMPLO 1 Cálculo de la diferencial total

a) La diferencial total dz para $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ es

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2) dx + (2x \cos y - 6x^2y) dy \end{aligned}$$

b) La diferencial total dw para $w = x^2 + y^2 + z^2$ es

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ &= 2x dx + 2y dy + 2z dz \end{aligned} \quad \square$$

Diferenciabilidad

En la Sección 3.9 vimos que para una función *derivable* $y = f(x)$, se puede utilizar (para Δx pequeños) la diferencial $dy = f'(x) dx$ como aproximación del valor del incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando una función de dos variables admite una aproximación análoga se dice que es **diferenciable**, como se recoge en la próxima definición.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. La función f se dice que es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todo punto de R .

EJEMPLO 2 Demostración de que una función es diferenciable

Probar que la función $f(x, y) = x^2 + 3y$ es diferenciable en todo punto del plano.

Solución: Llamando $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) del plano es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y \\ &= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\ &= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todos los puntos del plano. \square

Debe tenerse cuidado al consultar textos de Matemáticas, ya que en muchos de ellos se utiliza el término «diferenciable» en el caso de una variable como sinónimo de derivable. Con ese convenio, una función de una variable resulta ser diferenciable simplemente por tener derivada. Bien al contrario, para que una función de dos variables sea diferenciable, no basta (véase Ejemplo 5) que existan sus derivadas parciales f_x, f_y . El próximo teorema proporciona condiciones suficientes para garantizar la diferenciability de una función de dos variables.

TEOREMA 12.4

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

Si f es una función de x e y , con f_x y f_y continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

Demostración: Sea S la superficie definida por $z = f(x, y)$, con f, f_x y f_y continuas en (x, y) . Sean A, B y C puntos de S (Figura 12.31). De la figura se deduce que el cambio en f entre A y C viene dado por

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] \\ &= \Delta z_1 + \Delta z_2\end{aligned}$$

Entre A y B , y es constante y x cambia. Por tanto, del teorema del valor medio se sigue que existe un valor x_1 entre x y $x + \Delta x$ tal que

$$\Delta z_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x_1, y)\Delta x$$

Análogamente, entre B y C , x es constante e y cambia, luego hay un valor y_1 entre y e $y + \Delta y$ para el cual

$$\Delta z_2 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = f_y(x + \Delta x, y_1)\Delta y$$

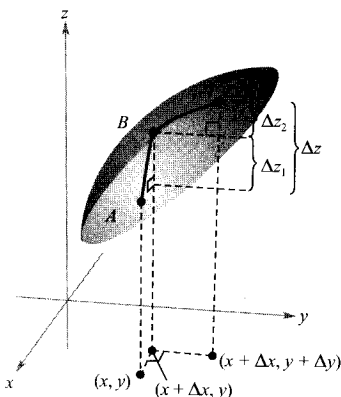


FIGURA 12.31

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Combinando esos dos resultados obtenemos

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = f_x(x_1, y)\Delta x + f_y(x + \Delta x, y_1)\Delta y$$

Si definimos ε_1 y ε_2 como

$$\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x, y) \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = f_y(x + \Delta x, y_1) - f_y(x, y)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 = [\varepsilon_1 + f_x(x, y)]\Delta x + [\varepsilon_2 + f_y(x, y)]\Delta y \\ &= [f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y] + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \end{aligned}$$

De la continuidad de f_x y de f_y , y de $x \leq x_1 \leq x + \Delta x$ e $y \leq y_1 \leq y + \Delta y$, se sigue que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$. Así pues, f es, por definición, diferenciable. \square

Aproximación por diferenciales

El Teorema 12.4 viene a decir que tomando $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ suficientemente cercano a (x, y) podemos conseguir que $\varepsilon_1\Delta x$ y $\varepsilon_2\Delta y$ sean insignificantes. En otras palabras, para $\Delta x, \Delta y$ pequeños, podemos usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz$$

La Figura 12.32 ilustra esta aproximación. Recordemos que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ dan las pendientes de la superficie en las direcciones x e y . Eso significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio viene representado por una ecuación lineal en las variables x, y, z , la aproximación de Δz por dz se dice que es una **aproximación lineal**. Volveremos a esta interpretación geométrica en la Sección 12.7.

EJEMPLO 3 Aproximación mediante la diferencial

Utilizar la diferencial para estimar el cambio de

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

cuando (x, y) se desplaza desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(1.01, 0.97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto de z .

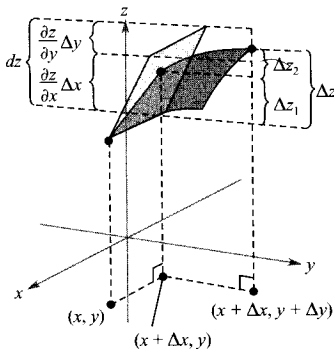


FIGURA 12.32

El cambio exacto de z es Δz . Este cambio puede aproximarse por la diferencial dz .

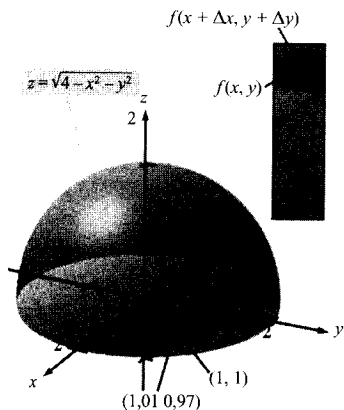


FIGURA 12.33

Cuando (x, y) cambia del punto $(1, 1)$ al punto $(1,01, 0,97)$, el valor de $f(x, y)$ cambia aproximadamente en 0,0137.

Solución: Haciendo $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1,01, 0,97)$ vemos que

$$dx = \Delta x = 0,01 \quad y \quad dy = \Delta y = -0,03$$

Así pues, el cambio en z puede estimarse como

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx dz \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta y \end{aligned}$$

Cuando $x = 1$ e $y = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx -\frac{1}{\sqrt{2}} (0,01) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-0,03) \\ &= \frac{0,02}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}(0,01) \\ &\approx 0,0141 \end{aligned}$$

Aproximación de Δz por dz

En la Figura 12.33 vemos que el cambio exacto corresponde a la diferencia de altura entre dos puntos de un hemisferio, diferencia que viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(1,01, 0,97) - f(1, 1) \\ &= \sqrt{4 - (1,01)^2 - (0,97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \\ &\approx 0,0137 \end{aligned}$$

Valor de Δz

□

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciabilidad, el Teorema 12.4 admite la siguiente extensión a funciones de tres variables: si f es una función de x, y, z con f, f_x, f_y y f_z continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

En la Sección 3.9 utilizamos las diferenciales para estimar el error propagado producido por un error en la medida. Esta aplicación de las diferenciales vuelve a ser posible ahora, como enseña el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Análisis de errores

Se han medido las dimensiones de una caja rectangular con una cota de error de $\pm 0,1$ mm. Los resultados de las medidas (en centímetros) aparecen en la Figura 12.34. Estimar mediante dV el error propagado y el error relativo al calcular el volumen de la caja.

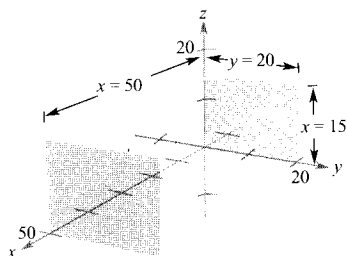


FIGURA 12.34
Volumen = xyz .

Solución: El volumen de la caja es $V = xyz$, de modo que

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz \end{aligned}$$

Como $0,1 \text{ mm} = 0,01 \text{ cm}$, vemos que $dx = dy = dz = \pm 0,01$, luego el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0,01) + (50)(15)(\pm 0,01) + (50)(20)(\pm 0,01) \\ &= 300(\pm 0,01) + 750(\pm 0,01) + 1.000(\pm 0,01) \\ &= 2.050(\pm 0,01) = \pm 20,5 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15.000 \text{ cm}^3$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20,5}{15.000} \approx 0,14 \text{ por } 100 \quad \square$$

Igual que para funciones de una variable, si una función de varias variables es diferenciable en un punto, necesariamente es continua en él.

TEOREMA 12.5

DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , es continua en (x_0, y_0) .

Demostración: Sea f diferenciable en (x_0, y_0) . Denotando $z = f(x, y)$, se tiene

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Ahora bien, por definición, sabemos que Δz viene dado por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Tomando $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0) \end{aligned}$$

Tomando el límite para $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, se ve que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0) . □

Recordemos que la existencia de f_x y de f_y no es suficiente para garantizar que f sea diferenciable, como pone de relieve el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Una función no diferenciable

Probar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$, para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución: Para demostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ basta ver que no es continua en ese punto. A tal fin, miramos los valores límite de $f(x, y)$ por dos caminos que tienden hacia $(0, 0)$, como ilustra la Figura 12.35. Por la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que por la recta $y = -x$ es

$$\lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ no existe, de donde concluimos que f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otra parte, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales tenemos

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

En consecuencia, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

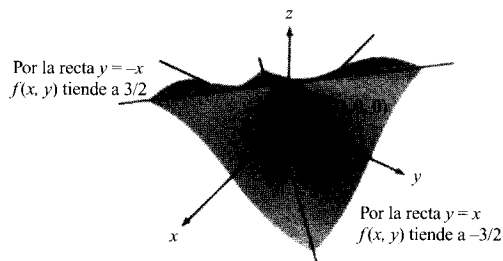
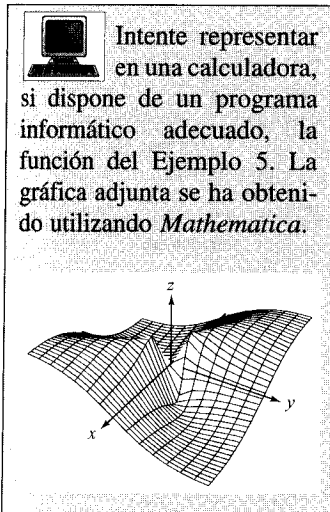


FIGURA 12.35



Ejercicios de la Sección 12.4

En los Ejercicios 1-10, hallar la diferencial total.

1. $z = 3x^2y^3$
2. $z = \frac{x^2}{y}$
3. $z = \frac{-1}{x^2 + y^2}$
4. $z = e^x \sin y$
5. $z = x \cos y - y \cos x$
6. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$
7. $w = 2z^3y \sin x$
8. $w = e^x \cos y + z$
9. $w = \frac{x+y}{z-2y}$
10. $w = x^2yz^2 + \sin yz$

En los Ejercicios 11-16, a) evaluar $f(1, 2)$ y $f(1.05, 2.1)$ y calcular Δz , y b) usar la diferencial total dz para estimar Δz .

11. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
13. $f(x, y) = x \sin y$
14. $f(x, y) = xy$
15. $f(x, y) = 3x - 4y$
16. $f(x, y) = \frac{x}{y}$

En los Ejercicios 17-20, tomar $z = f(x, y)$ de forma adecuada y usar la diferencial total para aproximar la cantidad propuesta.

17. $\sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5^2 + 3^2}$
18. $(2.03)^2(1 + 8.9)^3 - 2^2(1 + 9)^3$
19. $\frac{1 - (3.05)^2}{(5.95)^2} - \frac{1 - 3^2}{6^2}$
20. $\sin [(1.05)^2 + (0.95)^2] - \sin (1^2 + 1^2)$
21. **Área** El área del rectángulo de la figura es $A = lh$. Hallar dA e identificar en la figura las regiones cuyas áreas corresponden a los términos de dA . ¿Qué región representa la diferencia entre ΔA y dA ?

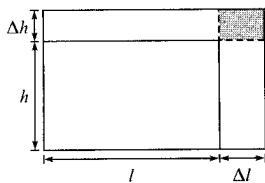


FIGURA E.21

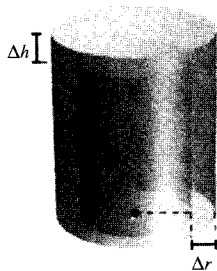


FIGURA E.22

22. **Volumen** El volumen del cilindro circular recto de la figura es $V = \pi r^2 h$. Hallar dV e identificar en la figura los sólidos cuyos volúmenes corresponden a los términos de dV . ¿Qué sólido representa la diferencia entre ΔV y dV ?
23. **Análisis numérico** Al construir un cono circular recto de altura $h = 6$ y radio $r = 3$, se cometen errores Δr y Δh en el radio y en la altura, respectivamente. Completar la tabla para mostrar la relación entre ΔV y dV para los errores que se especifican.

Δr	Δh	dV o dS	ΔV o ΔS	$\Delta V - dV$ o $\Delta S - dS$
0,1	0,1			
0,1	-0,1			
0,001	0,002			
-0,0001	0,0002			

24. **Análisis numérico** Al medir la altura y el radio de un cono circular recto se han obtenido los resultados $h = 20$ metros y $r = 8$ metros. En el proceso de medida se han cometido errores Δh y Δr , respectivamente. Si S denota el área lateral del cono, completar la tabla anterior para poner de manifiesto la relación entre ΔS y dS para los errores indicados.
25. **Volumen** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con errores máximos posibles del 4 por 100 y del 2 por 100, respectivamente. Estimar la cota de error porcentual que resulta para el volumen.
26. **Coordenadas rectangulares a polares** En un mapa se han colocado unos ejes de coordenadas rectangulares en los que el punto de interés tiene coordenadas $(8,5, 3,2)$. Hay un posible error de 0,05 en cada coordenada. Aproximar el error máximo posible en las coordenadas polares de ese punto.
27. **Área** En un triángulo, las medidas de dos lados adyacentes arrojan unos valores de 3 y 4 pulgadas, y la del ángulo entre ellos $\pi/4$. Los posibles errores de medida son de $1/16$ pulgadas en los lados y 0,02 radianes en el ángulo. Estimar el error máximo posible en el cálculo de su área.

28. **Aceleración** La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve por un círculo es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

donde v es la velocidad y r el radio del círculo. Estimar el máximo error porcentual en la aceleración si las cotas de error en v y r son del 2 por 100 y del 1 por 100, respectivamente.

29. **Potencia** La potencia eléctrica viene dada por

$$P = \frac{E^2}{R}$$

donde E es el voltaje y R la resistencia. Aproximar el máximo porcentaje de error posible al calcular la potencia para un voltaje de 200 voltios y una resistencia de 4.000 ohmios, si los posibles errores en las medidas de E y R son 2 por 100 y 3 por 100, respectivamente.

30. **Volumen** Un abrevadero de 16 pies de largo (véase figura) tiene secciones en forma de triángulo isósceles, cuyos lados iguales miden 18 pulgadas y el ángulo entre ellos es θ .

- Expresar el volumen del abrevadero en función de θ y hallar el valor de θ para el cual el volumen es máximo.
- Estimar el cambio en el volumen máximo si el error máximo cometido en las medidas de longitud es de media pulgada y en el ángulo de 2° .

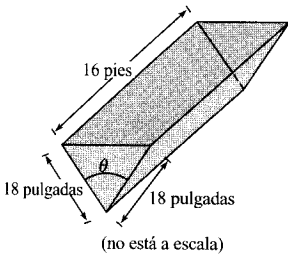


FIGURA E.30

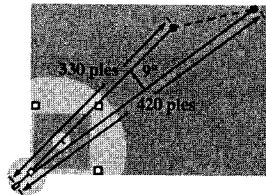


FIGURA E.31

31. **Béisbol** Un jugador de béisbol se encuentra a 330 pies de una cámara de televisión. Un bateador, situado junto a la cámara, golpea una pelota hasta una distancia de 420 pies (véase figura).

- Aproximar la distancia que debe correr el jugador de campo para alcanzar la pelota, sabiendo que la cámara ha girado 9° para seguir la carrera del jugador.
- Estimar el máximo error posible en el resultado del apartado a) si la posición del jugador de campo puede tener hasta 6 pies de error y el ángulo girado por la cámara hasta 1° de error posible.

32. **Resistencia** Dos resistencias conectadas en paralelo producen una resistencia total R dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Aproximar el cambio en R cuando R_1 crece de 10 a 10,5 ohmios y R_2 decrece de 15 a 13 ohmios.

33. **Inductancia** La inductancia L (en microhenrios) de un hilo recto no magnético en el espacio libre es

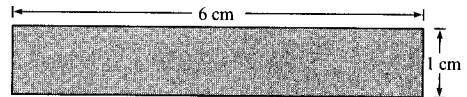
$$L = 0,00021 \left(\ln \frac{2h}{r} - 0,75 \right)$$

donde h es la longitud del hilo en mm y r el radio de su sección. Estimar L cuando $r = 2 \pm \frac{1}{16}$ mm y $h = 100 \pm \frac{1}{100}$ mm.

34. **Péndulo** El período T de un péndulo de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g denota la aceleración de la gravedad. Un péndulo se lleva desde la zona del Canal, donde $g = 32,09$ pies/s² a Groenlandia, donde $g = 32,24$ pies/s². Debido al cambio de temperatura, la longitud del péndulo cambia de 2,5 a 2,48 pies. Aproximar el cambio que sufre el período del péndulo.

35. **Para pensar** La figura muestra un rectángulo y sus medidas aproximadas.

- Dibujar una estrecha franja adosada a él que corresponda a un pequeño aumento de su longitud.
- Dibujar otra estrecha franja adosada a él que corresponda a un pequeño aumento de su anchura.
- Usar los resultados de los apartados a) y b) para averiguar cuál de las dos medidas tiene mayor efecto sobre el área A del rectángulo.
- Verificar la respuesta analíticamente calculando dA si $dl = 0,01$ y $dh = 0,01$.



36. **Para pensar** Consideremos la conversión del punto dado en polares por $(5 \pm 0,05, \pi/18 \pm 0,05)$ a coordenadas rectangulares (x, y) .

- Determinar, por un argumento geométrico, si la precisión en x depende más de la precisión en r o de la precisión en θ . Comprobar la respuesta analíticamente.
- Determinar, por un argumento geométrico, si la precisión en y depende más de la precisión en r o de la precisión en θ . Comprobar la respuesta analíticamente.

37. **Redacción** A la vista de los resultados de los Ejercicios 35 y 36, explicar en unas líneas la importancia de efectuar medidas precisas y de identificar aquellas variables que producen mayores efectos en la fórmula que va a ser aplicada.

38. **Un problema interdisciplinar** Considere medidas y fórmulas que esté utilizando o haya utilizado en otros cursos de Ciencias o de Ingeniería. Explique cómo usar las diferenciales en esa situación con el fin de estimar los posibles errores propagados.

En los Ejercicios 39-42, demostrar que la función es diferenciable, hallando los valores ε_1 y ε_2 que requiere la definición de diferenciabilidad, y comprobar que ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

39. $f(x, y) = x^2 - 2x + y$

40. $f(x, y) = x^2 + y^2$

41. $f(x, y) = x^2y$

42. $f(x, y) = 5x - 10y + y^3$

En los Ejercicios 43 y 44, usar la función para probar que a) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero que b) f no es diferenciable en $(0, 0)$.

$$43. f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$44. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

CONTENIDO

- Reglas de la cadena para funciones de varias variables
- Derivación parcial implícita



12.5

Reglas de la cadena para funciones de varias variables

Reglas de la cadena para funciones de varias variables

El manejo de las diferenciales en la sección anterior abre la puerta a la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos, el primero de los cuales trata una función w de x e y , donde x e y son funciones de una variable independiente t . (Este teorema se demuestra en el apéndice.)

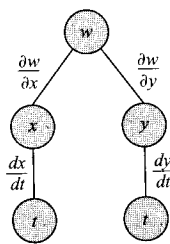


FIGURA 12.36

Regla de la cadena: una variable dependiente w es función de x e y , que son a su vez funciones de t . Este diagrama representa la derivada de w respecto de t .

TEOREMA 12.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y . Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son funciones derivables de t , entonces w es función derivable de t , con

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

| Nota. Esta regla de la cadena puede representarse en esquema como muestra la Figura 12.36.

EJEMPLO 1 La regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \sin t$, $y = e^t$. Calcular dw/dt cuando $t = 0$.

Solución: Por la regla de la cadena para una variable independiente que acabamos de ver, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t\end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, $x = 0$ e $y = 1$, así que

$$\frac{dw}{dt} = 0 - 2 = -2 \quad \square$$

Las reglas de la cadena que introducimos en esta sección proporcionan métodos alternativos para resolver muchos problemas del cálculo de una variable. Así, en el Ejemplo 1 podríamos haber utilizado las técnicas de una variable para hallar dw/dt expresando w como función de t :

$$\begin{aligned}w &= x^2y - y^2 \\ &= (\sin t)^2(e^t) - (e^t)^2 \\ &= e^t \sin^2 t - e^{2t}\end{aligned}$$

y derivando a continuación (hágalo como ejercicio).

La regla de la cadena del Teorema 12.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada x_i es función de una sola variable t , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la cadena a ritmos de cambio relacionados

Dos objetos se mueven por trayectorias elípticas de ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{lll}x_1 = 4 \cos t & \text{e} & y_1 = 2 \sin t & \text{Primer objeto} \\ x_2 = 2 \sin 2t & \text{e} & y_2 = 3 \cos 2t & \text{Segundo objeto}\end{array}$$

¿A qué ritmo está cambiando la distancia entre ellos cuando $t = \pi$?

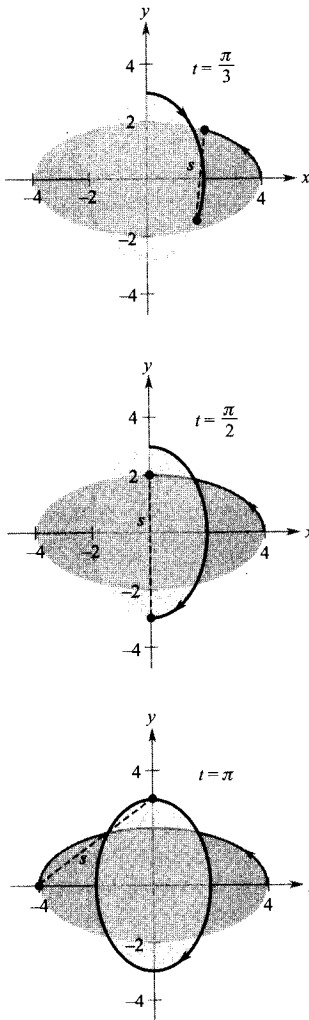


FIGURA 12.37

Trayectorias de dos objetos en órbitas elípticas.

Solución: En la Figura 12.37 vemos que la distancia s entre los dos objetos es

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y cuando $t = \pi$, tenemos $x_1 = -4$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$, luego

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas de x_1 , y_1 , x_2 e y_2 son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4 \operatorname{sen} t = 0 \quad \frac{dy_1}{dt} = 2 \cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cos 2t = 4 \quad \frac{dy_2}{dt} = -6 \operatorname{sen} 2t = 0$$

Por tanto, gracias a la regla de la cadena apropiada sabemos que la distancia está cambiando a un ritmo dado por

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) \\ &= \frac{22}{5} \end{aligned}$$

□

En el Ejemplo 2, s era función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2, y_2 , las cuales eran, a su vez, funciones de una única variable t . Otra clase de funciones compuestas es aquella en que las variables intermedias son, ellas mismas, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$, con $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$, se deduce que w es una función de s y de t , de manera que podemos considerar las derivadas parciales de w respecto de s y respecto de t . Una forma de calcular estas derivadas parciales consiste en escribir w como función explícita de s y t , sustituyendo $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Una vez hecho eso, ya podemos calcular las derivadas parciales de la manera habitual, como ilustra al próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Cálculo de las derivadas parciales por sustitución

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$.

Solución: Sustituyendo $x = s^2 + t^2$, $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$, obtenemos

$$\begin{aligned} w &= 2xy \\ &= 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) \\ &= 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right) \end{aligned}$$

Ahora, para hallar $\partial w/\partial s$, mantenemos t constante y derivamos respecto de s .

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right) = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$

Análogamente, para hallar $\partial w/\partial t$, mantenemos s constante y derivamos respecto de t .

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right) = 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right) = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2} \quad \square$$

El Teorema 12.7 ofrece un método alternativo para calcular las derivadas parciales del Ejemplo 3, sin escribir explícitamente w como función de s y t .

TEOREMA 12.7

REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $w = f(x, y)$, función diferenciable de x e y . Si $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$, y existen las derivadas parciales $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen también y vienen dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Demostración: Para calcular $\partial w/\partial s$, mantenemos t constante y aplicamos el Teorema 12.6, que lleva a la conclusión deseada. Análogamente, para $\partial w/\partial t$, pero manteniendo esta vez s constante. □

| Nota. Esta regla de la cadena se ilustra en el esquema de la Figura 12.38.

EJEMPLO 4 La regla de la cadena con dos variables independientes

Usar la regla de la cadena para calcular $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para

$$w = 2xy$$

donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$.

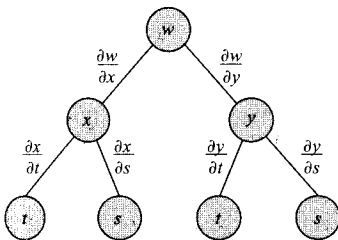


FIGURA 12.38

Regla de la cadena: dos variables independientes.

Solución: (Estas mismas derivadas parciales se calcularon en el Ejemplo 3.) Siguiendo las pautas del Teorema 12.7, mantenemos t constante y derivamos respecto de s .

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= 4\left(\frac{s^2}{t}\right) + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} && \text{Sustituir } y = s/t, x = s^2 + t^2 \\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}\end{aligned}$$

Análogamente, manteniendo s constante se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituir } y = s/t, x = s^2 + t^2 \\ &= 4s - \frac{2s^2 + 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}\end{aligned}$$

□

La regla de la cadena del Teorema 12.7 también admite extensión a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es función diferenciable de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , y cada una de éstas es una función diferenciable de m variables t_1, t_2, \dots, t_m , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

son válidas las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 La regla de la cadena para una función de tres variables

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, para la función

$$w = xy + yz + xz$$

donde $x = s \cos t$, $y = s \sin t$ y $z = t$.

Solución: Por extensión del resultado del Teorema 12.7, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t) + (y + x)(0) \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t)\end{aligned}$$

Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, son $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2\pi$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= (y + z)(-s \sin t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)\end{aligned}$$

luego, para $s = 1$ y $t = 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1) \\ &= 2 + 2\pi\end{aligned}$$

□

Derivación parcial implícita

Vamos a finalizar esta sección aplicando la regla de la cadena al cálculo de la derivada de una función dada en forma **implícita**. Si x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde suponemos que $y = f(x)$ es una función derivable de x , para hallar dy/dx podemos recurrir, claro está, a las técnicas de la Sección 2.5. Sin embargo, veremos que la regla de la cadena proporciona una alternativa conveniente. Si consideramos la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

el Teorema 12.6 nos permite escribir

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para todo x en el dominio de f , sabemos que $dw/dx = 0$, así que

$$F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Pues bien, si $F_y(x, y) \neq 0$, basta recordar que $dx/dx = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

Un procedimiento similar es aplicable al cálculo de las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

TEOREMA 12.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función derivable de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función diferenciable de x e y , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

Este teorema admite extensión a funciones diferenciables de cualquier número de variables.

EJEMPLO 6 Derivación implícita

Hallar dy/dx , dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

| Nota. Comparar las soluciones del Ejemplo 6 con las del Ejemplo 2 de la Sección 2.5.

Solución: Empezamos definiendo una función F como

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$$

Usando ahora el Teorema 12.8, obtenemos

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

de donde se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5} \quad \square$$

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de derivadas parciales

Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, sabiendo que $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

Solución: Con el fin de aplicar el Teorema 12.8, denotemos

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$$

Al ser

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$

$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$

$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

concluimos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 12.5

En los Ejercicios 1-4, hallar dw/dt mediante la regla de la cadena adecuada.

1. $w = x^2 + y^2$
 $x = e^t, y = e^{-t}$
2. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $x = \sin t, y = e^t$
3. $w = x \sec y$
 $x = e^t, y = \pi - t$
4. $w = \ln \frac{y}{x}$
 $x = \cos t, y = \sin t$

En los Ejercicios 5-10, hallar dw/dt , a) usando la versión apropiada de la regla de la cadena, y b) convirtiendo w en una función de t antes de derivar.

5. $w = xy, x = 2 \sin t, y = \cos t$
6. $w = \cos(x - y), x = t^2, y = 1$
7. $w = x^2 + y^2 + z^2, x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$
8. $w = xy \cos z, x = t, y = t^2, z = \arccos t$
9. $w = xy + xz + yz, x = t - 1, y = t^2 - 1, z = t$
10. $w = xyz, x = t^2, y = 2t, z = e^{-t}$

En los Ejercicios 11 y 12, hallar d^2w/dt^2 mediante la regla de la cadena apropiada. Evaluar d^2w/dt^2 en el valor de t que se especifica.

11. $w = \arctg(2xy), x = \cos t, y = \sin t, t = 0$
12. $w = \frac{x^2}{y}, x = t^2, y = t + 1, t = 1$

En los Ejercicios 13-16, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ mediante la regla de la cadena, y evaluarlas en los valores de s y t que se indican.

- | <u>Función</u> | <u>Punto</u> |
|---|--------------------|
| 13. $w = x^2 + y^2$
$x = s + t, y = s - t$ | $s = 2, t = -1$ |
| 14. $w = y^3 - 3x^2y$
$x = e^s, y = e^t$ | $s = 0, t = 1$ |
| 15. $w = x^2 - y^2$
$x = s \cos t, y = s \sin t$ | $s = 3, t = \pi/4$ |
| 16. $w = \sin(2x + 3y)$
$x = s + t, y = s - t$ | $s = 0, t = \pi/2$ |

En los Ejercicios 17-20, hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$, a) aplicando una regla de la cadena y b) convirtiendo w en función de r y θ antes de derivar.

17. $w = x^2 - 2xy + y^2, x = r + \theta, y = r - \theta$
18. $w = \sqrt{4 - 2x^2 - 2y^2}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$
19. $w = \arctg \frac{y}{x}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$
20. $w = \frac{xy}{z}, x = r + \theta, y = r - \theta, z = \theta^2$

En los Ejercicios 21-24, hallar dy/dx por derivación implícita.

21. $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y - 5 = 0$
22. $\sin x + \sec xy - 3 = 0$
23. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + xy = 4$
24. $\frac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

En los Ejercicios 25-32, calcular las derivadas parciales de z por derivación implícita.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
26. $xz + yz + xy = 0$
27. $\operatorname{tg}(x + y) + \operatorname{tg}(y + z) = 1$
28. $z = e^x \sin(y + z)$
29. $x^2 + 2yz + z^2 = 1$
30. $x + \sin(y + z) = 0$
31. $e^{xz} + xy = 0$
32. $x \ln y + y^2z + z^2 = 8$

En los Ejercicios 33-36, hallar las derivadas parciales de w por derivación implícita.

33. $xyz + xzw - yzw + w^2 = 5$
34. $x^2 + y^2 + z^2 + 6xw - 8w^2 = 5$
35. $\cos xy + \sin yz + wz = 20$
36. $w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$

Funciones homogéneas En los Ejercicios 37-40, la función f es homogénea de grado n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Averiguar el grado de cada función homogénea y verificar que

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

37. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
38. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
39. $f(x, y) = e^{x/y}$
40. $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

41. **Área** Sea θ el ángulo entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles, y sea x la longitud de estos lados. Si x está creciendo a razón de $\frac{1}{2}$ metro por hora y θ está creciendo a razón de $\pi/90$ radianes por hora, calcular el ritmo de crecimiento del área cuando $x = 6$ y $\theta = \pi/4$.
42. **Volumen y área superficial** El radio de un cilindro circular recto está creciendo a razón de 6 pulgadas/min y su altura decrece a razón de 4 pulgadas/min. ¿Cuál es el ritmo de cambio de su volumen y de su área cuando el radio es de 12 pulgadas y la altura de 36 pulgadas?
43. **Volumen y área superficial** Repetir el Ejercicio 42 para un cono circular recto.
44. **Volumen y área superficial** Los dos radios de un tronco de cono circular recto están creciendo a razón de 4 cm/min y su altura crece a razón de 12 cm/min (véase figura). Calcular a qué ritmo están creciendo su volumen y su área cuando los radios miden 15 y 25 cm, y la altura es de 10 cm.

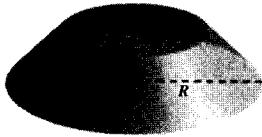


FIGURA E.44

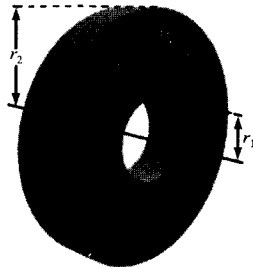


FIGURA E.45

45. **Momento de inercia** El aro cilíndrico de la figura tiene radio interior r_1 y radio exterior r_2 . Su momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$$

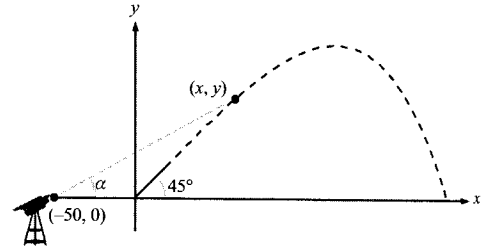
donde m es la masa. Calcular el ritmo de cambio de I cuando los radios son de 6 y 8 cm, supuesto que los dos están cambiando a razón de 2 cm/s.

46. **Ley de los gases ideales** Si en la ley de los gases ideales, $pV = mRT$, donde R es una constante y m la masa del gas, las magnitudes p y V son funciones del tiempo t , calcular dT/dt , el ritmo de cambio de la temperatura respecto del tiempo.

47. **Movimiento de un proyectil** Se lanza un proyectil con ángulo de elevación de 45° y con velocidad inicial de 64 pies/s. Una cámara de TV está situada en el plano de la trayectoria del proyectil, a 50 pies de distancia del punto de lanzamiento (véase figura).

- a) Escribir unas ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil con el tiempo t como parámetro.
b) Expresar el ángulo α de la cámara con la horizontal en términos de x , y , y en términos de t .

- c) Con los resultados de a) y b), calcular dx/dt .
d) Representar en una calculadora α en términos de t . ¿Es simétrica la gráfica respecto del eje del arco parabólico de la trayectoria? ¿En qué instante es máximo el ritmo de cambio de α ?
e) ¿En qué momento es máximo el ángulo α . ¿Ocurre eso en el instante de máxima altura del proyectil?



48. **Movimiento de un proyectil** Consideremos la distancia d entre el punto de lanzamiento y el proyectil en el Ejercicio 47.

- a) Expresar d en términos de x y y , y en términos del parámetro t .
b) Usar el resultado del apartado a) para calcular el ritmo de cambio de d .
c) Determinar el ritmo de cambio de la distancia cuando $t = 2$.
d) ¿Cuándo es mínima d durante el vuelo del proyectil? ¿Tiene lugar cuando el proyectil está en el punto de máxima altura?

49. Demostrar que si $f(x, y)$ es homogénea de grado n , entonces

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

[Ayuda: Tomar $g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Calcular $g'(t)$ y hacer a continuación $t = 1$.]

50. Probar que

$$\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

para $w = f(x, y)$, $x = u - v$ e $y = v - u$.

51. Ilustrar el resultado del Ejercicio 50 con $w = (x - y) \sin(y - x)$.

52. Consideremos la función $w = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Demostrar

$$a) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$b) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

53. Verificar el resultado del Ejercicio 52b con $w = \arctg(y/x)$.

54. **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** Dadas dos funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$, demostrar que las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

se expresan en coordenadas polares en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

55. Verificar el resultado del Ejercicio 54 para las funciones

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \arctg \frac{y}{x}$$

56. **Ecuación de ondas** Probar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]$$

es solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(Esta ecuación describe pequeñas vibraciones transversales de cuerdas elásticas, las de los instrumentos musicales, por ejemplo.)

- CONTENIDO ■
- Derivadas direccionales ■
 - Gradiente de una función de dos variables ■
 - Aplicaciones del gradiente ■
 - Funciones de tres variables ■



12.6

Derivadas direccionales y gradientes

Derivadas direccionales

Supongamos que nos encontramos en la colina de la Figura 12.39 y deseamos averiguar su inclinación hacia el eje z . Si la colina viene representada por $z = f(x, y)$, ya sabemos cómo determinar las pendientes en las direcciones x y y , que vienen dadas respectivamente por las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. En esta sección veremos que esas dos pendientes sirven para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

Para calcular la pendiente en un punto de una superficie, definimos un nuevo tipo de derivada, la **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P(x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f (véase Figura 12.40). La «dirección» de la derivada direccional la da un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

donde θ denota el ángulo del vector con el semieje x positivo. Con el fin de hallar la pendiente deseada, reducimos el problema a dos variables, tomando la intersección de la superficie con el plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo al vector \mathbf{u} (Figura 12.41). Este plano vertical corta a la superficie en una curva C . La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de \mathbf{u} se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

Puede expresarse la pendiente de la curva C como un límite análogo a los que hemos usado en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para definir C corta al plano xy en una recta L , de ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + t \cos \theta$$

$$y = y_0 + t \sin \theta$$



FIGURA 12.39

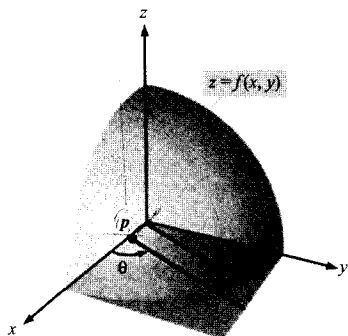


FIGURA 12.40

de manera que, para cada valor de t , el punto $Q(x, y)$ está en la recta L . A cada uno de los puntos P y Q , le corresponde un punto de la superficie.

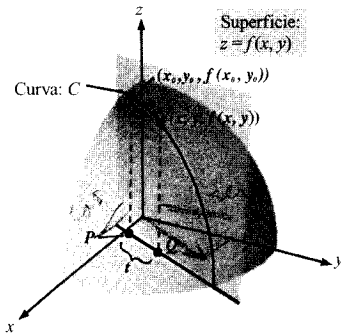


FIGURA 12.41

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \quad \text{Punto sobre } P$$

$$(x, y, f(x, y)) \quad \text{Punto sobre } Q$$

Además, como la distancia entre P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2} = |t|$$

podemos escribir la pendiente de la secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Finalmente, haciendo tender t hacia 0, llegamos a la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables, x e y , y sea $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ un vector unitario. La **derivada direccional de f** en la dirección de \mathbf{u} , que se denota $D_{\mathbf{u}}f$, se define como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que ese límite existe.

El cálculo de derivadas direccionales mediante esta definición es análogo al cálculo de la derivada de una función de una variable utilizando el proceso de límite (Sección 2.1). Una fórmula más sencilla para calcular derivadas direccionales la proporcionan las derivadas parciales f_x y f_y .

TEOREMA 12.9

DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x e y , su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Demostración: Para un punto fijado (x_0, y_0) , sean $x = x_0 + t \cos \theta$ e $y = y_0 + t \sin \theta$. Denotemos $g(t) = f(x, y)$. Al ser f diferenciable, podemos aplicar el Teorema 12.7, del que se deduce

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ e $y = y_0$, luego

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$$

Por la definición de $g'(t)$ es cierto asimismo que

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

En consecuencia, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$. □

Hay infinitas derivadas direccionales en un punto de una superficie, tantas como direcciones especificadas por \mathbf{u} (Figura 12.42). Dos de ellas son las derivadas parciales f_x y f_y :

1. Dirección del semieje x positivo ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0\mathbf{i} + \sin 0\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \sin 0 = f_x(x, y)$$

2. Dirección del semieje y positivo ($\theta = \pi/2$): $\mathbf{u} = \cos \frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{2}\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

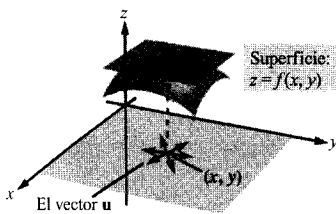


FIGURA 12.42

EJEMPLO 1 Cálculo de una derivada direccional

Calcular la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 \quad \text{Superficie}$$

en $(1, 2)$ en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \mathbf{i} + \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) \mathbf{j} \quad \text{Dirección}$$

Solución: Puesto que f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, así que podemos aplicarle el Teorema 12.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta \\ &= (-2x) \cos \theta + \left(-\frac{y}{2} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

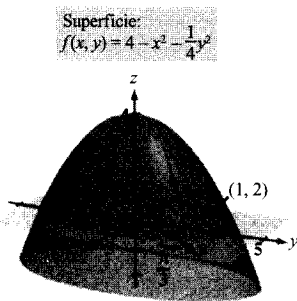


FIGURA 12.43

Evaluando esta expresión en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1,866 \end{aligned}$$

| Nota. En la Figura 12.43 vemos que cabe interpretar la derivada direccional como la pendiente de la superficie en el punto $(1, 2, 2)$ en la dirección del vector unitario \mathbf{u} .

(Véase Figura 12.43.) □

Hemos venido especificando la dirección por medio de un vector unitario \mathbf{u} . Si la dirección se da mediante un vector cuya longitud no es 1, hay que normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del Teorema 12.9.

EJEMPLO 2 Cálculo de una derivada direccional

Calcular la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y \quad \text{Superficie}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \quad \text{Dirección}$$

Solución: Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, luego podemos aplicar el Teorema 12.9. Para ello, hay que hallar un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= (2x \operatorname{sen} 2y)(\cos \theta) + (2x^2 \cos 2y)(\operatorname{sen} \theta) \\ D_{\mathbf{u}}f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2 \operatorname{sen} \pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2 \cos \pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

(Véase Figura 12.44.) □

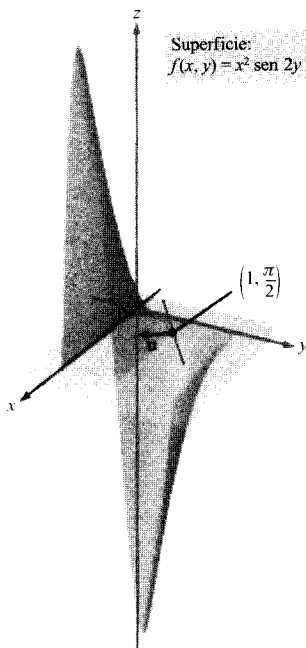


FIGURA 12.44

El gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Tiene múltiples aplicaciones, algunas de las cuales describimos más adelante en esta misma sección.

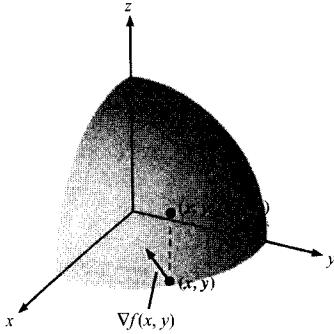


FIGURA 12.45

El gradiente de f es un vector en el plano xy .

DEFINICIÓN DEL GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x , y tal que existen f_x y f_y . El **gradiente de f** , denotado por $\nabla f(x, y)$ es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Otra notación usual para el gradiente es $\mathbf{grad} f(x, y)$. La Figura 12.45 pone de manifiesto que, para cada (x, y) , el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no en el espacio).

| Nota. No se asigna valor alguno al símbolo ∇ en sí mismo. Es un operador, en el mismo sentido que lo es d/dx . Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$ produce el vector $\nabla f(x, y)$.

EJEMPLO 3 Cálculo del gradiente de una función

Calcular el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Solución: Como $f_x(x, y) = y/x + y^2$ y $f_y(x, y) = \ln x + 2xy$, obtenemos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2 \right) \mathbf{i} + (\ln x + 2xy) \mathbf{j}$$

En el punto $(1, 2)$, el gradiente es, por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2 \right) \mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)] \mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \end{aligned} \quad \square$$

Al ser el gradiente de f un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u} como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}]$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente por el vector unitario que determina la dirección. Este útil resultado merece ser destacado como teorema.

TEOREMA 12.10

FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x e y , su derivada direccional en la dirección del vector unitario \mathbf{u} es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

EJEMPLO 4 Cálculo de una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$

Superficie:
 $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$

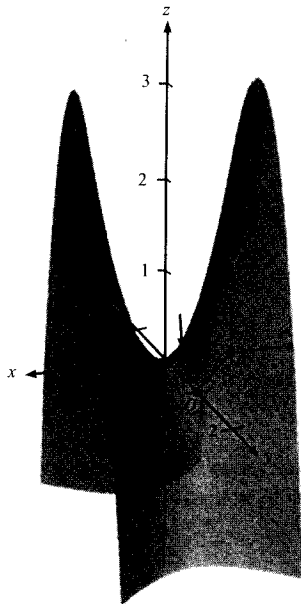


FIGURA 12.46

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $(-\frac{3}{4}, 0)$ en la dirección del segmento recto que va de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$.

Solución: Como las derivadas parciales de f son continuas, f es diferenciable, de manera que le es aplicable el Teorema 12.10. Un vector en la dirección especificada es

$$\begin{aligned}\vec{PQ} = \mathbf{v} &= \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \quad \text{Vector unitario en la dirección de } \vec{PQ}$$

Como $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$, el gradiente en $(-\frac{3}{4}, 0)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \quad \text{Gradiente en } \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

En consecuencia, la derivada direccional en $(-\frac{3}{4}, 0)$ es

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) &= \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{27}{10} \quad \text{Derivada direccional en } \left(-\frac{3}{4}, 0\right)\end{aligned}$$

(Véase Figura 12.46.) □

Aplicaciones del gradiente

Ya hemos visto que hay muchas derivadas direccionales en un punto de una superficie. En muchas aplicaciones es deseable conocer en qué dirección crece $f(x, y)$ más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de máxima pendiente y viene dada por el gradiente, como afirma el próximo teorema.

TEOREMA 12.11 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea f diferenciable en el punto (x, y) .

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ para todo \mathbf{u} .
2. La dirección de *máximo* crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de *mínimo* crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.

| Nota. La parte 2 del Teorema 12.11 afirma que en el punto (x, y) la dirección en la que f crece más deprisa es la dirección del gradiente, $\nabla f(x, y)$.

Demostración: Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces para cualquier dirección (cualquier \mathbf{u}) se tiene

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}) = 0$$

Si $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario \mathbf{u} . Utilizando el producto escalar, podemos aplicar el Teorema 10.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos \phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \phi \end{aligned}$$

de donde se deduce que el valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se consigue cuando $\cos \phi = 1$. Por tanto, $\phi = 0$, de modo que el valor máximo de la derivada direccional ocurre cuando \mathbf{u} tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. Además, ese valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es precisamente

$$\|\nabla f(x, y)\| \cos \phi = \|\nabla f(x, y)\|$$

Análogamente, se demuestra que el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se obtiene cuando $\phi = \pi$, de manera que \mathbf{u} apunta en la dirección opuesta de $\nabla f(x, y)$ (véase la Figura 12.47). \square

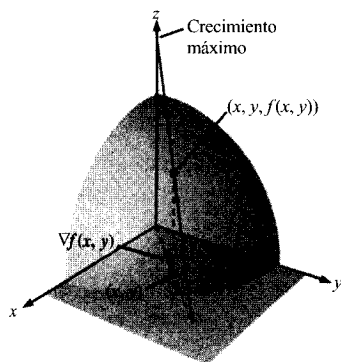


FIGURA 12.47

El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en la dirección de máximo crecimiento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$.

Se puede visualizar una de las propiedades del gradiente imaginando un esquiador que desciende por la ladera de una montaña. Si $f(x, y)$ denota la altura del esquiador, $-\nabla f(x, y)$ marca la *dirección de la brújula* que el esquiador debe tomar en ese punto (x, y) para esquiador por el camino de descenso más rápido. (Nótese que el gradiente es un vector en el plano xy ; no apunta por sí mismo hacia arriba o hacia abajo de la ladera.)

Otra ilustración del gradiente la ofrece la temperatura $T(x, y)$ en los puntos (x, y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x, y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x, y) , como muestra el próximo ejemplo.

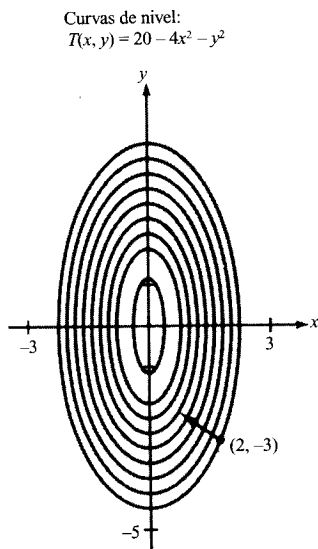


FIGURA 12.48

La dirección de máximo crecimiento para la temperatura en el punto $(2, -3)$ viene dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

EJEMPLO 5 Cálculo de la dirección de máximo crecimiento

La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x, y se miden en centímetros. ¿En qué dirección crece más rápidamente la temperatura en el punto $(2, -3)$? ¿Cuál es ese ritmo de crecimiento?

Solución: El gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}\end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de crecimiento máximo viene dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como muestra la Figura 12.48. Y el ritmo de crecimiento en ella es

$$\begin{aligned}\|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17,09^\circ \text{ por centímetro}\end{aligned}$$

□

La solución del Ejemplo 5 puede inducir a confusión. Si bien el gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la temperatura, no tiene por qué apuntar hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente da la solución local al problema de encontrar el crecimiento máximo relativo de la temperatura en el punto $(2, -3)$. Una vez que se ha abandonado la posición $(2, -3)$, la dirección de máximo crecimiento puede cambiar.

EJEMPLO 6 Cálculo de la trayectoria de un rastreador térmico

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ de una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

Hallar su trayectoria conforme se va moviendo en la dirección de máximo incremento de la temperatura.

Solución: Representemos esa trayectoria por una función posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Un vector tangente en cada punto (x, y) viene dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

Puesto que el rastreador busca máximo crecimiento de temperatura, las direcciones de $\mathbf{r}'(t)$ y de $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son la misma en todo punto de la trayectoria. Por tanto,

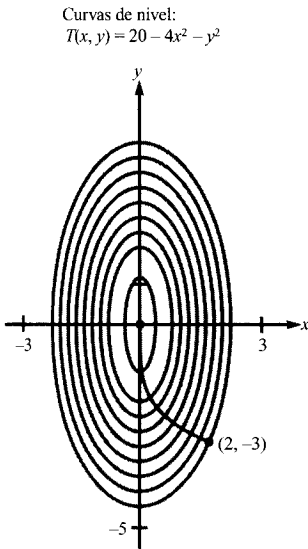
$$-8x = k \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad -2y = k \frac{dy}{dt}$$

donde k depende de t . Despejando en cada ecuación dt/k e igualando los resultados se obtiene

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador parte del punto $(2, -3)$, ha de ser $C = 2/81$. En consecuencia, la trayectoria (Figura 12.49) es

$$x = \frac{2}{81} y^4 \quad \square$$



En la Figura 12.49 da la impresión de que la trayectoria (determinada en cada punto por el gradiente) es ortogonal a cada curva de nivel. Que esto es así, en efecto, queda patente cuando consideramos que la temperatura $T(x, y)$ es constante a lo largo de cada curva de nivel. Por consiguiente, en cualquier punto (x, y) de la curva, el ritmo de cambio de T en la dirección de un vector tangente unitario \mathbf{u} es 0, de modo que podemos escribir

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}T(x, y) = 0 \quad \mathbf{u} \text{ es un vector tangente unitario}$$

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y \mathbf{u} es 0, estos dos vectores son ortogonales. Este resultado se enuncia en el próximo teorema.

FIGURA 12.49
Trayectoria seguida por un rastreador térmico.

TEOREMA 12.12

EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS CURVAS DE NIVEL

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) .

EJEMPLO 7 Cálculo de un vector normal a una curva

Dibujar la curva de nivel correspondiente a $c = 0$ para la función

$$f(x, y) = y - \text{sen } x$$

y hallar vectores normales a ella en varios puntos.

Solución: La curva de nivel para $c = 0$ viene dada por

$$0 = y - \operatorname{sen} x$$

$$y = \operatorname{sen} x$$

como se ilustra en la Figura 12.50a. Como el vector gradiente de f en (x, y) es

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

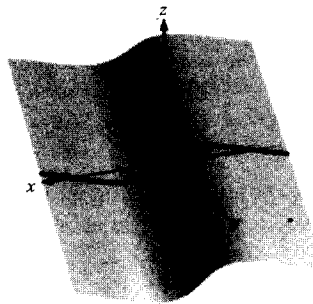
el Teorema 12.12 nos permite concluir que $\nabla f(x, y)$ es normal a la curva de nivel en el punto (x, y) . Algunos vectores gradientes son

$$\nabla f(-\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

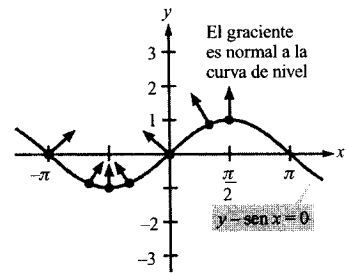
$$\nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \mathbf{j}$$

Otros varios se han dibujado en la Figura 12.50b.



a) La superficie viene dada por $f(x, y) = y - \operatorname{sen} x$



b) La curva de nivel viene dada por $f(x, y) = 0$

FIGURA 12.50 □

Funciones de tres variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se extienden sin dificultad a funciones de tres variables. Tal como sucede a menudo, algunas interpretaciones geométricas se pierden al llevar a cabo esa extensión. Por ejemplo, ya no se puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

Las definiciones y propiedades de las derivadas direccionales y del gradiente se recogen en el siguiente resumen.

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Sea f una función de x, y, z con primeras derivadas continuas. La **derivada direccional de f** en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z)$$

El **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Algunas propiedades del gradiente son:

1. $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 0$ para todo \mathbf{u} .
3. La dirección de *máximo* crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x, y, z)$. El máximo valor de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$\|\nabla f(x, y, z)\| \quad \text{Valor máximo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$$

4. La dirección de *mínimo* crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El mínimo valor de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$-\|\nabla f(x, y, z)\| \quad \text{Valor mínimo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$$

| Nota. El Teorema 12.12 admite generalización a funciones de tres variables. Bajo hipótesis adecuadas,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a la *superficie de nivel* que pasa por (x_0, y_0, z_0) .

EJEMPLO 8 Cálculo del gradiente de una función de tres variables

Hallar $\nabla f(x, y, z)$ para la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$$

y averiguar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(2, -1, 1)$.

Solución: El vector gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de máximo crecimiento es la dada por

$$\nabla f(2, -1, 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

□

Ejercicios de la Sección 12.6

En los Ejercicios 1-12, hallar la derivada direccional de la función en P , en la dirección de \mathbf{v} .

- $f(x, y) = 3x - 4xy + 5y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(4, 3)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
- $f(x, y) = xy$, $P(2, 3)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $P(1, 1)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$
- $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(3, 4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
- $g(x, y) = \arcsen xy$, $P(1, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
- $h(x, y) = e^x \sen y$, $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$
- $h(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$, $P(0, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $P(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
- $h(x, y, z) = x \arctg yz$, $P(4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$
- $h(x, y, z) = xyz$, $P(2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$

En los Ejercicios 13-16, hallar la derivada direccional de la función en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sen \theta \mathbf{j}$.

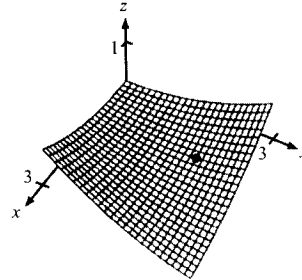
- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $f(x, y) = \frac{y}{x + y}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$
- $f(x, y) = \sen(2x - y)$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$
- $g(x, y) = xe^y$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

En los Ejercicios 17-20, hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección de Q .

- $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $P(3, 1)$, $Q(1, -1)$
- $f(x, y) = \cos(x + y)$, $P(0, \pi)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
- $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$, $P(1, 0, 0)$, $Q(4, 3, 1)$
- $g(x, y, z) = xye^z$, $P(2, 4, 0)$, $Q(0, 0, 0)$

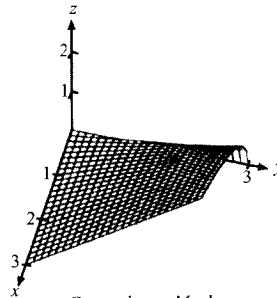
Investigación En los Ejercicios 21 y 22, a) usar la gráfica para estimar las componentes del vector en la dirección de máximo crecimiento de la función en el punto indicado, b) calcular el gradiente en el punto y comparar con la estimación del apartado a), y c) ¿en qué dirección decrece más rápidamente la función? Explicar la respuesta.

21. $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 3xy + y^2)$, $(1, 2)$



Generada por Maple

22. $f(x, y) = \frac{1}{2}y\sqrt{x}$, $(1, 2)$



Generada por Maple

23. **Investigación** Consideremos la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

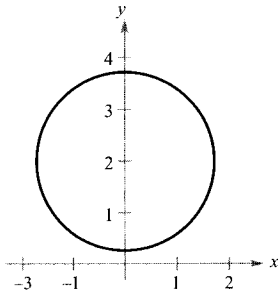
en el punto $(4, -3, 7)$.

- Representar la superficie definida por esa función, con ayuda de una calculadora apropiada.
- Determinar la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(4, -3)$ en función de θ , donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sen \theta \mathbf{j}$. Representar en la calculadora esa función en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Aproximar los ceros de la función del apartado b) e interpretar cada uno de ellos en el contexto del problema.
- Aproximar los puntos críticos de la función del apartado b) e interpretar cada uno de ellos en el contexto del problema.
- Calcular $\|\nabla f(4, -3)\|$ y explicar la relación con las respuestas del punto d).
- Representar la curva de nivel $c = 7$ de la función f . Sobre esa curva, dibujar el vector en la dirección de $\nabla f(4, -3)$, y explicar su relación con la curva de nivel.

24. **Investigación** La figura adjunta da la curva de nivel $c = 2$ de la función

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

- Verificar analíticamente que esa curva es un círculo.
- Dibujar, en el punto $(\sqrt{3}, 2)$ de la curva de nivel, el vector en la dirección de máximo ritmo de crecimiento de la función.
- En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ de la curva de nivel, dibujar el vector en cuya dirección la derivada direccional es 0.
- Representar en una calculadora la superficie con el fin de corroborar las respuestas de a) y c).



En los Ejercicios 25-32, calcular el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto que se especifica.

Función	Punto
25. $h(x, y) = x \operatorname{tg} y$	$(2, \frac{\pi}{4})$
26. $h(x, y) = y \cos(x - y)$	$(0, \frac{\pi}{3})$
27. $g(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$(1, 2)$
28. $g(x, y) = ye^{-x^2}$	$(0, 5)$
29. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(1, 4, 2)$
30. $f(x, y, z) = xe^{yz}$	$(2, 0, -4)$
31. $w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$	$(0, 0, 0)$
32. $w = xy^2z^2$	$(2, 1, 1)$

Los Ejercicios 33-40 se refieren a la función

$$f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

33. Hacer un esbozo de la gráfica de f en el primer octante y marcar en la superficie el punto $(3, 2, 1)$.

34. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.

$$a) \theta = \frac{\pi}{4} \quad b) \theta = \frac{2\pi}{3}$$

35. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.

$$a) \theta = \frac{4\pi}{3} \quad b) \theta = -\frac{\pi}{6}$$

36. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

$$a) \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad b) \mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

37. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

$$a) \mathbf{v} \text{ es el vector de } (1, 2) \text{ a } (-2, 6). \\ b) \mathbf{v} \text{ es el vector de } (3, 2) \text{ a } (4, 5).$$

38. Hallar $\nabla f(x, y)$.

39. Calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $(3, 2)$.

40. Hallar un vector unitario \mathbf{u} ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

Los Ejercicios 41-44 se refieren a la función

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

41. Esbozar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(1, 2, 4)$ sobre la superficie.

42. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.

$$a) \theta = -\frac{\pi}{4} \quad b) \theta = \frac{\pi}{3}$$

43. Calcular $\nabla f(1, 2)$ y $\|\nabla f(1, 2)\|$.

44. Hallar un vector unitario \mathbf{u} ortogonal a $\nabla f(1, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

En los Ejercicios 45-48, hallar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P .

45. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $c = 25, P(3, 4)$

46. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$
 $c = 6, P(0, 0)$

47. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 $c = \frac{1}{2}, P(1, 1)$

48. $f(x, y) = xy$
 $c = -3, P(-1, 3)$

En los Ejercicios 49-52, usar el gradiente para hallar un vector unitario normal a la gráfica de la ecuación en el punto indicado. Hacer un esbozo gráfico de los resultados.

<u>Función</u>	<u>Punto</u>
49. $4x^2 - y = 6$	(2, 10)
50. $3x^2 - 2y^2 = 1$	(1, 1)
51. $9x^2 + 4y^2 = 40$	(2, -1)
52. $xe^y - y = 5$	(5, 0)
53. Distribución de temperaturas	La temperatura en el punto (x, y) de una lámina metálica es

$$T = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto (3, 4).

54. **Topografía** La superficie de una montaña admite como modelo la ecuación

$$h(x, y) = 4.000 - 0,001x^2 - 0,004y^2$$

Supongamos que un montañero se encuentra en el punto (500, 300, 3.390). En qué dirección debe moverse si desea ascender con la mayor rapidez posible?

Rastreador térmico En los Ejercicios 55 y 56, hallar la trayectoria de un rastreador térmico situado en el punto P de una placa metálica, con campo de temperatura $T(x, y)$.

<u>Campo de temperatura</u>	<u>Punto</u>
55. $T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2$	$P(10, 10)$
56. $T(x, y) = 50 - x^2 - 2y^2$	$P(4, 3)$

57. **Investigación** Un equipo de oceanógrafos está elaborando un mapa del fondo del mar para intentar recuperar un antiguo barco hundido. Por medio del sonar, desarrollan un modelo

$$D = 250 + 30x^2 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

donde x, y denotan las distancias en kilómetros y D la profundidad en metros.

- Representar la superficie en una calculadora.
- Como la gráfica de $a)$ representa la profundidad, no es un mapa del fondo oceánico. ¿Cómo se podría cambiar el modelo de modo que se obtuviera con él la gráfica del fondo?

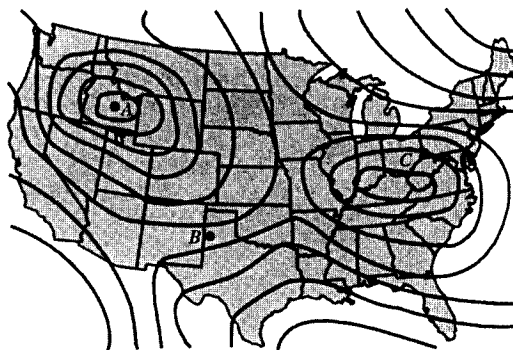
- ¿A qué profundidad está el barco, si se encuentra en el punto de coordenadas $x = 1, y = 0,5$?
- Calcular la pendiente del fondo en la dirección del semieje x positivo en el punto donde se encuentra situado el barco.
- Calcular la pendiente del fondo en la dirección del semieje y positivo en el punto donde se encuentra situado el barco.
- Hallar la dirección de máximo cambio de profundidad en el punto posición del barco.

58. **Temperatura** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica admite como modelo

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y)/2}, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

- Representar gráficamente la temperatura en la calculadora.
- Hallar las direcciones de la placa, en el punto (3, 5), en las que no cambia la temperatura.
- Calcular la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto (3, 5).

59. **Meteorología** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de sus observaciones, elaboran mapas del tiempo en los que pueden verse las curvas de presión constante (isobaras). Son las curvas de nivel de la función $P(x, y)$ que da la presión en cualquier punto. Dibujar los gradientes de las isobaras en los puntos A, B y C . Aunque las magnitudes de los gradientes son desconocidas, se pueden estimar sus longitudes relativas. Si la velocidad del viento crece con el gradiente de la presión, ¿en cuál de esos tres puntos es mayor la velocidad del viento?



60. **Redacción** Describir en unas líneas la derivada direccional de la función f en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}$ si $a) \theta = 0^\circ$ y $b) \theta = 90^\circ$.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 61-64, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

- 61. Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$ para cualquier vector unitario \mathbf{u} .
- 62. Si $(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_{\mathbf{u}}f(x, y) \leq 1$.
- 63. Si $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ existe, entonces $D_{-\mathbf{u}}f(x, y) = -D_{\mathbf{u}}f(x, y)$.
- 64. Si $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = c$ para cualquier vector unitario \mathbf{u} , entonces $c = 0$.

- 65. Hallar una función f tal que

$$\nabla f = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

- 66. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sea $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$. ¿Existe la derivada direccional de f en $P(0, 0)$ en la dirección de \mathbf{u} ? Si se asignara a $f(0, 0)$ el valor 2 en lugar de el valor 0, ¿existiría \mathbf{u} ?



12.7

Planos tangentes y rectas normales

CONTENIDO ■

- Plano tangente y recta normal a una superficie ■
- Ángulo de inclinación de un plano ■
- Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$ ■

Plano tangente y recta normal a una superficie

Hasta el momento, hemos representado habitualmente las superficies en el espacio mediante ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y) \quad \text{Ecuación de una superficie } S$$

En los que sigue, sin embargo, conviene recurrir a la representación más general $F(x, y, z) = 0$. Una superficie dada por $z = f(x, y)$, podemos convertirla a la forma general sin más que definir F como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

Puesto que $f(x, y) - z = 0$, podemos considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{Ecuación alternativa de la superficie } S$$

EJEMPLO 1 Ecuación de una superficie

Describir la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$ para la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

Solución: La superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$ se puede escribir

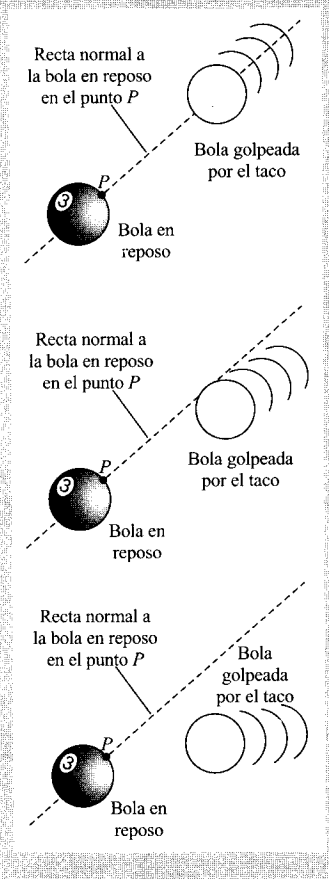
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

que es una esfera de radio 2 con centro en el origen. □

EXPLORACIÓN

Bolas de billar y rectas normales

En las tres figuras de aquí abajo, una bola que ha sido impulsada por el taco está a punto de impactar sobre una bola en reposo en el punto P . Explique cómo usar la recta normal a la bola estacionaria en el punto P para describir el movimiento resultante de cada bola. Supuesto que las tres bolas impulsadas por el taco tienen la misma velocidad, ¿qué bola estacionaria adquiere mayor velocidad? ¿Cuál adquiere menos velocidad? Explique la respuesta.



Hemos ilustrado con varios ejemplos la utilidad de las rectas normales en aplicaciones que tienen que ver con curvas. Las rectas normales juegan, asimismo, un papel relevante en el análisis de superficies y sólidos. Por ejemplo, consideremos dos bolas de billar que colisionan. Cuando se golpea una bola en un punto P de su superficie, se mueve a lo largo de la **línea de impacto** determinada por P y el centro de la bola. El impacto se puede producir de dos maneras. Si la bola golpeada se mueve por la línea de impacto, transfiere todo su momento a la bola en reposo y queda detenida, como muestra la Figura 12.51. Si la bola golpeada no se mueve por la línea de impacto, al impactar con la bola en reposo se desvía hacia un lado y mantiene parte de su momento. La porción de momento transferida a la bola estacionaria lo es en la dirección de impacto, *independientemente* de la dirección en la que sale desviada la bola golpeada (Figura 12.52). Esta línea de impacto es la **recta normal** a la superficie de la bola en el punto P .

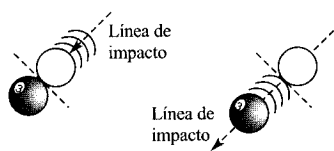


FIGURA 12.51

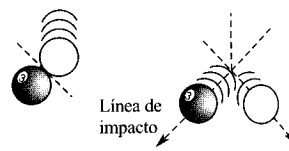


FIGURA 12.52

En el proceso de hallar la recta normal a una superficie vamos a ser capaces, además, de encontrar un plano tangente a la superficie. Sea S la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S . Sea C una curva sobre S que pasa por P , definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Entonces, para todo t ,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Si F es diferenciable y existen $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, se sigue de la regla de la cadena que

$$0 = F'(t) = F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t)$$

En (x_0, y_0, z_0) la forma vectorial equivalente es

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\text{Vector tangente}}$$

Este resultado significa que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de cualquier curva contenida en S que pase por P . Así pues, todas las rectas tangentes en P están en un plano que es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y contiene a P , como indica la Figura 12.53.

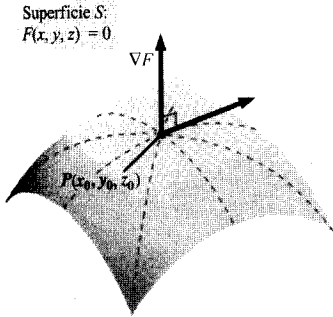


FIGURA 12.53
El plano tangente a la superficie S en P .

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$, con $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.

1. El plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama el **plano tangente a S en P** .
2. La recta que pasa por P con la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama la **recta normal a S en P** .

| Nota. En el resto de esta sección se supone $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, a no ser que se diga explícitamente lo contrario.

Vamos a hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) . Consideremos un punto arbitrario (x, y, z) del plano tangente. Entonces, el vector

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

está en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) , debe ser ortogonal a todo vector del plano tangente, de manera que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$, lo que demuestra el resultado enunciado en el próximo teorema.

TEOREMA 12.13

ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

EJEMPLO 2 Cálculo de la ecuación del plano tangente

Hallar una ecuación para el plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución: En primer lugar escribimos la ecuación de la superficie en la forma

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

se tiene

$$F_x(x, y, z) = -4x, \quad F_y(x, y, z) = -4y \quad \text{y} \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

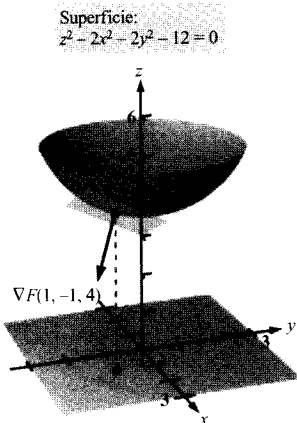
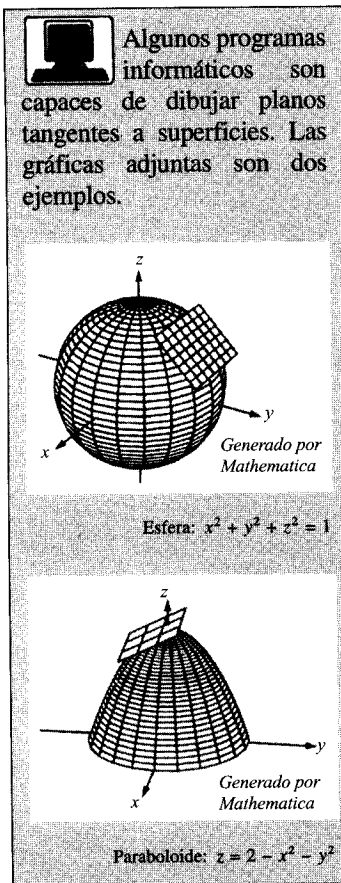


FIGURA 12.54
Plano tangente a la superficie.



En el punto $(1, -1, 4)$, las derivadas parciales son

$$F_x(1, -1, 4) = -4, \quad F_y(1, -1, 4) = 4 \quad \text{y} \quad F_z(1, -1, 4) = 8$$

Por tanto, una ecuación para el plano tangente en $(1, -1, 4)$ es

$$\begin{aligned} -4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) &= 0 \\ -4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 &= 0 \\ -4x + 4y + 8z - 24 &= 0 \\ x - y - 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

La Figura 12.54 muestra una porción del hiperboloide y del plano tangente. \square

Para hallar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada en la forma $z = f(x, y)$, basta definir la función

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

Con ello, S es la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$, luego el Teorema 12.13 enseña que una ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la ecuación del plano tangente

Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $(1, 1, \frac{1}{2})$.

Solución: De $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$, resulta

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{5} \implies f_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{4y}{5} \implies f_y(1, 1) = -\frac{4}{5}$$

Por consiguiente, una ecuación para el plano tangente en $(1, 1, \frac{1}{2})$ es

$$\begin{aligned} f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

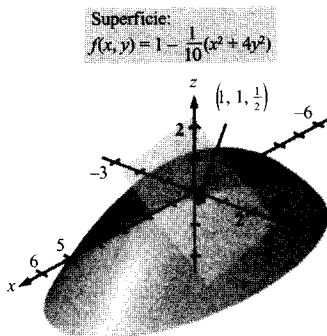


FIGURA 12.55

Plano tangente a la superficie.

El plano tangente puede verse en la Figura 12.55. \square

El gradiente $\nabla F(x, y, z)$ proporciona un método eficaz para obtener las ecuaciones de rectas normales, como muestra el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta normal a una superficie

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie

$$xyz = 12$$

en el punto $(2, -2, -3)$.

Solución: Antes de nada, hacemos

$$F(x, y, z) = xyz - 12$$

Su gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \end{aligned}$$

que en el punto $(2, -2, -3)$ toma el valor

$$\begin{aligned} \nabla F(2, -2, -3) &= (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \end{aligned}$$

La recta normal en el punto $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección $6, -6$ y -4 , luego el conjunto de ecuaciones simétricas correspondientes es

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 3}{-4}$$

(Véase Figura 12.56.) □

El hecho de saber que el gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es normal a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ permite resolver una amplia variedad de problemas relacionados con curvas y superficies en el espacio.

EJEMPLO 5 Ecuación de la recta tangente a una curva

Describir la recta tangente a la curva intersección de las superficies

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20 \quad \text{Elipsoide}$$

$$x^2 + y^2 + z = 4 \quad \text{Paraboloide}$$

en el punto $(0, 1, 3)$ (véase Figura 12.57).

Solución: Para empezar, calculamos los gradientes de las dos superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

Elipsoide

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$$

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(0, 1, 3) = 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

Paraboloide

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$$

$$\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\nabla G(0, 1, 3) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Superficie: $xyz = 12$

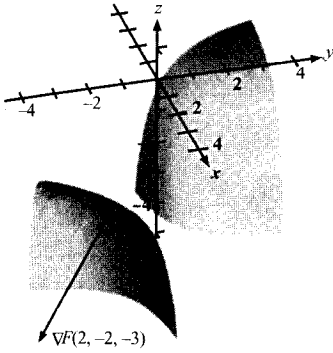
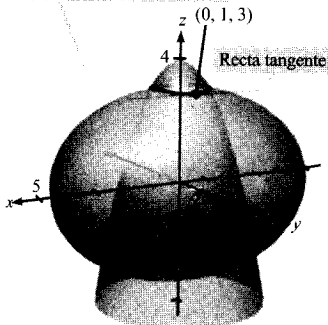


FIGURA 12.56

$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$



$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$

FIGURA 12.57

El producto vectorial de estos dos vectores es un vector tangente a ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

$$\nabla F(0, 1, 3) \times \nabla G(0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}$$

Así pues, la recta tangente a la curva intersección de las dos superficies en el punto $(0, 1, 3)$ es una recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, 1, 3)$. \square

Ángulo de inclinación de un plano

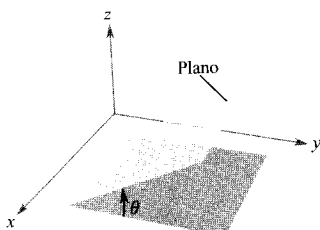


FIGURA 12.58
El ángulo de inclinación.

El gradiente sirve también para determinar el ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie en un punto. El **ángulo de inclinación** de un plano se define como el ángulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, entre el plano dado y el plano xy , como muestra la Figura 12.58. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal se toma igual a 0, por definición.) Como el vector \mathbf{k} es normal al plano xy , podemos concluir de la fórmula del coseno del ángulo entre dos planos (Sección 10.5) que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal \mathbf{n} viene dado por

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Ángulo de inclinación de un plano

EJEMPLO 6 Ángulo de inclinación de un plano

Calcular el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

en el punto $(2, 2, 1)$.

Solución: Si denotamos

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

el gradiente de F en el punto $(2, 2, 1)$ es

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6} \mathbf{i} + \frac{y}{6} \mathbf{j} + \frac{2z}{3} \mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j} + \frac{2}{3} \mathbf{k}$$

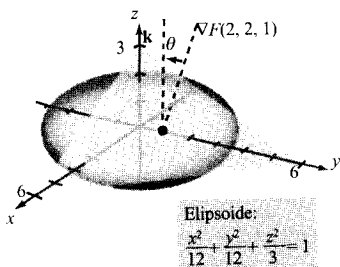


FIGURA 12.59

Puesto que $\nabla F(2, 2, 1)$ es normal al plano tangente y \mathbf{k} es normal al plano xy , el ángulo de inclinación del plano tangente viene dado por

$$\cos \theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

luego $\theta = \arccos \sqrt{2/3} \approx 35,3^\circ$ (Figura 12.59). □

| Nota. Interesa hacer notar un caso especial del procedimiento seguido en el Ejemplo 6. El ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) viene dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}} \quad \text{Fórmula alternativa para el ángulo de inclinación (véase Ejercicio 56)}$$

Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$

Concluimos la sección comparando los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$. En la sección precedente vimos que $f(x, y)$ es normal a las *curvas de nivel* de f . En concreto, el Teorema 12.12 establece que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) . Sabiendo hallar rectas normales a una superficie, podemos extender ese resultado a funciones de tres variables.

TEOREMA 12.14

EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS SUPERFICIES DE NIVEL

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0) .

Al manejar los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$, téngase bien presente que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano xy , mientras que $\nabla F(x, y, z)$ es un vector en el espacio.

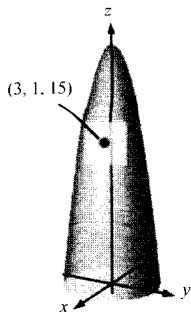
Ejercicios de la Sección 12.7

En los Ejercicios 1-10, hallar un vector unitario normal a la superficie en el punto indicado. [Ayuda: Normalizar el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

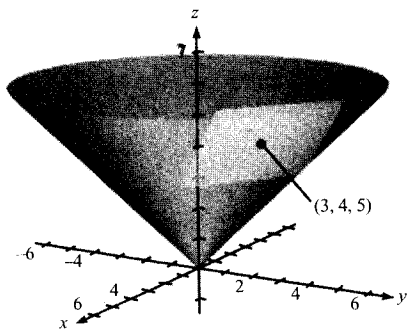
<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>	<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
1. $x + y + z = 4$	(2, 0, 2)	6. $x^2 + 3y + z^3 = 9$	(2, -1, 2)
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 11$	(3, 1, 1)	7. $z - x \operatorname{sen} y = 4$	$\left(6, \frac{\pi}{6}, 7\right)$
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(3, 4, 5)	8. $ze^{x^2 - y^2} - 3 = 0$	(2, 2, 3)
4. $z = x^3$	(2, 1, 8)	9. $\ln\left(\frac{x}{y - z}\right) = 0$	(1, 4, 3)
5. $x^2y^4 - z = 0$	(1, 2, 16)	10. $\operatorname{sen}(x - y) - z = 2$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

En los Ejercicios 11-14, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto que se especifica.

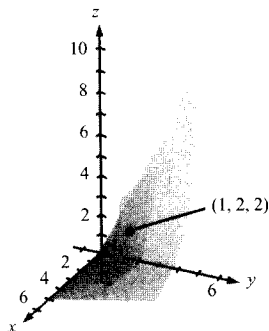
11. $z = 25 - x^2 - y^2$, $(3, 1, 15)$



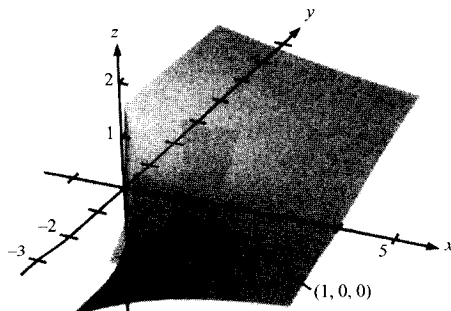
12. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$



13. $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $(1, 2, 2)$



14. $g(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $(1, 0, 0)$



En los Ejercicios 15-24, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto indicado.

<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
15. $g(x, y) = x^2 - y^2$	$(5, 4, 9)$
16. $f(x, y) = 2 - \frac{2}{3}x - y$	$(3, -1, 1)$
17. $z = e^x(\sin y + 1)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 2)$
18. $z = x^3 - 3xy + y^3$	$(1, 2, 3)$
19. $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	$(3, 4, \ln 5)$
20. $h(x, y) = \cos y$	$(5, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
21. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$	$(2, -2, 4)$
22. $x^2 + 2z^2 = y^2$	$(1, 3, -2)$
23. $xy^2 + 3x - z^2 = 4$	$(2, 1, -2)$
24. $y = x(2z - 1)$	$(4, 4, 1)$

En los Ejercicios 25-30, hallar una ecuación del plano tangente y ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie en el punto indicado.

<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
25. $x^2 + y^2 + z = 9$	$(1, 2, 4)$
26. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$	$(1, 2, 2)$
27. $xy - z = 0$	$(-2, -3, 6)$
28. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$	$(5, 12, 13)$
29. $z = \arctg(y/x)$	$(1, 1, \pi/4)$
30. $xyz = 10$	$(1, 2, 5)$

■ 31. **Investigación** Consideremos la función

$$f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

en los intervalos $-2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$.

- Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 1)$.
 - Repetir el apartado *a)* para el punto $(-1, 2, -\frac{4}{3})$.
 - Representar en una calculadora la superficie, las rectas normales y los planos tangentes obtenidos en *a)* y *b)*.
 - Explicar en unas líneas la estructura de la superficie en los dos puntos estudiados, usando información analítica y gráfica.
32. **Para pensar** Hay superficies en las que todas las rectas normales en cualquiera de sus puntos pasan por un elemento geométrico común. ¿Cuál es ese elemento en el caso de una esfera? ¿Y en el de un cilindro circular recto? Explicar las respuestas.

En los Ejercicios 33-38, *a)* obtener ecuaciones simétricas para la recta tangente a la curva intersección de las superficies en el punto indicado, y *b)* hallar el coseno del ángulo entre los vectores gradiente en ese punto. Discutir si las dos superficies son ortogonales o no en el punto de intersección.

<u>Superficies</u>	<u>Punto</u>
33. $x^2 + y^2 = 5, z = x$	(2, 1, 2)
34. $z = x^2 + y^2, z = 4 - y$	(2, -1, 5)
35. $x^2 + z^2 = 25, y^2 + z^2 = 25$	(3, 3, 4)
36. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 2x + y + 2z = 20$	(3, 4, 5)
37. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x - y - z = 0$	(2, 1, 1)
38. $z = x^2 + y^2, x + y + 6z = 33$	(1, 2, 5)

■ 39. Consideremos las funciones

$$f(x, y) = 6 - x^2 - y^2/4 \quad y \quad g(x, y) = 2x + y$$

- Hallar ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva intersección de las superficies en el punto $(1, 2, 4)$ y calcular el ángulo entre los vectores gradiente.
- Representar las superficies en una calculadora y la recta tangente obtenida en *a)*.

■ 40. Consideremos la función

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$$

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - 3x^2 + y^2 + 6x + 4y}$$

- Representar en una calculadora la porción del primer octante de las superficies definidas por *f* y *g*.
- Hallar dos puntos del primer octante de la curva intersección y probar que las superficies son ortogonales en ellos.
- Estas superficies son ortogonales en todos los puntos de la curva intersección. ¿Demuestra este hecho el apartado *b)*? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 41-44, calcular el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie dada en el punto que se especifica.

<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
41. $3x^2 + 2y^2 - z = 15$	(2, 2, 5)
42. $xy - z^2 = 0$	(2, 2, 2)
43. $x^2 - y^2 + z = 0$	(1, 2, 3)
44. $x^2 + y^2 = 5$	(2, 1, 3)

■ En los Ejercicios 45 y 46, determinar el punto de la superficie donde el plano tangente es horizontal. Representar la superficie y su plano tangente horizontal en una calculadora. Describir la superficie en torno a ese punto.

- $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$
- $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$

En los Ejercicios 47 y 48, determinar la trayectoria del rastreador térmico en el campo de temperatura *T*, partiendo del punto indicado.

- $T(x, y, z) = 400 - 2x^2 - y^2 - 4z, (4, 3, 10)$
- $T(x, y, z) = 100 - 3x - y - z^2, (2, 2, 5)$

En los Ejercicios 49 y 50, probar que el plano tangente a la superficie cuádrica en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir en la forma propuesta.

- Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$
- Hiperboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1$
- Mostrar que todos los planos tangentes al cono $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ pasan por el origen.
- Sea *f* una función diferenciable y consideremos la superficie $z = xf(y/x)$. Probar que el plano tangente en cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

53. **Aproximación** Consideremos las siguientes aproximaciones, en las proximidades de $(0, 0)$, de una función $f(x, y)$.

Aproximación lineal

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Aproximación cuadrática

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Nótese que la aproximación lineal la da la ecuación del plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

- Calcular esa aproximación lineal para $f(x, y) = e^{(x-y)}$.
- Calcular esa aproximación cuadrática para $f(x, y) = e^{(x-y)}$.
- Si $x = 0$ en la aproximación cuadrática, se obtiene el polinomio de Taylor de segundo orden de cierta función. ¿De cuál? Misma pregunta con $y = 0$.
- Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0,1			
0,2	0,1			
0,2	0,5			
1	0,5			

- Representar, con ayuda de una calculadora, las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$.
54. **Aproximación** Repetir el Ejercicio 53 para la función $f(x, y) = \cos(x + y)$.
55. Demostrar el Teorema 12.14.
56. Probar que el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}$$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Diversidad de la flora silvestre La diversidad de la flora silvestre en una pradera se puede medir contando las margaritas, lirios, amapolas, etc., que hay en ella. Si existen n tipos de flores silvestres, cada una con una proporción p_i de la población total, con $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, la diversidad de la población se define como

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

En esta definición se sobreentiende que $p_i \log_2 p_i = 0$ cuando $p_i = 0$. La tabla muestra la proporción de flores silvestres en un prado en mayo, junio, agosto y septiembre.

Mayo

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

Junio

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Agosto

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Septiembre

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	0	0	0	1

- Calcular la diversidad en cada uno de esos meses. ¿Cómo cabe interpretar la diversidad de septiembre? ¿En qué mes es mayor la diversidad?
- Si la pradera contiene diez tipos de flores en proporciones muy parecidas, la diversidad ¿es mayor o menor que para una distribución similar con sólo cuatro clases de flores? Con diez tipos de flores, ¿qué tipo de distribución produce diversidad máxima?
- Sea H_n la diversidad máxima para n tipos de flores. ¿Tiende H_n a algún límite cuando $n \rightarrow \infty$?

PARA MÁS INFORMACIÓN Los biólogos utilizan el concepto de diversidad para medir las proporciones de diferentes tipos de organismos en un medio ambiente. Para más información sobre estas técnicas véase el artículo «Information Theory and Biological Diversity», de Steven Kolmes y Kevin Mitchell, en *UMAP Modules*, 1990.



12.8

Extremos de funciones de dos variables

CONTENIDO

- Extremos absolutos y extremos relativos
- El criterio de las segundas derivadas parciales

Extremos absolutos y extremos relativos

En el Capítulo 3 estudiamos métodos para calcular los extremos de funciones de una variable. En esta sección extenderemos esas técnicas a funciones de dos variables. Por ejemplo, el Teorema 12.15 extiende el teorema del valor extremo de funciones de una variable a funciones de dos variables.

Sea f una función de dos variables, definida en una región acotada cerrada R . Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$ tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad (a, b) \text{ y } (c, d) \text{ están en } R$$

para todo (x, y) de R , se llaman el **máximo** y el **mínimo** de f en la región R (Figura 12.60). Recordemos de la Sección 12.2 que una región del plano es *cerrada* si contiene todos sus puntos frontera. El teorema del valor extremo exige además que la región sea **acotada**, lo cual significa que sea subregión de un disco cerrado del plano.

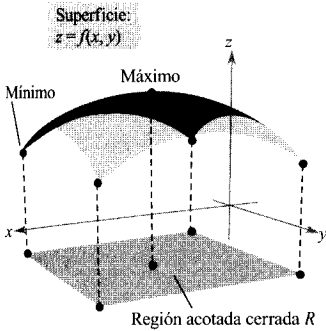


FIGURA 12.60

R contiene algún punto (tal vez varios) donde f alcanza un valor mínimo y algún punto (o varios) donde f alcanza un valor máximo.



KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

Aunque el teorema del valor extremo fue utilizado antes por otros matemáticos, el primero en justificarlo rigurosamente fue el alemán Karl Weierstrass, quien demostró de forma rigurosa muchos otros resultados matemáticos que ya eran de uso común. A él debemos, en gran medida, la fundamentación lógica del Cálculo moderno.

TEOREMA 12.15 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f una función continua de dos variables, x e y , definida en una región cerrada y acotada R del plano xy .

1. Existe al menos un punto en R donde f alcanza un valor mínimo.
2. Existe al menos un punto en R donde f alcanza un valor máximo.

Un mínimo se llama también **mínimo absoluto** y un máximo, **máximo absoluto**. Al igual que en el caso de funciones de una variable, vamos a distinguir entre extremos absolutos y **extremos relativos**.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función definida en una región R que contiene al punto (x_0, y_0) .

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene a (x_0, y_0) .

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene a (x_0, y_0) .

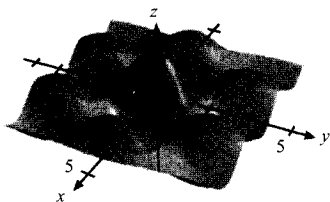


FIGURA 12.61
Extremos relativos.

Afirmar que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa que ningún punto cercano de la gráfica de $z = f(x, y)$ está más alto que el punto (x_0, y_0, z_0) . Análogamente, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si ningún punto cercano de la gráfica de $z = f(x, y)$ está más bajo que el punto (x_0, y_0, z_0) (véase la Figura 12.61).

Para localizar los extremos relativos de f hay que investigar los **puntos críticos** de f , que son por definición aquellos en los que el gradiente de f es $\mathbf{0}$ o no está definido.

DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

Sea f definida en una región abierta R que contiene a (x_0, y_0) . El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si en él ocurre alguna de estas dos circunstancias:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

Recordemos, del Teorema 12.11, que si f es diferenciable y

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} \\ &= \mathbf{0}\mathbf{i} + \mathbf{0}\mathbf{j}\end{aligned}$$

entonces todas las derivadas direccionales en (x_0, y_0) han de ser 0. En el Ejercicio 56 se pide demostrar que eso implica que la función tiene un plano tangente horizontal en el punto (x_0, y_0) , como ilustra la Figura 12.62. Da la impresión de que ese punto es una localización probable para un extremo relativo. Tal impresión queda ratificada por el siguiente teorema.

EXPLORACIÓN

Represente en una calculadora la gráfica de $z = x^3 - 3xy + y^3$ usando las cotas $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ y $-3 \leq z \leq 3$. La gráfica obtenida parece sugerir que f tiene un mínimo absoluto. Pero ¿realmente lo tiene?

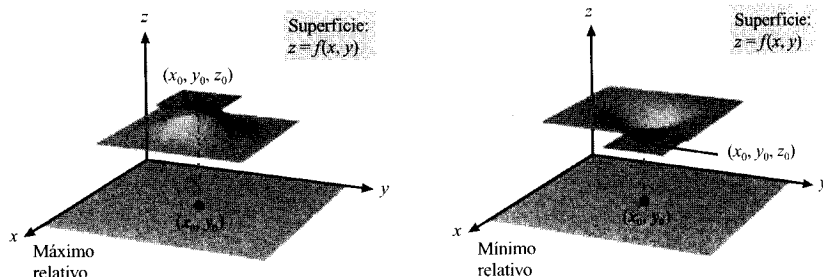


FIGURA 12.62

TEOREMA 12.16

LOS EXTREMOS RELATIVOS SÓLO PUEDEN OCURRIR EN LOS PUNTOS CRÍTICOS

Si f tiene en (x_0, y_0) un extremo relativo en una región abierta R , entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .

Superficie:
 $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

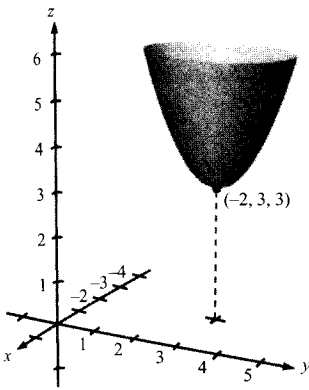


FIGURA 12.63

La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 3)$.

EJEMPLO 1 Cálculo de extremos relativos

Hallar los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$

Solución: Antes de nada, vamos a localizar los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = 4x + 8 \quad \text{Parcial con respecto a } x$$

y

$$f_y(x, y) = 2y - 6 \quad \text{Parcial con respecto a } y$$

están definidas para todo x y para todo y , los únicos puntos críticos son aquellos en los que las derivadas parciales son 0. Para hallarlos, igualamos a cero $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante

$$4x + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 2y - 6 = 0$$

con lo que obtenemos el punto crítico $(-2, 3)$. Completando el cuadrado, concluimos que para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$,

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3$$

Por tanto, f tiene un *mínimo* relativo en $(-2, 3)$. El valor de ese mínimo relativo es $f(-2, 3) = 3$ (Figura 12.63). □

El Ejemplo 1 muestra un mínimo relativo en un punto crítico en el que ambas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ se anulan. En el próximo ejemplo el máximo relativo ocurre en un punto crítico del otro tipo, es decir, un punto en el cual $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no están definidas.

EJEMPLO 2 Cálculo de extremos relativos

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$.

Solución: De

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Parcial con respecto a } x$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Parcial con respecto a } y$$

se sigue que ambas derivadas parciales están definidas en todos los puntos del plano xy excepto en $(0, 0)$. Más aún, como las dos derivadas parciales no pueden ser ambas 0 a menos que x e y sean 0, podemos concluir que el único punto crítico es $(0, 0)$. En la Figura 12.64 veamos que $f(0, 0) = 1$, mientras que para todos los demás puntos, es claro que

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1$$

En consecuencia, f tiene un *máximo* relativo en $(0, 0)$. □

| Nota. En el Ejemplo 2, $f_x(x, y) = 0$ para todo punto del eje y y distinto de $(0, 0)$. Téngase bien presente que para que se trate de un punto crítico, debe estar no definida *una* de las derivadas parciales o ser nulas *ambas*.

Superficie:
 $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$

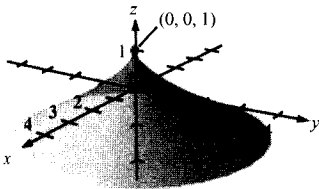


FIGURA 12.64

$f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no están definidas en $(0, 0)$.

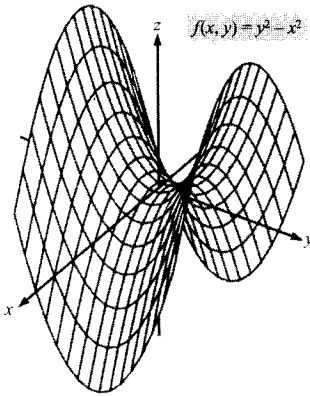


FIGURA 12.65
Punto silla en $(0, 0, 0)$; $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

El criterio de las segundas derivadas parciales

El Teorema 12.16 afirma que a la hora de buscar los extremos relativos de $f(x, y)$ basta examinar sus valores en los puntos críticos. Pero, igual que sucedía con las funciones de una variable, los puntos críticos no siempre son extremos relativos. Algunos puntos críticos no son ni máximos relativos ni mínimos relativos, sino **puntos silla**.

Un ejemplo de punto crítico que no es extremo relativo lo proporciona la superficie

$$f(x, y) = y^2 - x^2 \quad \text{Paraboloide hiperbólico}$$

de la Figura 12.65. En el punto $(0, 0)$ las dos derivadas parciales son 0. A pesar de ello, la función f no tiene un extremo relativo en ese punto, ya que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ la función toma tanto valores negativos (sobre el eje x) como positivos (sobre el eje y). Así pues, el punto $(0, 0, 0)$ es un punto silla de la superficie. (El nombre de «punto silla» proviene de su parecido con una silla de montar, como se aprecia en la Figura 12.65.)

Para las funciones de los Ejemplos 1 y 2 ha sido fácil determinar sus extremos relativos, porque cada una de ellas estaba escrita, o se podía escribir, en forma de cuadrado completo. Para funciones más complicadas, las manipulaciones algebraicas son poco convenientes y es mejor recurrir al instrumento analítico que ofrece el criterio de las segundas derivadas parciales siguiente. Viene a ser una versión adaptada a funciones de dos variables, del criterio de la segunda derivada para funciones de una variable. Su demostración es más apropiada en un curso de Cálculo avanzado.

TEOREMA 12.17

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al punto (a, b) , en el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0$$

Para buscar los extremos relativos de f , calcúlese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (a, b) .
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, f tiene un máximo relativo en (a, b) .
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un punto silla.
4. Si $d = 0$, el criterio no da ninguna conclusión.

| Nota. Si $d > 0$, $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ han de tener el mismo signo. Así pues, $f_{xx}(a, b)$ puede ser reemplazada por $f_{yy}(a, b)$ en los dos primeros apartados de este criterio.

Un truco útil para memorizar la fórmula que define d en el criterio anterior lo proporciona el determinante

$$d = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

donde $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$, según el Teorema 12.3.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de las segundas derivadas parciales

Identificar los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: En primer lugar, vamos a localizar los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

están definidas para todo x y todo y , los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales sean nulas. Igualando $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ a 0 obtenemos $-3x^2 + 4y = 0$ y $4x - 4y = 0$. De la segunda deducimos $x = y$, que sustituido en la primera da dos soluciones: $y = x = 0$ e $y = x = \frac{4}{3}$. De

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

Se sigue que para el punto crítico $(0, 0)$

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y, por el criterio de las segundas derivadas parciales, podemos concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla de f . Además, para el punto crítico $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)f_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 = 16 > 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = -8 < 0$, la conclusión es que f tiene en $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ un máximo relativo, como corrobora la Figura 12.66. \square

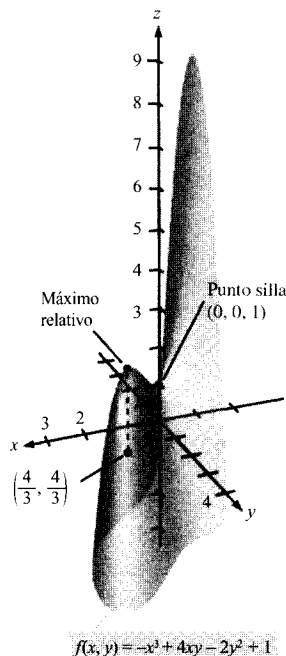


FIGURA 12.66

El criterio de las segundas derivadas parciales puede no ser capaz de hallar los extremos relativos por dos razones. Si alguna de las primeras derivadas parciales no está definida, no se puede aplicar el criterio. Y, por otra parte, no es concluyente tampoco si

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

En tales circunstancias, cabe intentar decidir mediante un esbozo de la gráfica o por algún otro procedimiento, como en el ejemplo próximo.

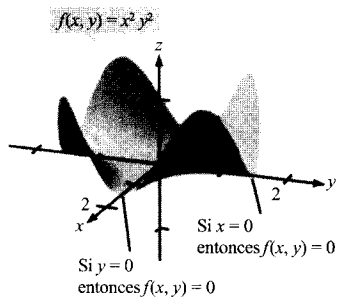


FIGURA 12.67

EJEMPLO 4 El criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2 y^2$.

Solución: Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, las dos derivadas parciales son nulas si $x = 0$ o si $y = 0$. Así pues, todos los puntos de los ejes x e y son críticos. Más todavía, al ser

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \quad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

siempre que $x = 0$ o $y = 0$, resulta

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente. Sin embargo, puesto que $f(x, y) = 0$ en todos los puntos de los ejes x e y , y $f(x, y) = x^2 y^2 > 0$ en todos los demás puntos, podemos concluir que todos esos puntos críticos son mínimo absoluto de la función, como confirma la Figura 12.67. \square

Los extremos absolutos de una función se pueden presentar de dos maneras. En primer lugar, algunos extremos relativos resultan ser a la vez extremos absolutos. Así, en el Ejemplo 1, $f(-2, 3)$ es un mínimo absoluto de la función. (Por el contrario, el máximo relativo obtenido en el Ejemplo 3 no es máximo absoluto de esa función.) En segundo lugar, los extremos absolutos pueden producirse en los puntos frontera del dominio, como ilustra el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Búsqueda de los extremos absolutos

Hallar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} xy$$

en la región cerrada determinada por $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq 1$.

Solución: La expresión de las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y \cos xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = x \cos xy$$

permite deducir que todo punto de la hipérbola $xy = \pi/2$ es un punto crítico. En todos ellos, el valor de f es

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

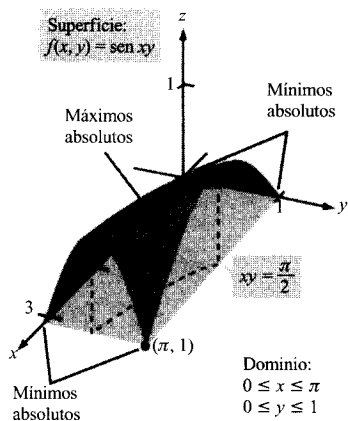


FIGURA 12.68

que es, según sabemos, el máximo absoluto (véase Figura 12.68). Aparte de los anteriores, el único punto crítico *en la región propuesta* es $(0, 0)$. Da un mínimo absoluto igual a 0, ya que

$$0 \leq xy \leq \pi$$

implica que

$$0 \leq \sin xy \leq 1$$

Con el fin de detectar otros posibles extremos absolutos, hemos de considerar las cuatro porciones de la frontera, formadas por las trazas de los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = 1$. Es inmediato ver que $\sin xy = 0$ en todos los puntos que están en el eje x o en el eje y , y también en el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie, como muestra la Figura 12.68. \square

Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Si existen todas las derivadas parciales

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

se puede demostrar que un máximo o mínimo relativo puede producirse en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sólo si todas las derivadas parciales se anulan en ese punto. Eso quiere decir que los puntos críticos se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Asimismo, es posible extender el Teorema 12.17 a tres o más variables, aunque no consideraremos tal extensión en este libro.

Ejercicios de la Sección 12.8

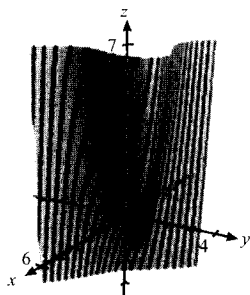
En los Ejercicios 1-6, identificar los extremos de la función, analizando su forma o la que adopta tras completar cuadrados. Verificar los resultados utilizando derivadas parciales para localizar los puntos críticos y estudiar si son extremos relativos o no. Usar una calculadora para representar la función e indicar en ella los extremos.

- $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
- $g(x, y) = 9 - (x - 3)^2 - (y + 2)^2$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
- $f(x, y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$
- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4x + 8y - 11$

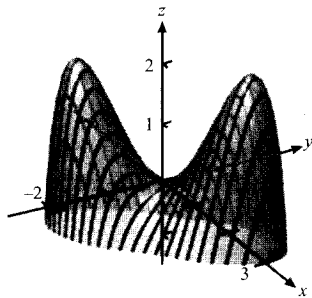
En los Ejercicios 7-20, examinar cada función a la caza y captura de sus extremos y puntos silla.

- $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
- $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$
- $f(x, y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
- $f(x, y) = x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4$
- $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13$
- $z = -3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 5$
- $h(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4$
- $g(x, y) = 120x + 120y - xy - x^2 - y^2$
- $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
- $g(x, y) = xy$

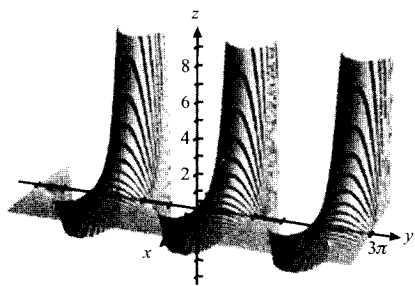
17. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$



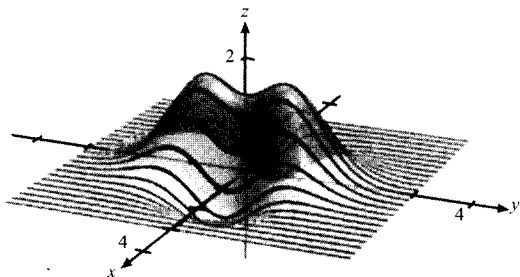
18. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$



19. $z = e^{-x} \operatorname{sen} y$



20. $z = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$



En los Ejercicios 21-24, representar la superficie con ayuda de una calculadora y localizar sus extremos relativos y puntos silla.

21. $z = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

22. $z = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

24. $z = e^{xy}$

Para pensar En los Ejercicios 25-28, averiguar si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla o si la información dada es insuficiente para determinar el carácter de $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0) .

25. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, f_{yy}(x_0, y_0) = 4, f_{xy}(x_0, y_0) = 6$

26. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, f_{yy}(x_0, y_0) = -8, f_{xy}(x_0, y_0) = 2$

27. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, f_{yy}(x_0, y_0) = 6, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

28. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, f_{yy}(x_0, y_0) = 8, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

Para pensar En los Ejercicios 29-32, esbozar la gráfica de una función f que cumpla las condiciones propuestas. Establecer si esa función tiene extremos o puntos silla. (Hay muchas respuestas correctas.)

29. $f_x(x, y) > 0$ y $f_y(x, y) < 0$, para todo (x, y) .

30. Todas las derivadas parciales de primer y segundo orden de f son 0.

31. $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$

$$f_x(x, y) \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}, \quad f_y(x, y) \begin{cases} > 0, & y < 0 \\ < 0, & y > 0 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) > 0, f_{yy}(x, y) < 0 \text{ y } f_{xy}(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y)$$

32. $f_x(2, 1) = 0, f_y(2, 1) = 0$

$$f_x(x, y) \begin{cases} > 0, & x < 2 \\ < 0, & x > 2 \end{cases}, \quad f_y(x, y) \begin{cases} > 0, & y < 1 \\ < 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) < 0, f_{yy}(x, y) < 0 \text{ y } f_{xy}(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y)$$

33. Una función tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico $(3, 7)$. La función tiene en $(3, 7)$ un mínimo. Determinar el intervalo para $f_{xy}(3, 7)$ si $f_{xx}(3, 7) = 2$ y $f_{yy}(3, 7) = 8$.

34. Una función tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (a, b) . Si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ tienen signos opuestos, ¿se puede concluir de ello? Razonar la respuesta.

En los Ejercicios 35-44, calcular los extremos absolutos de la función en la región R . (En cada caso, R contiene sus puntos frontera.) Confirmar los resultados con una calculadora.

35. $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$ 36. $f(x, y) = (2x - y)^2$
 R : La región triangular del plano xy con vértices $(2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$ R : La región triangular del plano xy con vértices $(2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

37. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$ 38. $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$
 R : La región triangular del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 4$ R : La región triangular del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 1$

39. $f(x, y) = x^2 + xy$, $R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$

40. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$

41. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 8\}$

42. $r(x, y) = x^2 - 4xy$,
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

43. $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$,
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

44. $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$,
 $R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

En los Ejercicios 45-50, hallar los puntos críticos y averiguar si son extremos relativos. Indicar los puntos críticos en los que el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente.

45. $f(x, y) = x^3 + y^3$

46. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$

47. $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$

49. $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$

50. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar los puntos críticos de la función y determinar, a la vista de la forma de la función, si son máximos o mínimos relativos.

51. $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$

52. $f(x, y, z) = 4 - [x(y - 1)(z + 2)]^2$

53. **Para pensar** La figura muestra las curvas de nivel de una función $f(x, y)$ desconocida. ¿Puede extraerse alguna información acerca de f en el punto A ?

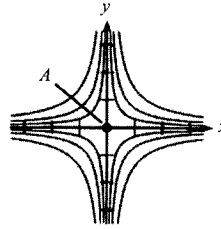


FIGURA E.53

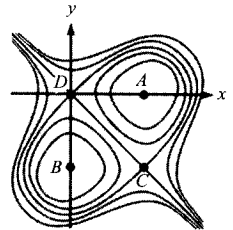


FIGURA E.54

54. **Para pensar** La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Puede extraerse alguna información acerca de f en los puntos A, B, C y D ?

55. **Investigación** Consideremos la función

$$f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2 + y^2)}, \quad 0 < |\alpha| < \beta$$

- Representarla, con ayuda de una calculadora, para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, e identificar sus extremos o puntos silla.
- Ídem para $\alpha = -1$ y $\beta = 2$.
- Generalizar los resultados de los apartados a) y b) para la función f .

56. Demostrar que si f es diferenciable y $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, el plano tangente en (x_0, y_0) es horizontal.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 57-60, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

57. Si f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0) , entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

58. La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ tiene un mínimo relativo en el origen.

59. Si f es continua para todo x y para todo y , y además tiene dos mínimos relativos, entonces f tiene al menos un máximo relativo.

60. Si $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$, el plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie dada por $z = f(x, y)$ es horizontal.

- CONTENIDO ▪
 Problemas de optimización ▪
 El método de mínimos cuadrados ▪



12.9

Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables

Problemas de optimización

En esta sección pasamos revista a algunas de las muchas aplicaciones de los extremos de funciones de dos (o más) variables.

EJEMPLO 1 Cálculo de un volumen máximo

Una caja rectangular ha de estar apoyada sobre el plano xy , con un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

como vemos en la Figura 12.69. Calcular el máximo volumen posible de esa caja.

Solución: Denotemos respectivamente por x , y , z la longitud, anchura y altura de la caja. Dado que un vértice está en el plano $6x + 4y + 3z = 24$, sabemos que $z = \frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)$, así que podemos expresar el volumen xyz de la caja como función de dos variables:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (x)(y) \left[\frac{1}{3} (24 - 6x - 4y) \right] \\ &= \frac{1}{3} (24xy - 6x^2y - 4xy^2) \end{aligned}$$

Igualando a cero las derivadas parciales,

$$V_x(x, y) = \frac{1}{3} (24y - 12xy - 4y^2) = \frac{y}{3} (24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x, y) = \frac{1}{3} (24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{x}{3} (24 - 6x - 8y) = 0$$

deducimos que los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, 2)$. En $(0, 0)$ el volumen es 0, de modo que ese punto crítico no proporciona un volumen máximo. En el punto $(\frac{4}{3}, 2)$, podemos aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales.

$$V_{xx}(x, y) = -4y$$

$$V_{yy}(x, y) = \frac{-8x}{3}$$

$$V_{xy}(x, y) = \frac{1}{3} (24 - 12x - 8y)$$

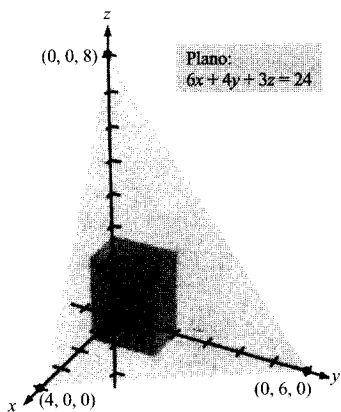


FIGURA 12.69

El volumen máximo de la caja es $\frac{64}{9}$ unidades cúbicas.

| Nota. En muchos problemas prácticos, el dominio de la función a optimizar es una región cerrada y acotada. Para hallar los puntos de máximo o mínimo, no basta con mirar en los puntos críticos, sino que hay que considerar además los valores de la función en los puntos frontera.

De

$$V_{xx}\left(\frac{4}{3}, 2\right)V_{yy}\left(\frac{4}{3}, 2\right) - \left[V_{xy}\left(\frac{4}{3}, 2\right)\right]^2 = (-8)\left(-\frac{32}{9}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{3} > 0$$

y

$$V_{xx}\left(\frac{4}{3}, 2\right) = -8 < 0$$

concluimos del criterio de las segundas derivadas parciales que el volumen máximo es

$$\begin{aligned} V\left(\frac{4}{3}, 2\right) &= \frac{1}{3} \left[24\left(\frac{4}{3}\right)(2) - 6\left(\frac{4}{3}\right)^2(2) - 4\left(\frac{4}{3}\right)(2^2) \right] \\ &= \frac{64}{9} \text{ unidades cúbicas} \end{aligned}$$

(Nótese que el volumen es 0 en los puntos frontera del dominio triangular de V .) \square

En la Sección 3.10 analizamos varias aplicaciones de los extremos a las Ciencias económicas y empresariales. En la práctica, este tipo de aplicaciones suelen involucrar más de una variable independiente. Por ejemplo, una empresa puede producir varios modelos de un mismo producto. El precio por unidad y el beneficio por unidad son distintos para cada modelo. Más aún, la demanda de cada uno de los modelos suele ser función del precio de los demás modelos (así como de su propio precio, claro está). El próximo ejemplo ilustra una aplicación en la que intervienen dos productos.

EJEMPLO 2 Beneficio máximo

El beneficio obtenido al producir x unidades de un producto A e y unidades del producto B viene aproximado por el modelo

$$P(x, y) = 8x + 10y - (0,001)(x^2 + xy + y^2) - 10,000$$

Calcular el nivel de producción que proporciona un beneficio máximo.

Solución: Las derivadas parciales de la función que describe el beneficio son

$$P_x(x, y) = 8 - (0,001)(2x + y)$$

y

$$P_y(x, y) = 10 - (0,001)(x + 2y)$$

Igualándolas a 0 obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$8 - (0,001)(2x + y) = 0$$

$$10 - (0,001)(x + 2y) = 0$$

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre el uso de las Matemáticas en la Economía, véase el artículo «Mathematical Methods of Economics», de Joel Franklin, en *The American Mathematical Monthly*, abril 1983.

Después de simplificar, ese sistema queda reducido a

$$2x + y = 8.000$$

$$x + 2y = 10.000$$

Su solución es $x = 2.000$, $y = 4.000$. Las segundas derivadas parciales de P son

$$P_{xx}(2.000, 4.000) = -0,002$$

$$P_{yy}(2.000, 4.000) = -0,002$$

$$P_{xy}(2.000, 4.000) = -0,001$$

Además, al ser $P_{xx} < 0$ y

$$\begin{aligned} P_{xx}(2.000, 4.000)P_{yy}(2.000, 4.000) - [P_{xy}(2.000, 4.000)]^2 &= \\ &= (-0,002)^2 - (-0,001)^2 > 0 \end{aligned}$$

llegamos a la conclusión de que el nivel de producción $x = 2.000$ unidades e $y = 4.000$ unidades proporciona el máximo beneficio. \square

| Nota. En el Ejemplo 2 hemos supuesto que la planta de fabricación es capaz de producir el número de unidades requerido para lograr un beneficio máximo. En la práctica, la producción viene limitada por ciertas restricciones. Los problemas de optimización con restricciones (ligaduras) se analizan en la próxima sección.

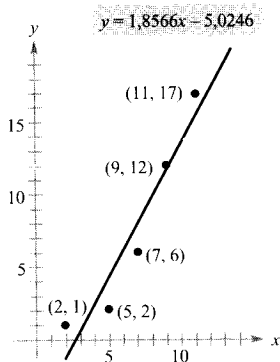


FIGURA 12.70

El método de mínimos cuadrados

Un buen número de los ejemplos tratados en este libro manejan **modelos matemáticos**. Sin ir más lejos, el Ejemplo 2 utiliza un modelo cuadrático para describir el beneficio. Hay diversos procedimientos para elaborar modelos, y entre ellos el **método de mínimos cuadrados** ocupa un lugar preferente.

Al construir un modelo para un fenómeno concreto, deben tenerse en cuenta dos objetivos muy importantes: la simplicidad y la precisión. Ni que decir tiene que, las más de las veces, estos dos objetivos entran en conflicto. Así, por ejemplo, un modelo lineal simple para ajustar los puntos de la Figura 12.70 es

$$y = 1,8566x - 5,0246$$

Sin embargo, la Figura 12.71 pone de manifiesto que el modelo cuadrático*

$$y = 0,1996x^2 - 0,7281x + 1,3749$$

sólo ligeramente más complicado, consigue una precisión mucho mayor.

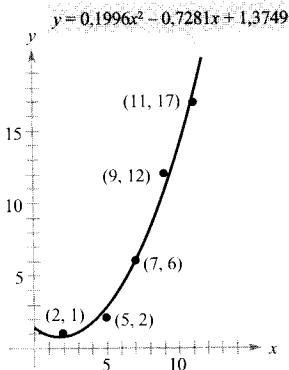


FIGURA 12.71

* En el Ejercicio 37 se describe un método para hallar el modelo cuadrático de ajuste para una colección de datos prefijada.

Como medida de la calidad del ajuste que proporciona $y = f(x)$ como modelo para una colección de puntos

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$$

podemos adoptar la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada valor verdadero de y y el correspondiente valor asignado a y por el modelo, esto es, la **suma de los errores cuadráticos**

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2$$

Suma de los errores cuadráticos

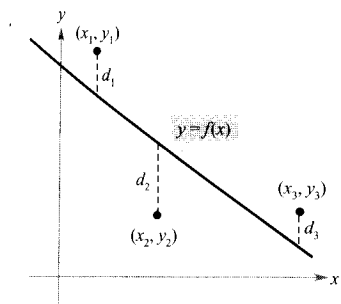


FIGURA 12.72
Suma de errores cuadráticos:
 $S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$.

Gráficamente, S se puede interpretar como la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre la gráfica de f y los puntos del plano dados del problema (Figura 12.72). En un modelo perfecto sería $S = 0$. Ahora bien, puesto que un modelo perfecto no es, en general, posible, nos conformamos con buscar un modelo que haga mínimo el valor de S . En Estadística se llama **recta de regresión** o **recta de mínimos cuadrados** al *modelo lineal* que consigue el valor más pequeño posible para S . Probar que esa recta minimiza realmente el valor de S exige minimizar una función de dos variables.

TEOREMA 12.18 RECTA DE REGRESIÓN (O DE MÍNIMOS CUADRADOS)

La **recta de regresión** para $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ viene dada por $f(x) = ax + b$, con

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad y \quad b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Demostración: Sea $S(a, b)$ la suma de errores cuadráticos para el modelo $f(x) = ax + b$ y el conjunto de puntos dado. Esto es,

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

donde los puntos (x_i, y_i) son constantes. Como S es función de a y de b , podemos utilizar los métodos de la sección precedente para calcular su valor mínimo. Sus dos derivadas parciales son

$$\begin{aligned} S_a(a, b) &= \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$



ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

El método de mínimos cuadrados fue introducido por el matemático francés Adrien-Marie Legendre, más conocido por sus contribuciones a la Geometría. De hecho, su texto «Elementos de Geometría» fue tan popular en los EE.UU. que llegó a conocer 33 ediciones, a lo largo de más de un siglo.

$$S_b(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)$$

$$= 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_i$$

Igualando ambas a 0 obtenemos los valores de a y b del enunciado del teorema. Dejamos como ejercicio (Ejercicio 38) verificar, por el criterio de las segundas derivadas parciales, que esos valores de a y b corresponden a un mínimo. \square

Si los valores de x están simétricamente distribuidos respecto del eje y , entonces $\sum x_i = 0$ y las fórmulas para a y b se reducen a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad y \quad b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Esta simplificación es conveniente y se puede lograr mediante una traslación adecuada de los valores de x . Así, si los valores de x en una colección de datos son los años 1980, 1981, 1982, 1983 y 1984, basta tomar 1982 como 0.

EJEMPLO 3 Recta de regresión

Hallar la recta de regresión para los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ y $(2, 3)$.

Solución: La tabla muestra los cálculos necesarios para hallar la recta de regresión con $n = 4$.

x	y	xy	x^2
-3	0	0	9
-1	1	-1	1
0	2	0	0
2	3	6	4
$\sum_{i=1}^n x_i = -2$	$\sum_{i=1}^n y_i = 6$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 5$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 14$


El Teorema 12.18 permite ver que

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{4(5) - (-2)(6)}{4(14) - (-2)^2} = \frac{8}{13}$$

y

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{4} \left[6 - \frac{8}{13}(-2) \right] = \frac{47}{26}$$

La recta de regresión es $y = \frac{8}{13}x + \frac{47}{26}$, como ilustra la Figura 12.73. \square

 Muchas calculadoras tienen incorporados programas de cálculo de la recta de regresión por mínimos cuadrados. Si dispone de una calculadora dotada de uno de esos programas, intente rehacer los resultados del Ejemplo 3.

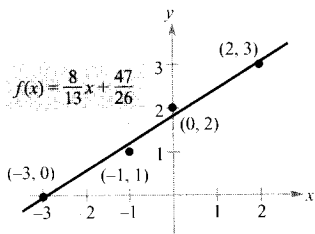


FIGURA 12.73
Recta de regresión.

Ejercicios de la Sección 12.9

En los Ejercicios 1 y 2, calcular la distancia mínima del punto al plano $2x + 3y + z = 12$. (Ayuda: Para simplificar los cálculos, conviene minimizar el cuadrado de la distancia.)

1. $(0, 0, 0)$ 2. $(1, 2, 3)$

En los Ejercicios 3 y 4, calcular la distancia mínima del punto al paraboloides $z = x^2 + y^2$.

3. $(5, 5, 0)$ 4. $(5, 0, 0)$

En los Ejercicios 5-8, hallar tres números positivos x, y, z que cumplan las condiciones requeridas.

5. La suma es 30 y el producto es máximo.
 6. La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máximo.
 7. La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.
 8. La suma es 1 y la suma de los cuadrados es mínima.
 9. **Volumen** La suma de la longitud y el perímetro de una sección transversal de un paquete a entregar por cierto servicio de transporte urgente no puede exceder de 108 pulgadas. Hallar las dimensiones del paquete de máximo volumen que puede enviarse por ese servicio.
 10. **Volumen** El material empleado en la construcción de la base de una caja abierta (sin tapa) cuesta 1,5 veces más, por unidad de área, que el empleado en sus caras laterales. Para una cantidad de dinero prefijada C , ¿cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen que se puede fabricar?
 11. **Volumen** El volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $4\pi abc/3$. Para una suma $a + b + c$ prefijada, probar que el elipsoide de volumen máximo es una esfera.

12. **Volumen** Demostrar que una caja rectangular de volumen máximo entre las que se pueden inscribir en una esfera es un cubo.
 13. **Volumen y área de la superficie** Demostrar que una caja de volumen dado y área mínima es un cubo.
 14. **Volumen** Repetir el Ejercicio 9 bajo la condición de que la suma de los perímetros de las dos secciones de la figura no pueden exceder de 108 pulgadas.

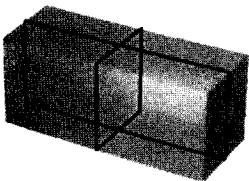


FIGURA E.14

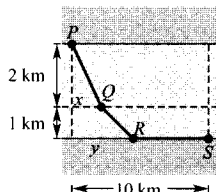


FIGURA E.15

15. **Coste mínimo** Hay que construir una conducción de agua desde P hasta S , pasando por zonas en las que el coste de la construcción, por unidad de longitud, varía (véase figura). Hallar los valores de x e y para los cuales el coste total C es mínimo, suponiendo que el coste en dólares por kilómetro es $3k$ entre P y Q , $2k$ entre Q y R , y k entre R y S .

16. **Área** Se construye un comedero doblando hacia arriba una lámina de aluminio de 10 pulgadas de anchura (véase figura). Hallar el máximo valor posible del área de la sección.

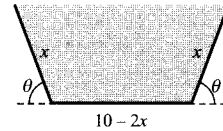


FIGURA E.16

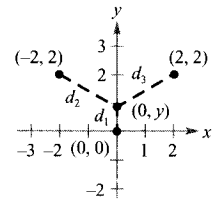


FIGURA E.18

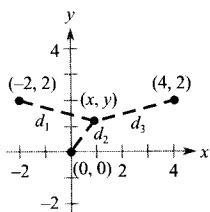
17. **Área** Repetir el Ejercicio 16 para una anchura de w pulgadas.
 18. **Distancia** Una empresa dispone de tres puntos de venta, localizados en los puntos de coordenadas $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(-2, 2)$ (véase figura) y planea construir un centro de distribución situado de manera tal que la suma S de sus distancias a los tres puntos de venta sea mínima. Por la simetría del problema es claro que el centro de distribución habrá de estar en algún punto del eje y , así que S es sólo función de la variable y . Utilizar las técnicas del Capítulo 3 para calcular el valor de y que resuelve el problema.
 19. **Investigación** Supongamos ahora que los centros de venta del ejercicio anterior están situados en $(0, 0)$, $(4, 2)$ y $(-2, 2)$ (véase figura en la página siguiente), y el centro de distribución en (x, y) , de modo que la suma S de sus distancias a ellos es función de x y de y .
 a) Escribir la expresión de S y representarla en una calculadora. ¿Tiene la superficie algún mínimo?
 b) Obtener, mediante cálculo simbólico en una calculadora, S_x y S_y . Salta a la vista que la resolución del sistema $S_x = 0$, $S_y = 0$ es difícil. Por tanto, hay que estimar la localización óptima del centro de distribución.
 c) Una estimación inicial del punto crítico es $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Calcular $-\nabla S(1, 1)$, con componentes $-S_x(1, 1)$ y $-S_y(1, 1)$. ¿Qué dirección señala el vector $-\nabla S(1, 1)$?

d) La segunda estimación del punto crítico es

$$(x_2, y_2) = (x_1 - S_x(x_1, y_1)t, y_1 - S_y(x_1, y_1)t)$$

Si se sustituyen esas coordenadas en $S(x, y)$, S se convierte en una función de la variable t . Calcular el valor de t que minimiza S . Con ese valor de t , estimar (x_2, y_2) .

- e) Completar dos iteraciones más del proceso del apartado d) para hallar (x_4, y_4) . Para esta localización del centro de distribución, ¿cuál es la suma de distancias a los puntos de venta?
- f) Explicar por qué se ha utilizado $-\nabla S(x, y)$ para aproximar el valor mínimo de S . ¿En qué tipo de problemas se utilizaría $\nabla S(x, y)$?



20. **Investigación** Repetir el Ejercicio 19 con puntos de venta situados en $(-4, 0)$, $(1, 6)$ y $(12, 2)$.

21. **Beneficios** Una empresa fabrica un producto en dos lugares. El coste de producción de x_1 unidades en el primero es

$$C_1 = 0,02x_1^2 + 4x_1 + 500$$

y el de producción de x_2 unidades en el segundo es

$$C_2 = 0,05x_2^2 + 4x_2 + 275$$

Si el producto se vende a \$15 la unidad, calcular la cantidad que debe producirse en cada uno de los dos lugares con el fin de hacer máximo el beneficio

$$P = 15(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$$

22. **Ley de Hardy-Weinberg** Los grupos sanguíneos se determinan genéticamente por tres alelos A, B y O (un alelo es cualquiera de las posibles formas de mutación de un gen). Las personas con grupo sanguíneo AA, BB, OO son homocigóticas. Las de los grupos AB, AO, BO son heterocigóticas. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos heterocigóticos en una población es

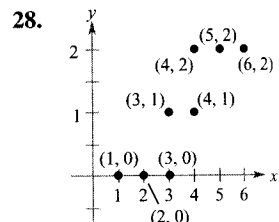
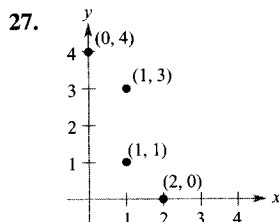
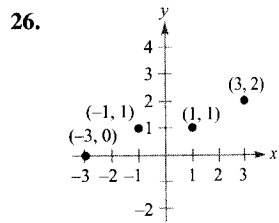
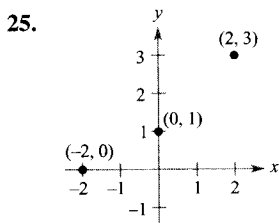
$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2qr$$

donde p, q, r denotan respectivamente los porcentajes de los alelos A, B, O en la población. Usando que $p + q + r = 1$, probar que la proporción máxima de individuos heterocigóticos en una población es $\frac{2}{3}$.

23. **Ingresos** Una industria fabrica dos productos. Los ingresos totales por la venta de x_1 unidades del primero y x_2 del segundo es $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$. Hallar los valores de x_1 y x_2 que hacen máximos los ingresos.

24. **Ingresos** Una tienda ofrece dos productos alternativos de precios p_1 y p_2 . Determinar los valores de p_1 y p_2 que hacen máximos los ingresos totales, dados por $R = 500p_1 + 800p_2 + 1,5p_1p_2 - 1,5p_1^2 - p_2^2$.

En los Ejercicios 25-28, a) hallar la recta de regresión y b) calcular la suma S de los errores cuadráticos. Verificar los resultados en una calculadora capaz de efectuar cálculos de regresión.



En los Ejercicios 29-32, hallar la recta de regresión para los puntos dados. Verificar los resultados con una calculadora apropiada. Representar en la calculadora los puntos y la recta de regresión.

29. $(0, 0), (1, 1), (3, 4), (4, 2), (5, 5)$
30. $(1, 0), (3, 3), (5, 6)$
31. $(0, 6), (4, 3), (5, 0), (8, -4), (10, -5)$
32. $(5, 2), (0, 0), (2, 1), (7, 4), (10, 6), (12, 6)$

33. **Un modelo matemático** La tabla adjunta recoge el coste por onza del oro y de la plata entre 1990 y 1994. (Fuente: U.S. Bureau of Mines.)

Año	1990	1991	1992	1993	1994
Oro (x)	\$385	\$363	\$345	\$361	\$389
Plata (y)	\$4,82	\$4,04	\$3,94	\$4,30	\$5,30

Sean x e y los costes por onza de oro y plata, respectivamente.

- Usar una calculadora capaz de efectuar cálculos de regresión para hallar la recta de regresión para esos datos.
- Representar en la calculadora los datos y el modelo.
- Aproximar, con ese modelo, el cambio en el coste de una onza de plata correspondiente a un aumento de un dólar por onza en el coste del oro.

34. **Un modelo matemático** Un fabricante desea conocer la demanda de un producto en función de su precio. La tabla muestra las ventas diarias del producto a tres precios distintos.

Precio (x)	\$1,00	\$1,25	\$1,50
Demanda (y)	450	375	330

- Hallar la recta de regresión de esos datos con una calculadora adecuada.
- Estimar la demanda cuando el precio es \$1.40.

35. **Un modelo matemático** Un agricultor ha obtenido en cuatro campos de cultivo distintos los datos de la tabla respecto de la relación entre la cantidad de fertilizante (en cientos de libras por acre) y la producción de cereal (en bushels por acre).

Fertilizante (x)	1,0	1,5	2,0	2,5
Producción (y)	32	41	48	53

Usar regresión en la calculadora para hallar la recta de mínimos cuadrados para esos datos y estimar la producción correspondiente a 160 libras por acre de fertilizante.

36. **Un modelo matemático** La tabla recoge el porcentaje y el número (en millones) de mujeres integradas en el mundo laboral en los años que se indican. (Fuente: Department of Labor.)

Año	1960	1970	1980	1990
Porcentaje (x)	37,7	43,3	51,5	57,5
Número (y)	23,2	31,5	45,5	56,6

Año	1991	1992	1993	1994
Porcentaje (x)	57,3	57,8	57,9	58,8
Número (y)	56,9	57,8	58,4	60,2

- Usar regresión en la calculadora para hallar la recta de mínimos cuadrados para esos datos.
- Según ese modelo, ¿cuántas mujeres se integran aproximadamente en el mundo laboral por cada punto porcentual de aumento?

37. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución proporcione los coeficientes a , b y c de la recta de regresión $y = ax^2 + bx + c$ para los puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

minimizando la suma

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

38. Verificar, mediante el criterio de las segundas derivadas parciales, que las fórmulas del Teorema 12.18 para a y b corresponden a un mínimo.

$$\left[\text{Ayuda: Utilizar la desigualdad } n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \right]$$

- En los Ejercicios 39-42, usar el resultado del Ejercicio 37 para encontrar la recta de regresión para los puntos dados. Verificar los resultados en una calculadora que permita efectuar análisis de regresión. Representar en la calculadora los puntos y la recta de mínimos cuadrados.

39. $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$

40. $(-4, 5)$, $(-2, 6)$, $(2, 6)$, $(4, 2)$

41. $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 6)$, $(4, 12)$

42. $(0, 10)$, $(1, 9)$, $(2, 6)$, $(3, 0)$

43. **Un modelo matemático** En las pruebas con un nuevo motor turbopropulsado, se han medido los siguientes datos experimentales para la velocidad, en millas/h, en intervalos de 2 segundos.

Tiempo (x)	0	2	4	6	8	10
Velocidad (y)	0	15	30	50	65	70

- Hallar un modelo cuadrático de regresión para esos datos y confirmar el resultado con una calculadora.
- Representar los puntos y el modelo.

44. **Un modelo matemático** La tabla muestra la población mundial en varios años (en miles de millones). (Fuente: U.S. Bureau of the Census.)

Año (x)	1960	1970	1980	1990	1996
Población (y)	3,0	3,7	4,5	5,3	5,8

Hagamos corresponder $x = 0$ al año 1960. Con ayuda de una calculadora apropiada:

- Hallar la recta de regresión para esos datos.
 - Hallar el modelo cuadrático de regresión para esos datos.
 - Representar los datos y los dos modelos.
 - Estimar la población para el año 2010 usando cada uno de esos modelos. Comentar la diferencia de ambos en su extrapolación hacia el futuro.
45. **Un modelo matemático** Un meteorólogo, al medir la presión atmosférica P (en kg/m^2) a diversas alturas h (en km), ha obtenido los datos recogidos en la tabla.

h	0	5	10	15	20
P	10.332	5.583	2.376	1.240	517

- Hallar la recta de regresión para los puntos $(h, \ln P)$, con ayuda de una calculadora.
 - El resultado del apartado a) es una ecuación de la forma $\ln P = ah + b$. Escribir esta ecuación logarítmica en forma exponencial.
 - Representar en la calculadora los datos experimentales y el modelo exponencial del apartado b).
46. **Un modelo matemático** Los puntos que delimitan el intervalo de visión, llamados *punto próximo* y *punto lejano* del ojo, cambian con la edad. La tabla da el punto próximo y en centímetros a diversas edades x .

x	10	20	30	40	50
y	7	10	14	22	40

- Hallar un modelo racional para los datos, considerando el recíproco de los puntos cercanos con el fin de generar los puntos $(x, 1/y)$. Usar una calculadora capaz de efectuar análisis de regresión para determinar la recta de regresión de los puntos así obtenidos. La recta resultante tiene la forma

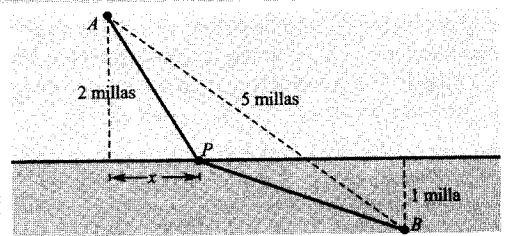
$$\frac{1}{y} = ax + b$$

Despejar y .

- Representar en una calculadora los datos y el modelo.
- ¿Cree que el modelo es fiable para estimar el punto cercano de una persona de 60 años? Explique la respuesta.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Construcción de un oleoducto Una compañía petrolífera va a construir un oleoducto desde una plataforma A , situada 2 millas mar adentro, hasta su refinería B , una milla tierra adentro. Como indica la figura, A y B distan 5 millas.



Cada milla de oleoducto cuesta 3 millones de dólares por mar y 4 millones por tierra. En consecuencia, el coste del oleoducto depende de la localización del punto P donde alcanza la orilla.

Imagine que debe redactar un informe para la compañía respecto de este problema. Sea x la distancia indicada en la figura. Calcular el coste de construcción del oleoducto entre A y P , y entre P y B . Analice algunos casos concretos y sus costes correspondientes. Por ejemplo, ¿cuánto cuesta la ruta más directa? A continuación, utilice el Cálculo para determinar la ruta que hace mínimo el coste de la construcción. Explique todos los pasos del desarrollo e incluya algunas gráficas significativas.

- CONTENIDO ■
- Multiplicadores de Lagrange
 - Problemas de optimización con ligaduras
 - El método de los multiplicadores de Lagrange con dos ligaduras ■



12.10 Multiplicadores de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

En muchos problemas de optimización, los valores admisibles para lograr el objetivo están sometidos a **ligaduras** (restricciones). Tales ligaduras complican los problemas, ya que la solución óptima puede ocurrir en un punto frontera del dominio admisible. En esta sección presentaremos una ingeniosa técnica de resolución de esta clase de problemas, que se conoce como el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para dar una idea de cómo funciona este método, supongamos que deseamos hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Sea (x, y) el vértice de la elipse situado en el primer cuadrante (Figura 12.74). Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área viene dada por

$$f(x, y) = 4xy \quad \text{Función objetivo}$$

Queremos determinar los valores x, y que hacen mínimo el valor de $f(x, y)$. La elección de (x, y) está restringida a los puntos del primer cuadrante que pertenecen a la elipse.

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{Ligadura}$$

Pues bien, consideremos la ecuación de ligadura como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas

$$f(x, y) = 4xy = k$$

En esta familia, las curvas de nivel en las que hay puntos que satisfacen la ligadura impuesta corresponden a las hipérbolas que cortan a la elipse. Además, con el fin de maximizar $f(x, y)$, queremos encontrar la hipérbola que justo toque a la elipse. La curva de nivel que cumple ese requisito es la que es *tangente* a la elipse, como vemos en la Figura 12.75.

Para hallar esa hipérbola aprovechamos el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si sus vectores gradiente son paralelos. Eso significa que en el punto de tangencia $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$. En los problemas de optimización con ligaduras ese escalar se suele denotar por λ .

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

El escalar λ se llama un **multiplicador de Lagrange**. El Teorema 12.19 establece condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores.

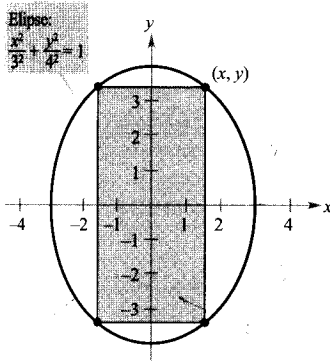


FIGURA 12.74
Función objetivo: $f(x, y) = 4xy$.

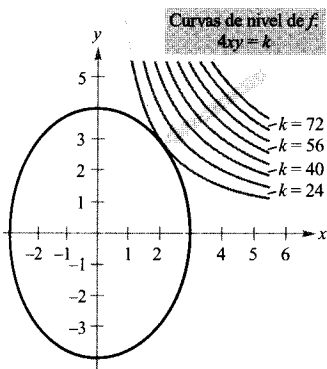


FIGURA 12.75
Ligadura: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

TEOREMA 12.19

TEOREMA DE LAGRANGE

Sean f y g con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de ligadura $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

El método de los multiplicadores de Lagrange debe su nombre al matemático francés Joseph-Louis Lagrange, quien introdujo este método en su célebre trabajo sobre Mecánica, cuando tenía sólo 19 años de edad.

Demostración: Para empezar, vamos a representar la curva suave dada por $g(x, y) = c$ mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

donde x' , y' son continuas sobre un intervalo abierto I . Definimos ahora una función h por $h(t) = f(x(t), y(t))$. Entonces, por ser $f(x_0, y_0)$ un valor extremo de f , sabemos que

$$h'(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

es un valor extremo de h . Esto implica que $h'(t_0) = 0$, así que, por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

Por tanto, $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Además, según el Teorema 12.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. En consecuencia, los gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos, luego debe existir un escalar λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \quad \square$$

El método de los multiplicadores de Lagrange apela el Teorema 12.19 para calcular los valores extremos de una función f sujeta a una ligadura.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Supongamos que f tiene un mínimo o un máximo sujeta a la ligadura $g(x, y) = c$, donde f y g cumplen los requisitos del teorema de Lagrange. Para hallar el mínimo o el máximo de f , basta seguir los pasos que se indican a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$, hallando la solución del sistema de ecuaciones

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$g(x, y) = c$$

2. Evaluar f en cada uno de los puntos solución obtenidos en el paso anterior. El mayor de esos valores da el máximo de f sujeta a la ligadura $g(x, y) = c$. El menor de ellos da el mínimo de f bajo la ligadura $g(x, y) = c$.

| Nota. Se puede demostrar que el teorema de Lagrange es válido para funciones de tres variables, usando un argumento análogo con superficies de nivel y el Teorema 12.14.

| Nota. Como veremos en los Ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange requiere resolver sistemas de ecuaciones no lineales, lo cual puede exigir un cierto ingenio.

Problemas de optimización con ligaduras

Al comienzo de esta sección describimos un problema en el cual había que hacer máxima el área de un rectángulo inscrito en una elipse. El Ejemplo 1 muestra cómo resolver ese problema gracias a los multiplicadores de Lagrange.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange para una ligadura

Calcular el valor máximo de

$$f(x, y) = 4xy, \quad x > 0, y > 0$$

sujeta a la ligadura $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

Solución: Denotemos

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda\nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, llegamos al sistema de ecuaciones

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \quad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{Ligadura}$$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda = 18y/x$, que al ser sustituido en la segunda da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \implies x^2 = \frac{9}{16}y^2$$

Sustituyendo este valor de x^2 en la tercera ecuación vemos que

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \implies y^2 = 8$$

Así pues, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se exige que $y > 0$, elegimos el valor positivo, con lo cual

$$x^2 = \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{16}(8) = \frac{9}{2} \implies x^2 = \frac{9}{2} \implies x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, el máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(2\sqrt{2}) = 24 \quad \square$$

Nota. El Ejemplo 1 puede resolverse también por las técnicas del Capítulo 3. Para ver cómo, intentemos calcular el valor máximo de $A = 4xy$ sabiendo que

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Para empezar, despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

Sustituyendo ahora en la primera obtenemos

$$A = 4x\left(\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}\right)$$

Finalmente, se pueden usar ya los métodos del Capítulo 3 para maximizar A .

Nótese que el hecho de escribir la ligadura como

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{o} \quad g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

en nada afecta a la solución, ya que la constante se elimina al calcular ∇g .

EJEMPLO 2 Una aplicación a la Economía

La función de producción de Cobb-Douglas (Ejemplo 5 de la Sección 12.1) para un cierto fabricante viene dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \quad \text{Función objetivo}$$

donde x denota las unidades de trabajo (a \$150 la unidad) e y las unidades de capital (a \$250 la unidad). Hallar el máximo nivel de producción admisible para este fabricante, si tiene el coste conjunto de trabajo y capital limitado a \$50.000.

PARA MÁS INFORMACIÓN

Sobre el uso de los multiplicadores de Lagrange en Economía, véase el artículo «Lagrange Multiplier Problems in Economics», de John V. Baxley y John C. Moorhouse, en *The American Mathematical Monthly*, septiembre 1984.

Solución: De la función dada deducimos

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4}\mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4}\mathbf{j}$$

El límite impuesto sobre el coste conjunto de trabajo y capital se refleja en la ligadura

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50.000 \quad \text{Ligadura}$$

Así pues, $\lambda \nabla g(x, y) = 150\lambda\mathbf{i} + 250\lambda\mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones

$$75x^{-1/4}y^{1/4} = 150\lambda \quad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250\lambda \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$150x + 250y = 50.000 \quad \text{Ligadura}$$

Despejando λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y sustituyendo en la segunda, obtenemos

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250 \left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} \right) \quad \text{Multiplicar por } x^{1/4}y^{3/4}$$

$$25x = 125y$$

Por tanto, $x = 5y$, que sustituido en la tercera ecuación da

$$150(5y) + 250y = 50.000$$

$$1.000y = 50.000$$

$$y = 50 \text{ unidades de capital}$$

$$x = 250 \text{ unidades de trabajo}$$

En consecuencia, la máxima producción es

$$f(250, 50) = 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \approx 16.719 \text{ unidades} \quad \square$$

Los economistas llaman **productividad marginal del capital** al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción. Así, en el Ejemplo 2 la productividad marginal del capital en $x = 250$ e $y = 50$ es

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} = \frac{(250)^{-1/4}(50)^{1/4}}{2} \approx 0,334$$

lo cual significa que por cada dólar adicional que se gaste en producción, se podrán producir 0,334 unidades adicionales.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange en tres variables

Calcular el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \quad \text{Función objetivo}$$

sujeta a la ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución: Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$4x = 2\lambda \quad f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z)$$

$$2y = -3\lambda \quad f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z)$$

$$6z = -4\lambda \quad f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z)$$

$$2x - 3y - 4z = 49 \quad \text{Ligadura}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$\begin{aligned} f(3, -9, -4) &= 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2 \\ &= 147 \end{aligned}$$

Por la forma de la función original y la ligadura, es claro que $f(x, y, z)$ carece de máximo. En consecuencia, el valor óptimo recién hallado es un mínimo. \square

Al comienzo de esta sección, dimos una interpretación gráfica de los problemas de optimización con ligaduras en dos variables. En tres variables la interpretación es similar, pero con superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. Así, en el Ejemplo 3, las superficies de nivel de f son elipsoides centrados en el origen, y la ligadura $2x - 3y - 4z = 49$ es un plano. El valor mínimo de f lo representa el elipsoide tangente al plano de la ligadura (Figura 12.76).

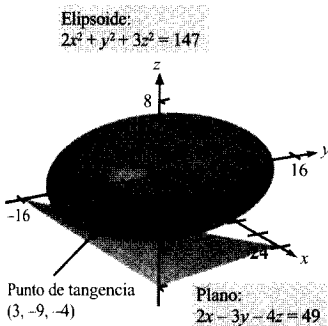


FIGURA 12.76

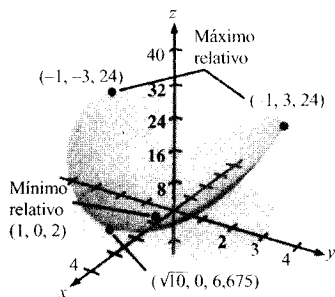


FIGURA 12.77

EJEMPLO 4 Optimización en el interior de una región

Hallar los valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 \quad \text{Función objetivo}$$

sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 10$.

Solución: Para resolver este problema, podemos separar la ligadura en dos casos.

- Para los puntos que están *en el círculo* $x^2 + y^2 = 10$ podemos ver, usando multiplicadores de Lagrange, que el máximo valor de $f(x, y)$ es 24, valor que se alcanza en $(-1, 3)$ y en $(-1, -3)$. Del mismo modo se puede ver que el valor mínimo de $f(x, y)$ es aproximadamente 6,675, valor que se alcanza en $(\sqrt{10}, 0)$.
- Para los puntos *interiores al círculo*, las técnicas de la Sección 12.8 permiten averiguar que la función tiene un mínimo relativo de valor 2 en el punto $(1, 0)$.

Combinando ambos resultados, llegamos a la conclusión de que f tiene valor máximo 24 en $(-1, \pm 3)$ y valor mínimo 2 en $(1, 0)$, como muestra la Figura 12.77. \square

El método de los multiplicadores de Lagrange con dos ligaduras

En los problemas de optimización con dos funciones de ligadura g y h , introducimos un segundo multiplicador de Lagrange μ y resolvemos la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

tal como enseña el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimización con dos ligaduras

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Calcular las temperaturas extremas sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$.

Solución: Las dos ligaduras son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \quad \text{y} \quad h(x, y, z) = x + y + z = 3$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla T(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

Llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x + \mu & T_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ 2 &= 2\lambda y + \mu & T_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ 2z &= 2\lambda z + \mu & T_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 11 & \text{Ligadura 1} & \\ x + y + z &= 3 & \text{Ligadura 2} & \end{aligned}$$

Restando la segunda de la primera, el sistema se convierte en

$$\begin{aligned} \lambda(x - y) &= 0 \\ 2z(1 - \lambda) - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 11 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

ADVERTENCIA El sistema de ecuaciones que aparece en el método de los multiplicadores de Lagrange no es, por lo general, un sistema lineal, de modo que su resolución suele exigir cierta dosis de ingenio.

De la primera deducimos que ha de ser $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$, es fácil verificar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Intente comprobarlo, si bien resulta algo laborioso.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$, en cuyo caso se puede ver que los puntos críticos ocurren en $x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3$ y $z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$. Finalmente, para determinar las soluciones óptimas, comparamos las temperaturas en los cuatro puntos críticos:

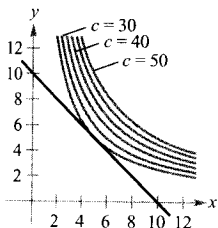
$$\begin{aligned} T(3, -1, 1) &= T(-1, 3, 1) = 25 \\ T\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30,33 \\ T\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30,33 \end{aligned}$$

Por tanto, la temperatura mínima sobre esa curva es $T=25$ y la máxima $T=\frac{91}{3}$. \square

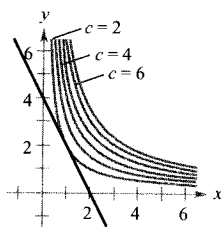
Ejercicios de la Sección 12.10

En los Ejercicios 1-4, identificar en la figura la ligadura y las curvas de nivel de la función objetivo. Usar la figura para aproximar los extremos indicados, suponiendo que x e y son positivos. Verificar los resultados mediante multiplicadores de Lagrange.

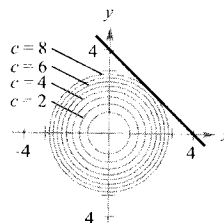
1. Maximizar $z = xy$
Ligadura: $x + y = 10$



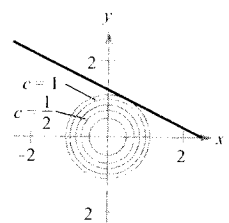
2. Maximizar $z = xy$
Ligadura: $2x + y = 4$



3. Minimizar $z = x^2 + y^2$
Ligadura: $x + y - 4 = 0$



4. Minimizar $z = x^2 + y^2$
Ligadura: $2x + 4y = 5$



En los Ejercicios 5-12, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos que se especifican, supuestos x e y positivos.

5. Minimizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
Ligadura: $x - 2y + 6 = 0$
6. Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
Ligadura: $y - x^2 = 0$
7. Maximizar $f(x, y) = 2x + 2xy + y$
Ligadura: $2x + y = 100$
8. Minimizar $f(x, y) = 3x + y + 10$
Ligadura: $x^2y = 6$
9. Maximizar $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
Ligadura: $x + y - 2 = 0$
10. Minimizar $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Ligadura: $2x + 4y - 15 = 0$
11. Maximizar $f(x, y) = e^{xy}$
Ligadura: $x^2 + y^2 = 8$
12. Minimizar $f(x, y) = 2x + y$
Ligadura: $xy = 32$

En los Ejercicios 13-16, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos que se indican, suponiendo que x , y , z son positivos.

13. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Ligadura: $x + y + z - 6 = 0$
14. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Ligadura: $x + y + z - 6 = 0$
15. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Ligadura: $x + y + z = 1$
16. Minimizar $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 - 12y + 48$
Ligadura: $x + y = 8$

En los Ejercicios 17-20, usar multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f , sujeta a las dos ligaduras que se especifican. En cada caso, se supone que x , y , z son no negativos.

17. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Ligadura: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$
18. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Ligadura: $x + 2z = 4$, $x + y = 8$
19. Maximizar $f(x, y, z) = xy + yz$
Ligadura: $x + 2y = 6$, $x - 3z = 0$
20. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Ligadura: $x^2 + z^2 = 5$, $x - 2y = 0$

En los Ejercicios 21 y 22, usar multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos de la función, sometida a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$21. f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 \quad 22. f(x, y) = e^{-xy}$$

En los Ejercicios 23-26, usar multiplicadores de Lagrange para determinar la distancia mínima de la curva o superficie al punto dado. [Ayuda: En el Ejercicio 23, minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la ligadura $2x + 3y = -1$.]

<u>Curva</u>	<u>Punto</u>
23. Recta: $2x + 3y = -1$	(0, 0)
24. Círculo: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	(0, 10)
<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
25. Plano: $x + y + z = 1$	(2, 1, 1)
26. Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(4, 0, 0)

En los Ejercicios 27 y 28, hallar el punto más alto de la curva intersección de las superficies.

27. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, Plano: $2x + y - z = 2$
28. Cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, Plano: $x + 2z = 4$

29. **Volumen** Averiguar las dimensiones del paquete rectangular de máximo volumen sometido a la restricción de que la suma de su longitud y el perímetro de la sección transversal no exceda de 108 pulgadas.

30. **Volumen** El material de la base de una caja abierta cuesta 1,5 veces lo que cuesta el material de sus caras laterales. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse con un coste fijo C . (Hay que hacer máximo $V = xyz$, sujeta a la restricción $1,5xy + 2xz + 2yz = C$.)

31. **Coste** Un contenedor, en forma de paralelepípedo rectangular, ha de tener un volumen de 480 pies cúbicos. Usar multiplicadores de Lagrange para determinar sus dimensiones de manera que su coste sea el mínimo posible, sabiendo que la base cuesta \$5 por pie cuadrado y las caras laterales \$3 por pie cuadrado.

32. **Área superficial** Usar multiplicadores de Lagrange para calcular las dimensiones de una caja cilíndrica circular recta de volumen V_0 y de área superficial mínima.

33. **Volumen** Usar multiplicadores de Lagrange para calcular las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo que pueda ser inscrita (con sus aristas paralelas a los ejes de coordenadas) en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

34. Medias aritmética y geométrica

- a) Usar multiplicadores de Lagrange para probar que el producto de tres números positivos x, y, z , cuya suma tiene valor prefijado S , es máximo cuando los tres números son iguales. Utilizando ese resultado, demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}$$

- b) Generalizar el resultado del apartado a), probando que el producto $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$, $\sum_{i=1}^n x_i = S$, y todos los $x_i \geq 0$. Utilizando este resultado, verificar que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Esto demuestra que la media geométrica no es nunca mayor que la media aritmética.

- 35. Refracción de la luz** Cuando la luz que viaja por un medio transparente llega a la superficie de otro medio distinto, se desvía con el fin de seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esa desviación se llama refracción y viene descrita por la **ley de la refracción de Snell**, según la cual

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1, θ_2 son los ángulos de la figura, y v_1, v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Usar multiplicadores de Lagrange para demostrar esa ley, teniendo en cuenta el valor constante de $x + y = a$.

- 36. Área y perímetro** La figura muestra un semicírculo adosado a un rectángulo. Si el área está fijada y el perímetro es mínimo, o si el perímetro está fijado y el área es máxima, usar multiplicadores de Lagrange para comprobar que la longitud del rectángulo es doble que su altura.

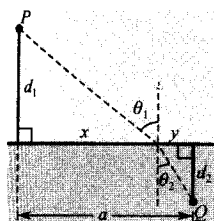


FIGURA E.35

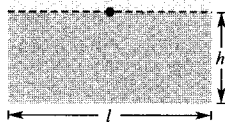


FIGURA E.36

- 37. Ley de Hardy-Weinberg** Usar multiplicadores de Lagrange para hacer máximo el valor de $P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2qr$ sujeto a $p + q + r = 1$. (Véase Ejercicio 22 en Sección 12.9.)

- 38. Distribución de temperaturas** Sea

$$T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$$

la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x - z = 0$.

Nivel de producción En los Ejercicios 39 y 40, calcular el máximo nivel de producción P si el coste total del trabajo (a \$48 la unidad) y del capital (a \$36 la unidad) está limitado a \$100.000, donde x denota el número de unidades de trabajo e y el número de unidades de capital.

39. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$

40. $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

Coste En los Ejercicios 41 y 42, hallar el mínimo coste de producción de 20.000 unidades de un producto, siendo x el número de unidades de trabajo (a \$48 la unidad) e y el número de unidades de capital (a \$36 la unidad).

41. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$

42. $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

- 43. Investigación** Consideremos la función objetivo $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, sujeta a la restricción de que α, β, γ sean los ángulos de un triángulo.

- a) Usar multiplicadores de Lagrange para hacer máximo el valor de g .
b) Mediante la ligadura, reducir g a una función de dos variables independientes. Usar una calculadora para representar la gráfica de la superficie definida por g . Identificar en la gráfica los valores máximos.

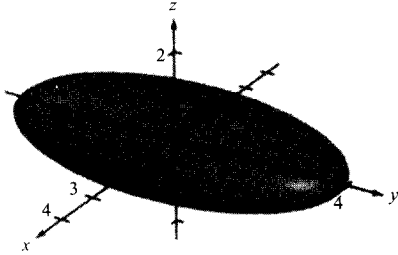
- 44. Investigación** Consideremos la función objetivo $f(x, y) = ax + by$, sujeta a la ligadura $x^2/64 + y^2/36 = 1$. Suponemos que x e y son positivos.

- a) Representar, con ayuda de una calculadora, la ecuación de la ligadura. Para $a = 4$ y $b = 3$, representar las curvas de nivel de la función objetivo. Por prueba y error, hallar la curva de nivel que parece ser tangente a la elipse. Estimar así el máximo de f sujeta a esa ligadura.
b) Repetir la parte a) con $a = 4$ y $b = 9$.

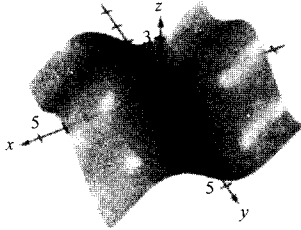
Ejercicios de repaso del Capítulo 12

En los Ejercicios 1 y 2, usar la gráfica para determinar si z es una función de x e y . Explicar la respuesta.

1.



2.



En los Ejercicios 3-6, dibujar en una calculadora varias curvas de nivel de la función.

3. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

4. $f(x, y) = \ln xy$

5. $f(x, y) = x^2 - y^2$

6. $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$

En los Ejercicios 7 y 8, representar la función en una calculadora.

7. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

8. $g(x, y) = |y|^{1+|x|}$

En los Ejercicios 9-12, investigar la continuidad de la función y evaluar el límite, si existe.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2-y^2}$

11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-4x^2y}{x^4+y^2}$

12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y+xe^{-y^2}}{1+x^2}$

En los Ejercicios 13-22, calcular las primeras derivadas parciales.

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

15. $z = xe^y + ye^x$

16. $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

17. $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

18. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

19. $f(x, y, z) = z \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

20. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

21. $u(x, t) = ce^{-n^2t} \operatorname{sen} nx$

22. $u(x, t) = c \operatorname{sen}(akx) \cos kt$

En los Ejercicios 23 y 24, calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

23. $x^2y - 2yz - xz - z^2 = 0$

24. $xz^2 - y \operatorname{sen} z = 0$

En los Ejercicios 25-28, hallar las segundas derivadas parciales y comprobar que las derivadas mixtas son iguales.

25. $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$

26. $h(x, y) = \frac{x}{x+y}$

27. $h(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x$

28. $g(x, y) = \cos(x - 2y)$

Ecuación de Laplace En los Ejercicios 29-32, verificar que la función satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

29. $z = x^2 - y^2$

30. $z = x^3 - 3xy^2$

31. $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$

32. $z = e^x \operatorname{sen} y$

En los Ejercicios 33 y 34, hallar las derivadas que se indican a) por la regla de la cadena y b) sustituyendo antes de derivar.

33. $u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial t}$

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

34. $u = y^2 - x, \quad \frac{du}{dt}$

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$$

En los Ejercicios 35-38, hallar la derivada direccional en la dirección de \mathbf{v} en el punto especificado.

<u>Función</u>	<u>Dirección</u>	<u>Punto</u>
35. $f(x, y) = x^2y$	$\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$	(2, 1)
36. $f(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - x^2$	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$	(1, 4)
37. $w = y^2 + xz$	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$	(1, 2, 3)
38. $w = 6x^2 + 3xy - 4y^2z$	$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$	(1, 0, 1)

En los Ejercicios 39-42, hallar el gradiente y el valor máximo de la derivada direccional de la función en el punto que se indica.

39. $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$, (1, 1) 40. $z = \frac{x^2}{x - y}$, (2, 1)

41. $z = e^{-x} \cos y$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 42. $z = x^2y$, (2, 1)

En los Ejercicios 43-46, hallar la ecuación del plano tangente y ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto que se indica.

<u>Superficie</u>	<u>Punto</u>
43. $f(x, y) = x^2y$	(2, 1, 4)
44. $f(x, y) = \sqrt{25 - y^2}$	(2, 3, 4)
45. $z = -9 + 4x - 6y - x^2 - y^2$	(2, -3, 4)
46. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	(1, 2, 2)

En los Ejercicios 47 y 48, hallar ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva intersección de las superficies en el punto dado.

<u>Superficies</u>	<u>Punto</u>
47. $z = x^2 - y^2, z = 3$	(2, 1, 3)
48. $z = 25 - y^2, y = x$	(4, 4, 9)

En los Ejercicios 49-52, localizar y clasificar los extremos de la función. Representarla en una calculadora y confirmar los resultados analíticos en la gráfica.

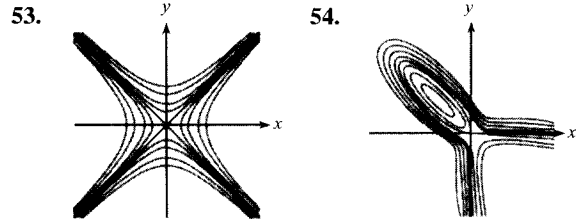
49. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$

50. $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 14$

51. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

52. $z = 50(x + y) - (0,1x^3 + 20x + 150) - (0,05y^3 + 20,6y + 125)$

Redacción En los Ejercicios 53 y 54, escribir unas líneas acerca de la superficie cuyas curvas de nivel (con valores c uniformemente espaciados) se muestran. Comentar los posibles extremos, puntos silla, la magnitud del gradiente, etc.



55. **Para pensar** Dibujar un esbozo de la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x, f_y sean siempre negativas.

56. **Aproximación** Consideremos las siguientes aproximaciones, centradas en (0, 0), de una función $f(x, y)$.

Aproximación lineal

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Aproximación cuadrática

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Nótese que la aproximación lineal viene dada por el plano tangente a la superficie en (0, 0, $f(0, 0)$.)]

- Hallar la aproximación lineal de $f(x, y) = \cos x + \sin y$, centrada en (0, 0).
- Hallar la aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x + \sin y$, centrada en (0, 0).
- Si se hace $y = 0$ en la aproximación cuadrática, se obtiene el polinomio de Taylor de segundo grado ζ de qué función?
- Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0,1			
0,2	0,1			
0,5	0,3			
1	0,5			

e) Representar, en una calculadora, las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$. ¿Cómo varía la precisión de las aproximaciones al crecer la distancia a (0, 0)?

En los Ejercicios 57 y 58, hallar dz .

57. $z = x \operatorname{sen} \frac{y}{x}$

58. $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

59. **Análisis de errores** Al medir los lados de un rectángulo se obtienen valores de 5 y 12 cm, con un error máximo posible de $\frac{1}{2}$ cm. Estimar la cota de error y el porcentaje máximo de error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa.

60. **Análisis de errores** Para calcular la altura de una torre, se ha medido el ángulo de elevación de su extremo superior desde un punto que dista $100 \pm \frac{1}{2}$ pies de la base de la torre. La medida del ángulo da 33° , con un error máximo posible de 1° . Estimar la cota de error en la determinación de la altura de la torre, suponiendo que el suelo es perfectamente horizontal.

61. **Análisis de errores** El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Los valores medidos para r y h son 2 y 5 pulgadas. Hallar el error aproximado en el cálculo del volumen debido a que esas dos medidas se pueden haber visto afectadas por un error de hasta $\frac{1}{8}$ de pulgada.

62. **Análisis de errores** Aproximar el error en el área lateral del cono del Ejercicio 61. (El área lateral del cono es $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.)

63. **Beneficios** Una empresa fabrica un producto en dos lugares. Las funciones de coste de producción de x_1 unidades en el primero y x_2 en el segundo son

$$C_1 = 0,05x_1^2 + 15x_1 + 5.400$$

$$C_2 = 0,03x_2^2 + 15x_2 + 6.100$$

y la función de ingresos totales es

$$R = [225 - 0,4(x_1 + x_2)](x_1 + x_2)$$

Calcular los niveles de producción en los dos centros de fabricación que hacen máximo el beneficio $P(x_1, x_2) = R - C_1 - C_2$.

64. **Coste** Un fabricante recibe un pedido de 1.000 unidades de un producto que puede producir en dos lugares. Sean x_1, x_2 los números de unidades producidos en cada uno de ellos. Hallar para qué valores se logra un coste mínimo, si la función de coste viene dada por

$$C = 0,25x_1^2 + 10x_1 + 0,15x_2^2 + 12x_2$$

65. **Nivel de producción** La función de producción para un fabricante es

$$f(x, y) = 4x + xy + 2y$$

donde x denota el número de unidades de trabajo y y el de unidades de capital. Supongamos que se dispone, para el conjunto de unidades de trabajo y capital, de \$2.000 y que cada unidad de trabajo y de capital cuesta, respectivamente, \$20 y \$4. Calcular el máximo nivel de producción permitido al fabricante.

66. **Un modelo matemático** La tabla recoge la fuerza y en kilogramos de un motor a las velocidades (en km/h) que se especifican.

Velocidad (x)	25	50	75	100	125
Fuerza (y)	28	38	54	75	102

- Usar regresión en una calculadora para hallar la recta de mínimos cuadrados que ajuste esos datos.
- Usar ese modelo para estimar la fuerza para una velocidad de 80 km/h.

67. **Un modelo matemático** La tabla muestra la producción y (en miligramos) de una reacción química al cabo de t minutos.

t	1	2	3	4
y	1,5	7,4	10,2	13,4

t	5	6	7	8
y	15,8	16,3	18,2	18,3

Con ayuda de calculadora:

- Representar los datos, hallar un modelo lineal para ellos y representar el modelo.
- Representar los puntos $(\ln t, y)$. ¿Parecen seguir un modelo lineal estos puntos con más precisión que los del apartado a)?
- Hallar un modelo lineal para los datos $(\ln t, y)$ y obtener un modelo logarítmico

$$y = a + b \ln t$$

- Representar los datos junto con los modelos lineal y logarítmico. ¿Cuál de los modelos es mejor? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 68 y 69, localizar y clasificar los extremos de la función utilizando multiplicadores de Lagrange.

68. $z = x^2y$

Ligadura: $x + 2y = 2$

69. $w = xy + yz + xz$

Ligadura: $x + y + z = 1$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 70-72, discutir si el enunciado es correcto o no. En caso de que no lo sea, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

70. De todos los paralelepípedos con área fija, el cubo es el de volumen máximo.

71. El gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la superficie dada por $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) .

72. El plano $x_0x + y_0y + z_0z = c^2$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Capítulo 13

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

El *CLI Hyperthermia Microfocus 1000* es capaz de aplicar microondas a los tumores y puede convertir la terapia térmica en un método de uso común.

Tratamiento de tumores por hipertermia

Los tratamientos por hipertermia utilizan elevadas temperaturas para destruir tumores malignos. Con el fin de elevar la temperatura de los tejidos malignos hasta unos 107°F se utilizan microondas. La técnica de tratamiento térmico no es nueva y los médicos estiman que la aplicación de suficiente calor puede doblar la eficiencia de las radiaciones y de la quimioterapia. No es todavía una técnica de uso común hoy en día, debido a la dificultad que supone concentrar la energía sobre el tumor de forma precisa.

Se espera que el último avance tecnológico, el APA (*Adaptive Phased Array*), resuelva el problema de la focalización. Originalmente diseñado para localizar objetivos en los sistemas de radar, en tareas de defensa estratégica, el APA ha sido adaptado por el MIT (*Massachusetts Institute of Technology*). En 1996, el MIT concedió la licencia a los laboratorios Cheung, donde fue incorporado a un instrumento capaz de dirigir un haz de energía directamente al tumor, minimizando la elevación de la temperatura en los tejidos próximos.

Durante el tratamiento, la temperatura del tumor es máxima en su centro y disminuye hacia el exterior. Las regiones que están a la misma temperatura (equitermas) pueden visualizarse como superficies cerradas encajadas unas en otras. El problema de determinar la porción del tumor que ha alcanzado ya la temperatura adecuada se reduce a calcular la razón V_T/V , donde V es el volumen total del tumor y V_T el volumen de la porción del tumor que está a temperatura mayor T . Utilizando la tecnología del APA, las formas de las superficies equitermas se determinan gracias al tipo de aplicador utilizado, el cual se elige en función de la forma del tumor.

Nota. En el Proyecto de la Sección 13.7 se dan ecuaciones para otras posibles formas tumorales.

CUESTIONES

1. En el tratamiento de un tumor esférico, un técnico utiliza un testigo para saber si la temperatura ha alcanzado un nivel adecuado hacia la mitad del radio del tumor. ¿Cuál es el valor del cociente V_T/V ? ¿Es $1/2$? Razone su respuesta.
2. Supongamos que un tumor elipsoidal admite como modelo la ecuación

$$\frac{x^2}{2,5} + \frac{y^2}{6,5} + \frac{z^2}{2,5} = 1$$

Consideremos una secuencia de cinco elipsoides equitermos cuyos ejes mayor y menor crecen linealmente, siendo el quinto equitermo el tumor completo. Escribir una ecuación para cada uno de los elipsoides equitermos. A continuación, hallar la razón V_T/V para cada uno de ellos.

- CONTENIDO ▀
 Integrales iteradas ▀
 Área de una región plana ▀

| Nota. En los Capítulos 13 y 14 estudiaremos diversas aplicaciones de la integración de funciones de varias variables. El Capítulo 13 es muy similar al Capítulo 6, ya que ilustra el uso de la integración para calcular áreas planas, volúmenes, áreas superficiales, momentos y centros de masas.

Integración múltiple



13.1

Integrales iteradas y áreas en el plano

Integrales iteradas

En el Capítulo 12 vimos que tiene sentido diferenciar una función de varias variables respecto de una de ellas, manteniendo constantes las demás. Por un procedimiento análogo, vamos a *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, si se nos da la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$

podemos, considerando a y como constante, integrar con respecto a x , obteniendo así

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int f_x(x, y) \, dx && \text{Integrar en } x \\ &= \int 2xy \, dx && \text{Mantener y constante} \\ &= y \int 2x \, dx && \text{Sacar fuera el factor } y \\ &= y(x^2) + C(y) && \text{Una primitiva de } 2x \text{ es } x^2 \\ &= x^2y + C(y) && C(y) \text{ es función de } y \end{aligned}$$

Nótese que la «constante» de integración, $C(y)$, es una función de y . En otras palabras, integrando respecto de x sólo somos capaces de reconstruir $f(x, y)$ parcialmente. De la reconstrucción total de una función de dos variables a partir de sus derivadas parciales nos ocuparemos en el Capítulo 14. Por el momento, nos dedicaremos a extender la integración definida a funciones de varias variables. Por ejemplo, considerando y constante, podemos aplicar el teorema fundamental del Cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy \, dx = x^2y \Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y$$

/
\ /
\ /

x es la variable de integración; y es fija
Sustituir x por los límites de integración
El resultado es una función de y

Análogamente, podemos integrar respecto de y manteniendo x fija. Ambos procedimientos se recogen a continuación.

$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y) \, dx = f(x, y) \Big _{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y)$	Con respecto a x
$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y) \, dy = f(x, y) \Big _{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x))$	Con respecto a y

Las variables de integración no pueden aparecer en los límites de la integral. Así, no tiene sentido escribir $\int_0^x y \, dx$.

EJEMPLO 1 Integración respecto de y

Evaluar $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) \, dy$

Solución: Considerando x como constante, e integrando en y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) \, dy &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2 \right]_1^x \\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2 \right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1 \right) \\ &= 3x^2 - 2x - 1 \quad \square \end{aligned}$$

En el Ejemplo 1, nótese que la integral define una función de x, de modo que ella misma puede ser integrada, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Calcular $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) \, dy \right] dx$

Solución: Usando el resultado del Ejemplo 1 vemos que

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1) dx \\
 &= \left[x^3 - x^2 - x \right]_1^2 \\
 &= 2 - (-1) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

□

La integral del Ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes utilizados en el Ejemplo 2 suelen omitirse. De hecho, las integrales iteradas se escriben

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables respecto de la variable exterior de integración. Por el contrario, los **límites exteriores de integración** han de ser constantes con respecto a las dos variables de integración. Una vez efectuada la integración interior, se llega a una integral definida ordinaria, y la segunda integración produce ya un número real. Los límites de integración de una integral iterada identifican dos intervalos para las variables. Así, en el Ejemplo 2 los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \leq x \leq 2$ y los interiores indican que y está en el intervalo $1 \leq y \leq x$. Conjuntamente, esos dos intervalos determinan la región de integración R de la integral iterada (véase Figura 13.1).

Puesto que una integral iterada no es sino un caso especial de integral definida, en el que el integrando es a su vez una integral, podemos utilizar las propiedades de las integrales definidas al evaluar integrales iteradas.

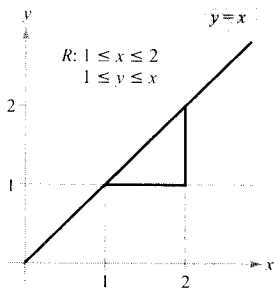


FIGURA 13.1

La región de integración para $\int_1^2 \int_1^x f(x, y) dy dx$.

Área de una región plana

En el resto de la sección contemplamos desde una perspectiva nueva el viejo problema de calcular el área de una región en el plano. Consideremos la región plana R acotada por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Su área viene dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$$

Gracias al teorema fundamental del Cálculo podemos reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. En concreto, si consideramos que x está fija y hacemos variar y desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, tenemos

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x)$$

Combinando esas dos integrales podemos expresar el área de R como la integral iterada

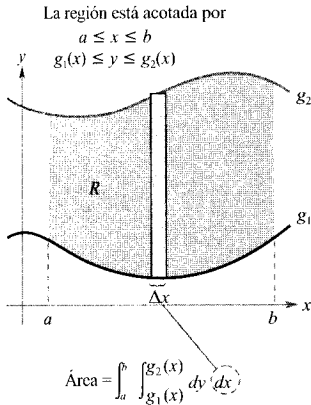


FIGURA 13.2
 Región verticalmente simple.

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \quad \text{Área de } R$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$$

Colocando un rectángulo representativo en la región R es fácil determinar tanto el orden como los límites de la integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy dx$, con los límites interiores de integración correspondiendo a las cotas superior e inferior del rectángulo (Figura 13.2). Una región de este tipo se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración son las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Análogamente, un rectángulo horizontal implica el orden $dx dy$, con los límites interiores determinados por las cotas izquierda y derecha del rectángulo (Figura 13.3). Una región de esta clase se llama **horizontalmente simple**, ya que los límites exteriores son las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Las integrales iteradas en los dos tipos de regiones se resumen en el cuadro siguiente.

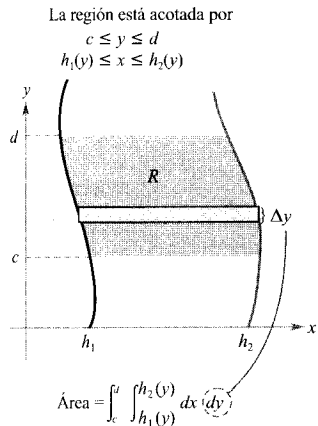


FIGURA 13.3
 Región horizontalmente simple.

ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1, g_2 son continuas en $[a, b]$, el área de R viene dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx \quad \text{Figura 13.2 (verticalmente simple)}$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1, h_2 son continuas en $[c, d]$, el área de R viene dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy \quad \text{Figura 13.3 (horizontalmente simple)}$$

| Nota. Debe convencerse de que el orden en esas dos integrales es diferente: $dy dx$ para regiones verticalmente simples, y $dx dy$ para regiones horizontalmente simples.

Si los cuatro límites son constantes, la región de integración es rectangular, como muestra el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

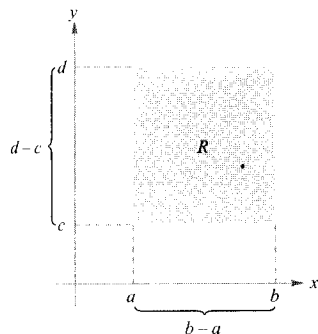


FIGURA 13.4
 Área = $\int_a^b \int_c^d dy dx = (d - c)(b - a)$.

Representar mediante una integral iterada el área del rectángulo de la Figura 13.4.

Solución: La región de la Figura 13.4 es simple verticalmente y horizontalmente, de manera que podemos utilizar cualquiera de los órdenes de integración. Eligiendo el orden $dy dx$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \int_c^d dy \, dx &= \int_a^b \left[y \right]_c^d dx \\
 &= \int_a^b (d - c) \, dx \\
 &= \left[(d - c)x \right]_a^b \\
 &= (d - c)(b - a)
 \end{aligned}$$

Como vemos, el resultado es el que cabía esperar. □

EJEMPLO 4 Cálculo del área por una integral iterada

Usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{La curva seno es la cota superior}$$

$$g(x) = \text{cos } x \quad \text{La curva coseno es la cota inferior}$$

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución: Puesto que f y g vienen dadas como funciones de x , conviene un rectángulo representativo vertical, luego el orden $dy \, dx$ de integración (Figura 13.5). Los límites exteriores de integración son $\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$. Además, el rectángulo está acotado superiormente por $f(x) = \text{sen } x$ e inferiormente por $g(x) = \text{cos } x$, luego

$$\begin{aligned}
 \text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\text{cos } x}^{\text{sen } x} dy \, dx \\
 &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[y \right]_{\text{cos } x}^{\text{sen } x} dx \\
 &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen } x - \text{cos } x) \, dx \\
 &= \left[-\text{cos } x - \text{sen } x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

□

| Nota. La región de integración de una integral iterada no tiene por qué estar acotada por rectas. Por ejemplo, la de la Figura 13.5 es *verticalmente simple* aunque sus fronteras izquierda y derecha no son rectas verticales. Lo que caracteriza a las regiones verticalmente simples es que están acotadas superior e inferiormente por gráficas de *funciones de x* .

En un problema concreto de integración, uno de los órdenes hará más sencillos los cálculos. Así, si intenta rehacer el Ejemplo 4 usando el orden $dx \, dy$

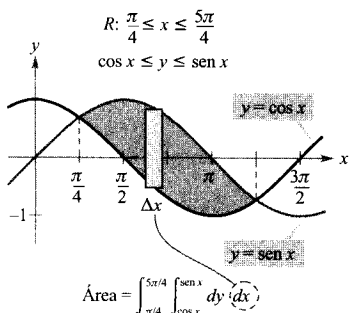


FIGURA 13.5

comprobará, con sorpresa, que la tarea es titánica. Ahora bien, si consigue terminarla, la respuesta obtenida será la misma, claro está. En otras palabras, el orden de integración afecta a la dificultad de los cálculos, pero no a su resultado.

EJEMPLO 5 Comparación de órdenes de integración distintos

Dibujar un esbozo de la región cuya área viene dada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy$$

Representar, a continuación, esa misma área mediante una integral con orden de integración $dy dx$. Verificar que las dos integrales dan el mismo valor para el área.

Solución: A la vista de los límites de integración propuestos, vemos que

$$y^2 \leq x \leq 4 \quad \text{Límites interiores de integración}$$

de modo que la región R está acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{Límites exteriores de integración}$$

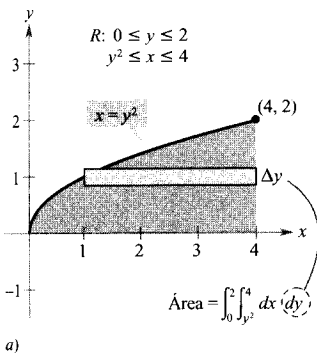
R está acotada por abajo por el eje x , como muestra la Figura 13.6a. El valor de esa integral es

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy &= \int_0^2 \left[x \right]_{y^2}^4 dy \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

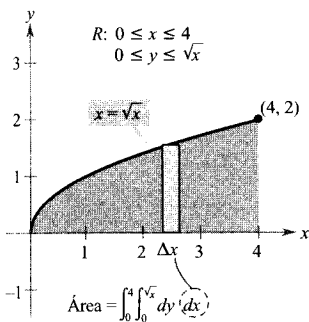
Para cambiar el orden de integración a $dy dx$, colocamos un rectángulo vertical en la región, como indica la Figura 13.6b. Así vemos que las cotas constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites interiores de integración. Despejando y en la ecuación $x = y^2$, concluimos que los límites interiores son $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$$

Calculando esta integral, comprobamos que da el mismo valor que la integral original:



a)



b)

FIGURA 13.6

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy \, dx &= \int_0^4 \left[y \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^4 \sqrt{x} \, dx \\
 &= \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^4 = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

□



Algunos programas informáticos son capaces de efectuar integración simbólica para integrales como las del Ejemplo 6. Si dispone de los medios adecuados, calcule con ellos las integrales que aparezcan en los ejercicios y ejemplos de esta sección.

En ocasiones no es posible calcular el área de una región con una única integral. En tales situaciones, se puede dividir la región en subregiones cuyas áreas sean calculables, cada una de ellas, mediante una integral iterada. El área total es simplemente la suma de las integrales iteradas.

EJEMPLO 6 Un área dada por la suma de dos integrales iteradas

Calcular el área de la región R comprendida entre la parábola

$$y = 4x - x^2 \quad \text{La parábola es la cota superior}$$

y el eje x , y por encima de la recta

$$y = -3x + 6 \quad \text{La recta y el eje } x \text{ constituyen la cota inferior}$$

que se muestra en la Figura 13.7.

Solución: Empezamos partiendo la región R en dos subregiones R_1 y R_2 (Figura 13.7). En ambas subregiones conviene utilizar rectángulos verticales, de modo que

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy \, dx \\
 &= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6) \, dx + \int_2^4 (4x - x^2) \, dx \\
 &= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\
 &= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6 \right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} \right) \\
 &= \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

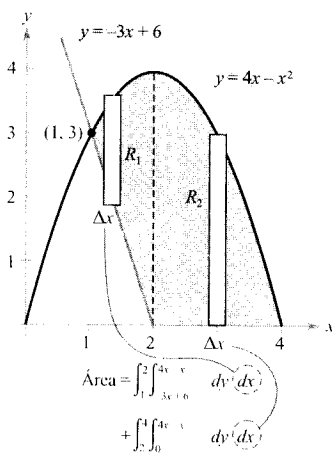


FIGURA 13.7

El área de la región es $15/2$ unidades cuadradas. Intente comprobar el resultado usando el procedimiento de cálculo del área entre dos curvas de la Sección 6.1. \square

| Nota. Es evidente la ventaja que supone disponer de un esbozo de la región de integración en los Ejemplos 3 a 6. Recomendamos insistentemente adquirir el hábito de dibujar la región, ya que es de gran ayuda a la hora de determinar los límites de integración para todas las integrales iteradas de este capítulo.

En este punto, el lector tiene derecho a preguntarse por qué razón va a necesitar integrales iteradas. Después de todo, ya sabe cómo hallar el área de una región plana utilizando integrales ordinarias. (Por ejemplo, compare la solución del Ejemplo 4 de esta sección con la del Ejemplo 3 de la Sección 6.1.) La necesidad de las integrales iteradas quedará patente en la próxima sección. En esta sección hemos preferido prestar toda nuestra atención a los procedimientos de determinación de los límites de integración de las integrales iteradas y la colección de ejercicios que sigue está diseñada con el propósito de adquirir práctica en ese empeño.

Ejercicios de la Sección 13.1

En los Ejercicios 1-10, evaluar la integral.

$$1. \int_0^x (2x - y) dy$$

$$2. \int_x^{x^2} \frac{y}{x} dy$$

$$3. \int_1^{2y} \frac{y}{x} dx$$

$$4. \int_0^{\cos y} y dx$$

$$5. \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy$$

$$6. \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy$$

$$7. \int_{e^y}^y \frac{y \ln x}{x} dx$$

$$8. \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx$$

$$9. \int_0^{x^3} ye^{-y/x} dy$$

$$10. \int_y^{\pi/2} \sin^3 x \cos y dx$$

$$15. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) dx dy$$

$$16. \int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3x dx dy$$

$$17. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} dx dy$$

$$18. \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r dr d\theta$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \theta r dr d\theta$$

$$20. \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} 3r^2 \sin \theta dr d\theta$$

En los Ejercicios 11-20, calcular la integral iterada.

$$11. \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$$

$$12. \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy dx$$

$$13. \int_{-1}^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2 + 1) dx dy$$

$$14. \int_0^1 \int_y^1 (1 + 2x^2 + 2y^2) dx dy$$

En los Ejercicios 21-24, evaluar la integral iterada impropia.

$$21. \int_1^{\infty} \int_0^{1/x} y dy dx \quad 22. \int_0^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$$

$$23. \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{xy} dx dy \quad 24. \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

En los Ejercicios 25-28, dibujar un esbozo de la región R de integración y cambiar el orden de integración.

$$25. \int_0^4 \int_0^y f(x, y) dx dy \quad 26. \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy$$

$$27. \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx \quad 28. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx$$

En los Ejercicios 29-36, dibujar la región R cuya área representa la integral iterada. A continuación, cambiar el orden de integración y probar que ambos órdenes dan el mismo valor para el área.

$$29. \int_0^1 \int_0^2 dy dx$$

$$30. \int_1^2 \int_2^4 dx dy$$

$$31. \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy$$

$$32. \int_0^2 \int_0^x dy dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy dx$$

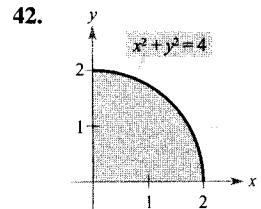
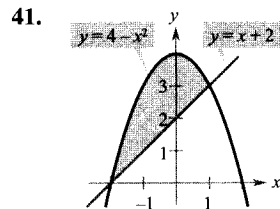
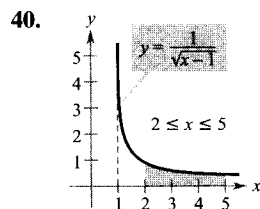
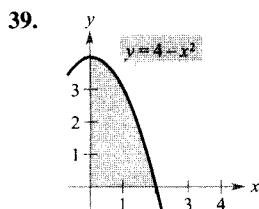
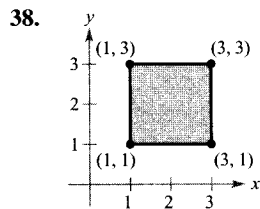
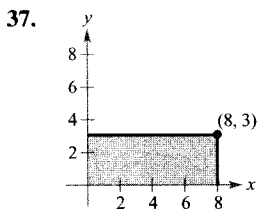
$$33. \int_0^2 \int_{x/2}^1 dy dx$$

$$34. \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 dy dx$$

$$35. \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx dy$$

$$36. \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy$$

En los Ejercicios 37-42, usar una integral iterada para calcular el área de la región.



En los Ejercicios 43-48, usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

$$43. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x = 0, y = 0$$

$$44. y = x^{3/2}, y = x$$

$$45. 2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0$$

$$46. xy = 9, y = x, y = 0, x = 9$$

$$47. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$48. y = x, y = 2x, x = 2$$

Para pensar En los Ejercicios 49 y 50, dar un argumento geométrico que justifique la desigualdad y verificarla analíticamente.

$$49. \int_0^5 \int_x^{\sqrt{50-x^2}} x^2 y^2 dy dx =$$

$$\int_0^5 \int_0^y x^2 y^2 dx dy + \int_5^{\sqrt{50}} \int_0^{\sqrt{50-y^2}} x^2 y^2 dx dy$$

$$50. \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x \sin y dy dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x \sin y dx dy$$

En los Ejercicios 51-54, evaluar la integral iterada. (Nótese que es necesario cambiar el orden de integración.)

$$51. \int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} dy dx$$

$$52. \int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} dy dx$$

$$53. \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 dx dy$$

$$54. \int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \sin x dx dy$$

■ En los Ejercicios 55-58, usar integración simbólica en una calculadora apropiada para evaluar la integral iterada.

$$55. \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y^2) dy dx$$

$$56. \int_0^1 \int_y^{2y} \operatorname{sen}(x+y) dx dy$$

$$57. \int_0^4 \int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)} dx dy$$

$$58. \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx$$

■ En los Ejercicios 59 y 60, *a*) dibujar un esbozo de la región de integración, *b*) permutar el orden de integración, y *c*) usar integración simbólica en una calculadora para verificar que ambos órdenes de integración llevan al mismo resultado.

$$59. \int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2) dx dy$$

$$60. \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2/4} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1} dy dx$$

■ En los Ejercicios 61 y 62, usar integración simbólica para estimar la integral iterada.

$$61. \int_0^2 \int_0^{4-x^2} e^{xy} dy dx$$

$$62. \int_0^2 \int_x^2 \sqrt{16 - x^3 - y^3} dy dx$$

63. **Redacción** Explicar qué se entiende por integral iterada. ¿Cómo se calculan estas integrales?

64. **Redacción** Describir las regiones que son vertical u horizontalmente simples.

¿**Verdadero o falso?** En los Ejercicios 65 y 66, averiguar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que ratifique su falsedad.

$$65. \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

$$66. \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy$$

- CONTENIDO ■
 Integrales dobles y volumen de sólidos ■
 Propiedades de las integrales dobles ■
 Cálculo de integrales dobles ■



13.2

Integrales dobles y volumen

Integrales dobles y volumen de sólidos

Ya sabemos que una integral definida sobre una *intervalo* utiliza un proceso de límite para medir magnitudes como área, volumen, longitud de arco y masa. En esta sección utilizaremos un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región del plano*.

Consideremos una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy . Nuestro objetivo consiste en hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie de ecuación

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie encima del plano } xy$$

y el plano xy (Figura 13.8). Podemos empezar superponiendo a esa región un retículo rectangular como el de la Figura 13.9. Los rectángulos que están completamente contenidos en R forman una **partición interior** $\|\Delta\|$, cuya norma se define como la longitud de la diagonal más larga de entre las de los n rectángulos. Ahora tomamos un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y construimos el prisma rectangular de altura $f(x_i, y_i)$, como muestra la Figura 13.10. Puesto que el área del i -ésimo rectángulo es $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, el volumen del i -ésimo prisma es

$$f(x_i, y_i) \Delta A_i = f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \quad \text{Volumen del } i\text{-ésimo prisma}$$

y podemos aproximar el volumen de la región sólida por la suma de Riemann de los volúmenes de los n prismas,

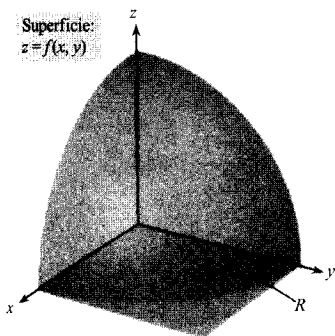


FIGURA 13.8

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \quad \text{Suma de Riemann}$$

como sugiere la Figura 13.11. Esa aproximación mejora al ir tomando retículos con rectángulos más y más pequeños, como se pone de manifiesto en el Ejemplo 1.

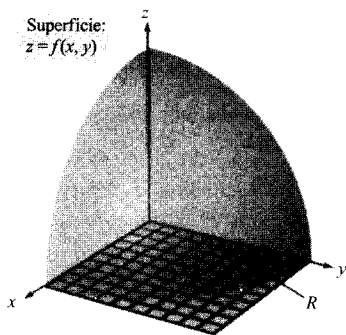


FIGURA 13.9
Los rectángulos que están dentro de R forman una partición interior de R .

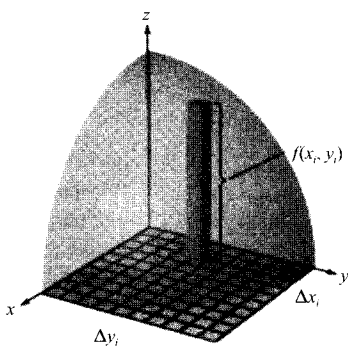


FIGURA 13.10
Prisma rectangular cuya base mide Δx_i por Δy_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$.

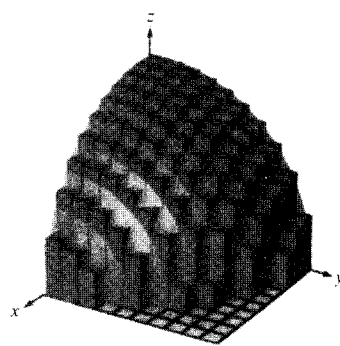


FIGURA 13.11
Volumen aproximado por prismas rectangulares.

EJEMPLO 1 Estimación del volumen de un sólido

Estimar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloides

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Usar una partición de cuadrados con lados de longitud $1/4$.

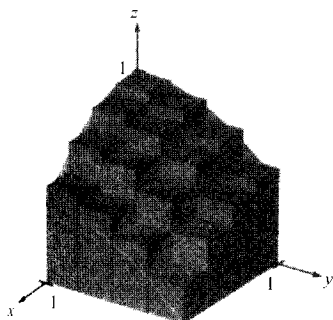
Solución: Comenzamos construyendo la partición específica de R . Para esta partición conviene elegir los centros de las subregiones en los puntos donde evaluamos $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) \end{array}$$

Como el área de cada cuadrado es $\Delta x_i \Delta y_i = \frac{1}{16}$, podemos aproximar el volumen por la suma

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i = \sum_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right) \left(\frac{1}{16}\right) \approx 0,672$$

La Figura 13.12 muestra gráficamente esta aproximación. El volumen exacto de esa región sólida es $2/3$ (véase Ejemplo 2). Se puede conseguir una aproximación mejor utilizando una partición más fina. Así, con una partición cuyos cuadrados tengan lados de longitud $1/10$ se obtiene como valor aproximado 0.668 . □



Superficie:

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

FIGURA 13.12



Algunos programas informáticos son capaces de dibujar figuras como la 13.12. Concretamente, la Figura 13.13 ha sido realizada con uno de ellos. Nótese que en este esbozo todos los prismas rectangulares están dentro de la región sólida.

En el Ejemplo 1, al tomar particiones más finas se logran aproximaciones más precisas del volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando el límite, es decir

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

El significado riguroso de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \right| < \varepsilon$$

para toda partición Δ de la región R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para todas las posibles elecciones de x_i y de y_i en la i -ésima subregión.

La utilización del límite de una suma de Riemann como definición del volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. En el caso general, sin embargo, no se exige que la función sea positiva o continua.

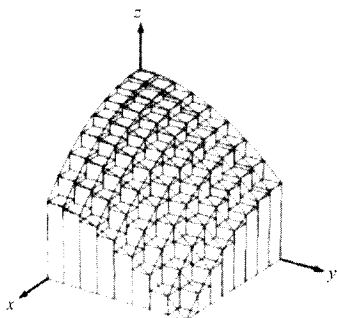


FIGURA 13.13

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy , la **integral doble de f sobre R** viene dada por

$$\int_R \int f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

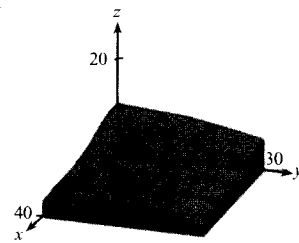
siempre que este límite exista. Si el límite existe, se dice que f es **integrable** sobre R .

Para que la integral doble de f sobre R exista es suficiente que R se pueda expresar como unión de un número finito de subregiones sin solapamiento

EXPLORACIÓN

Las entradas de la tabla dan la profundidad (en decímetros) en el centro de cada uno de los cuadrados de la figura.

	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproximar el número de metros cúbicos de la ladera simulada en esa figura. Esta exploración fue sugerida por Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.

| Nota. Una vez definidas las integrales dobles, nos referiremos ocasionalmente a las integrales definidas ordinarias como integrales simples.

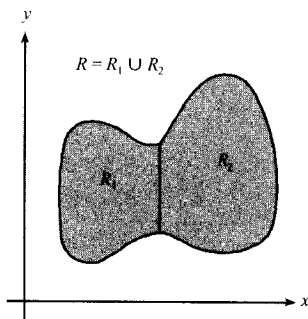


FIGURA 13.14

Dos regiones no se solapan si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento recto común a R_1 y R_2 es 0.

(véase Figura 13.14) vertical u horizontalmente simples y que además f sea continua sobre R .

Puede utilizarse una integral doble para calcular el volumen de una región sólida comprendida entre la superficie dada por $z = f(x, y)$ y el plano xy .

VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R , el volumen de la región sólida acotada inferiormente por R y superiormente por la gráfica de f se define como

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles comparten muchas propiedades con las integrales simples.

TEOREMA 13.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y c una constante.

- $\iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA$
- $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA \pm \iint_R g(x, y) \, dA$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq 0$, si $f(x, y) \geq 0$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$, si $f(x, y) \geq g(x, y)$
- $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$

donde R es la unión de dos regiones R_1, R_2 , sin solapamiento entre sí.

Cálculo de integrales dobles

Normalmente, el primer paso en la evaluación de una integral doble consiste en reescribirla como una integral iterada. Para comprender el proceso, aprovechamos un modelo geométrico de una integral doble, concretamente el volumen de un sólido.

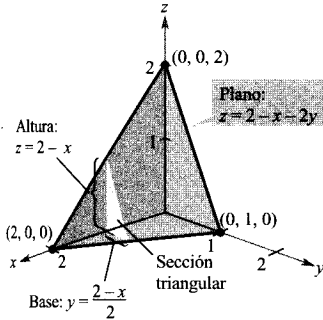


FIGURA 13.15

Volumen: $\int_0^2 A(x) dx$.

Consideremos la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y los tres planos de coordenadas (Figura 13.15). Cada sección vertical paralela al plano yz es una región triangular con base de longitud $y = (2 - x)/2$ y altura $z = 2 - x$. Eso implica que, para un valor fijado de x , el área de la sección triangular es

$$A(x) = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - x}{2} \right) (2 - x) = \frac{(2 - x)^2}{4}$$

Recordando la fórmula que daba el volumen de un sólido de secciones conocidas (Sección 6.2), deducimos que el volumen del sólido es

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x) dx = \int_0^2 \frac{(2 - x)^2}{4} dx = - \left. \frac{(2 - x)^3}{12} \right|_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Este proceso funciona sea cual sea la forma en que haya sido obtenida $A(x)$. En particular, podemos hallar $A(x)$ por integración, como indica la Figura 13.16. Esto es, consideramos x constante e integramos $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$, con lo que obtenemos

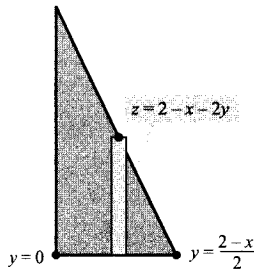


FIGURA 13.16

Sección triangular.

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y) dy \\ &= \left[(2 - x)y - y^2 \right]_0^{(2-x)/2} \\ &= \frac{(2 - x)^2}{4} \end{aligned}$$

Combinando estos resultados, llegamos a la integral iterada

$$\text{Volumen} = \int_R \int f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y) dy dx$$

El proceso se entiende mucho mejor si se imagina como un doble barrido. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección. En la integración exterior, la sección triangular barre el volumen (véase la Figura 13.17).

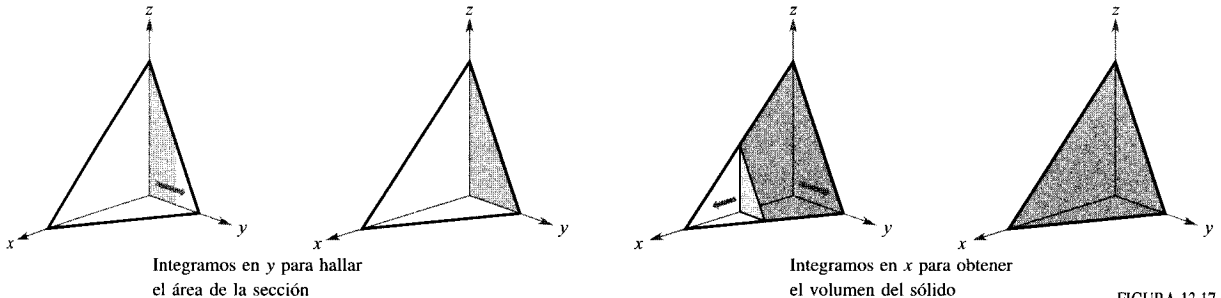


FIGURA 13.17

El próximo teorema fue demostrado por el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). Afirma que si R es vertical u horizontalmente simple, y si f es continua en R , la integral doble de f sobre R es igual a la integral iterada.

TEOREMA 13.2 TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R .

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral doble como integral iterada

Calcular

$$\int_R \int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA$$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Solución: Como R es un simple cuadrado, es horizontal y verticalmente simple, así que podemos elegir cualquier orden de integración. Escojamos $dy \, dx$, colocando en la región un rectángulo representativo vertical, como en la Figura 13.18. Así, se obtiene

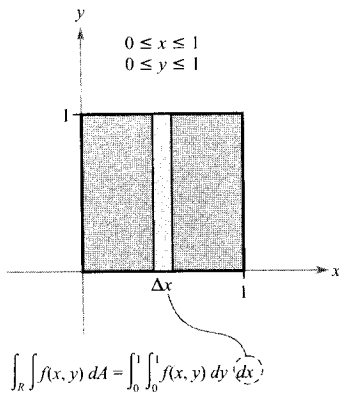


FIGURA 13.18

El volumen de la región sólida es $2/3$.

$$\begin{aligned} \int_R \int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) \, dx \\ &= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nota. La integral doble calculada en el Ejemplo 2 da el volumen de la región sólida aproximada en el Ejemplo 1. De hecho, la estimación allí obtenida es muy buena (0,672 frente a $2/3$), a pesar de haber utilizado una partición con sólo 16 cuadrados. El error es debido a que se tomaban los centros de los cuadrados como puntos de aproximación, procedimiento análogo a la regla del punto medio en integrales simples.

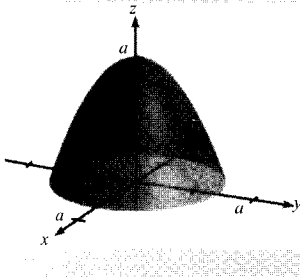
La dificultad en el cálculo de una integral simple $\int_a^b f(x) \, dx$ suele depender de la función f , no del intervalo $[a, b]$. Ahí reside una de las grandes diferencias entre las integrales simples y las integrales dobles. En el próximo ejemplo integramos una función similar a las de los Ejemplos 1 y 2, pero el cambio de la región R produce un problema de integración mucho más difícil.

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector de paraboloides El sólido del Ejemplo 3 tiene base elíptica (no circular). Consideremos la región comprendida entre el paraboloides de circular

$$z = a^2 - x^2 - y^2, a > 0$$

y el plano xy . ¿Cuántos métodos conoce para hallar su volumen? A título de ejemplo, podría aplicar el método de los discos para el cálculo del volumen de un sólido de revolución. ¿Todos los métodos requieren integración?



Nota. Nótese la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$ en el Ejemplo 3. Tal vez sea conveniente que repase esa fórmula, expuesta en la Sección 7.3.

EJEMPLO 3 Cálculo de un volumen mediante una integral doble

Calcular el volumen de la región sólida limitada por el paraboloides $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy .

Solución: Haciendo $z = 0$ vemos que la base de la región en el plano xy es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como muestra la Figura 13.19. Esta región plana es horizontal y verticalmente simple, así que el orden $dy dx$ es apropiado.

Cotas variables para y : $-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$

Cotas constantes para x : $-2 \leq x \leq 2$

El volumen viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3} \right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4 \theta d\theta && x = 2 \text{ sen } \theta \\ &= \frac{64}{3\sqrt{2}} (2) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{128}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi}{16} \right) = 4\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Fórmula de Wallis

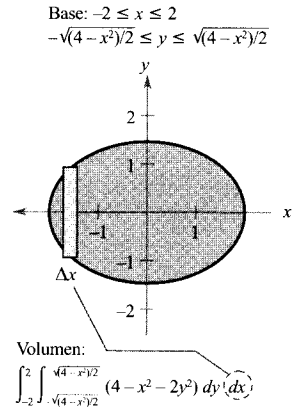
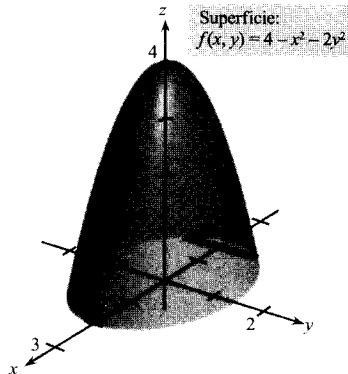


FIGURA 13.19



En los Ejemplos 2 y 3 el orden de integración era opcional, ya que las regiones eran a la vez horizontalmente y verticalmente simples. Más aún, en caso de haber optado por el orden $dx dy$ las integrales hubieran sido de dificultad muy parecida. Hay ocasiones, sin embargo, en las que un orden es mucho más conveniente que el otro, tal como sucede en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Comparación de órdenes de integración diferentes

Calcular el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \quad \text{Superficie}$$

y los planos $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (Figura 13.20).

Solución: La base de R en el plano xy está limitada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$. La Figura 13.21 ilustra los dos posibles órdenes de integración.

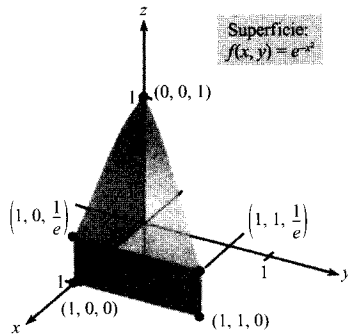


FIGURA 13.20

La base está acotada por $y = 0$, $y = x$, y $x = 1$.

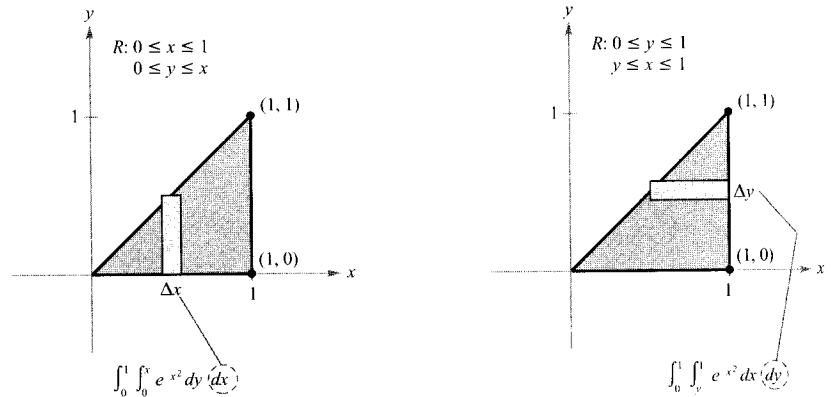


FIGURA 13.21

Escribiendo las correspondientes integrales iteradas, se ve que el orden $dx dy$ requiere la primitiva $\int e^{-x^2} dx$, que no es una función elemental, mientras que el orden $dy dx$ conduce a la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= \frac{e - 1}{2e} \\ &\approx 0,316 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

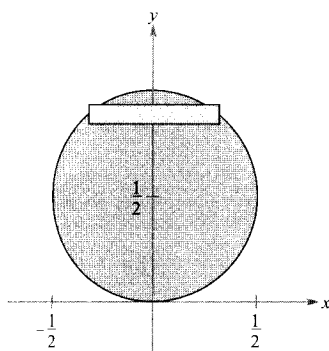
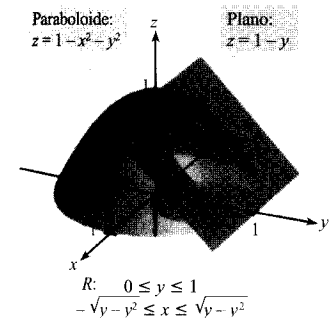


FIGURA 13.22
El volumen de la región sólida es $\pi/32$.

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$ (Figura 13.22).

Solución: Igualando los valores de z vemos que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, resulta

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \, dy \\ &= \int_0^1 (y - y^2)^{3/2} \, dy \\ &= \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2} \, dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2} \, d\theta \quad 2y - 1 = \text{sen } \theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3\pi}{16}\right) \quad \text{Fórmula de Wallis} \\ &= \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 13.2

Aproximación En los Ejercicios 1-4, aproximar el valor de la integral $\int_R \int f(x, y) \, dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 2)$ en ocho cuadrados iguales y calculando la suma

$$\sum_{i=1}^8 f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

donde (x_i, y_i) es el centro del i -ésimo cuadrado. Evaluar la integral doble y comparar el resultado con la aproximación.

- $\int_0^4 \int_0^2 (x + y) \, dy \, dx$
- $\int_0^4 \int_0^2 xy \, dy \, dx$
- $\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2) \, dy \, dx$
- $\int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} \, dy \, dx$

En los Ejercicios 5-10, dibujar un esbozo de la región R y calcular la integral doble $\int_R \int f(x, y) \, dA$.

$$5. \int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y) dy dx$$

$$6. \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 y dy dx$$

$$7. \int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y) dx dy$$

$$8. \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2 y^2 dx dy$$

$$9. \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y) dy dx$$

$$10. \int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} dx dy$$

En los Ejercicios 11-16, escribir una integral para cada orden de integración y utilizar el más conveniente para evaluar la integral sobre la región R .

$$11. \int_R \int xy dA$$

R : rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$, $(3, 0)$

$$12. \int_R \int \sin x \sin y dA$$

R : rectángulo de vértices $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \pi/2)$, $(-\pi, \pi/2)$

$$13. \int_R \int \frac{y}{x^2 + y^2} dA$$

R : triángulo acotado por $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$

$$14. \int_R \int \frac{y}{1 + x^2} dA$$

R : región acotada por $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$

$$15. \int_R \int x dA$$

R : sector circular en el primer cuadrante acotado por

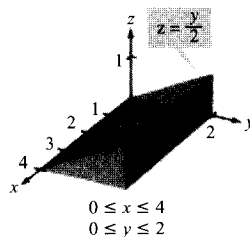
$$y = \sqrt{25 - x^2}, 3x - 4y = 0, y = 0$$

$$16. \int_R \int (x^2 + y^2) dA$$

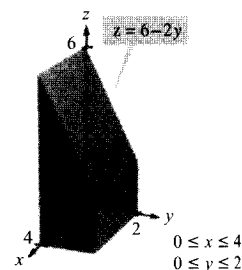
R : semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$

En los Ejercicios 17-26, usar una integral doble para calcular el volumen del sólido.

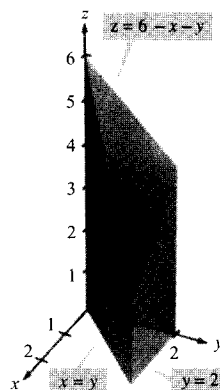
17.



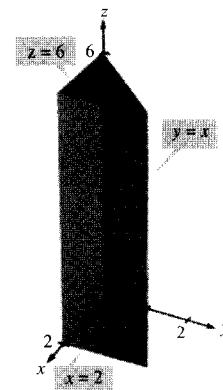
18.



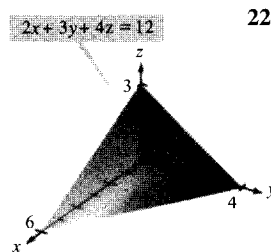
19.



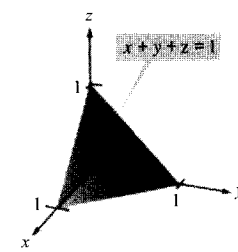
20.



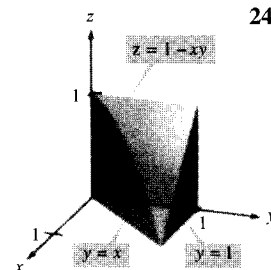
21.



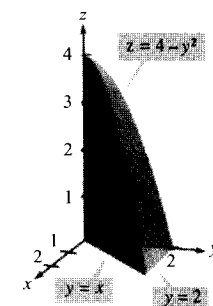
22.



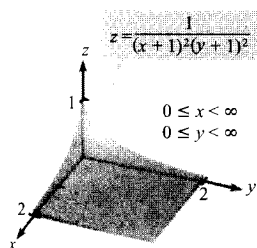
23.



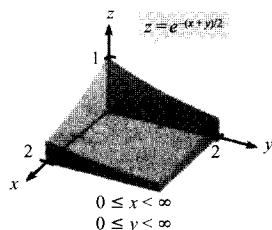
24.



25. Integral impropia

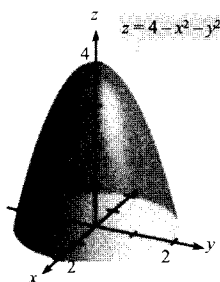


26. Integral impropia

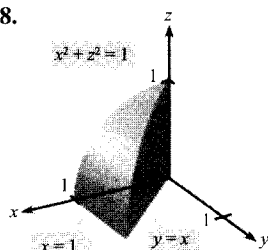


En los Ejercicios 27 y 28, usar integración simbólica en una calculadora para hallar el volumen del sólido.

27.



28.



En los Ejercicios 29-36, usar una integral doble para determinar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

29. $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, primer octante30. $y = 0$, $z = 0$, $y = x$, $z = x$, $x = 0$, $x = 5$ 31. $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$ 32. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 33. $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, primer octante34. $y = 1 - x^2$, $z = 1 - x^2$, primer octante35. $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 4$, primer octante36. $z = \frac{1}{1 + y^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y \geq 0$

En los Ejercicios 37 y 38, usar la fórmula de Wallis para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

37. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ 38. $z = \sin^2 x$, $z = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 5$

En los Ejercicios 39-42, usar integración simbólica en una calculadora para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

39. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$ 40. $x^2 = 9 - y$, $z^2 = 9 - y$, primer octante41. $z = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -0,5x + 1$ 42. $z = \ln(1 + x + y)$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4 - \sqrt{y}$ 43. Si f es una función continua tal que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ en la región R de área 1, probar que

$$0 \leq \iint_R f(x, y) dA \leq 1$$

44. Calcular el volumen del sólido acotado en el primer cuadrante por los planos coordenados y por el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$, y $c > 0$.

En los Ejercicios 45-48, evaluar la integral iterada. (Es necesario cambiar el orden de integración.)

45.
$$\int_0^1 \int_{y/2}^{y/2} e^{-x^2} dx dy$$

46.
$$\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy$$

47.
$$\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y} dy dx$$

48.
$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 \sqrt{y} \cos y dy dx$$

En los Ejercicios 49-52, hallar el valor medio de $f(x, y)$ en la región R , siendo

$$\text{Valor medio} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA$$

donde A denota el área de R .

49. $f(x, y) = x$
 R : rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(0, 2)$ 50. $f(x, y) = xy$
 R : rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(0, 2)$ 51. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 R : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$ 52. $f(x, y) = e^{x+y}$
 R : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ 53. **Producción media** La función de producción de Cobb-Douglas para una compañía es

$$f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$$

donde x denota el número de unidades de trabajo e y el de unidades de capital. Estimar el nivel de producción medio si x varía entre 200 y 250, e y entre 300 y 325.

54. **Beneficio medio** El beneficio en la comercialización de dos productos es

$$P = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5.000$$

donde x e y representan los números de unidades de los dos productos. Evaluar, usando integración simbólica en una calculadora, la integral doble que da el beneficio semanal medio si x varía entre 40 y 50 unidades, e y entre 45 y 60.

55. **Para pensar** Sea R una región del plano xy cuya área es B . Si $f(x, y) = k$ en todo punto de R , ¿cuál es el valor de $\int_R \int f(x, y) dA$?
56. **Para pensar** Si R representa una región de EE.UU. y $f(x, y)$ representa la precipitación, en forma de nieve, en el punto (x, y) de R , interpretar el significado de

$$a) \int_R \int f(x, y) dA \quad b) \frac{\int_R \int f(x, y) dA}{\int_R \int dA}$$

Probabilidad Una función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias x e y es una función $f(x, y)$ que cumple las siguientes propiedades:

- a) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y)
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dA = 1$
- c) $P[(x, y) \in R] = \int_R \int f(x, y) dA$

En los Ejercicios 57-60, probar que la función es una función densidad de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad requerida.

57. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$
58. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2)$
59. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y), & 0 \leq x \leq 3, 3 \leq y \leq 6 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, 4 \leq y \leq 6)$

60. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x-y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

$$P(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 1)$$

61. **Aproximación** La base de un montón de arena en una fábrica de cemento es rectangular con dimensiones aproximadas de 20 por 30 metros. Si la base está situada en el plano xy con un vértice en el origen, las coordenadas de la superficie del montón son $(5, 5, 3)$, $(15, 5, 6)$, $(25, 5, 4)$, $(5, 15, 2)$, $(15, 15, 7)$, y $(25, 15, 3)$. Estimar el volumen de arena en el montón.
62. **Programación** Sea $f(x, y)$ una función continua en la región rectangular R con vértices (a, c) , (b, c) , (a, d) y (b, d) , donde $a < b$ y $c < d$. Dividir los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en m y n subintervalos, respectivamente, de modo que los subintervalos en una dirección dada sean iguales. Escribir un programa para que una calculadora evalúe la suma

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \approx \int_a^b \int_c^d f(x, y) dA$$

donde (x_i, y_j) es el centro de un rectángulo representativo en R .

- Aproximación** En los Ejercicios 63-66, a) usar integración simbólica para aproximar la integral doble, y b) usar el programa del Ejercicio 62 para estimar la integral doble para los valores de m y n que se especifican.

63. $\int_0^1 \int_0^2 \sin \sqrt{x+y} dy dx$ 64. $\int_0^2 \int_0^4 20e^{-x^2/8} dy dx$

$$m = 4, n = 8$$

$$m = 10, n = 20$$

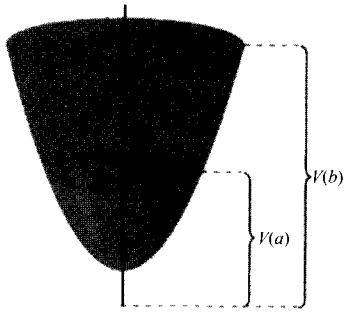
65. $\int_4^6 \int_0^2 y \cos \sqrt{x} dx dy$

$$m = 4, n = 8$$

66. $\int_1^4 \int_1^2 \sqrt{x^3 + y^3} dx dy$

$$m = 6, n = 4$$

67. **Redacción** Entre 1963 y 1986, el volumen del Gran Lago Salado se triplicó, mientras que el área de su superficie se dobló. Lea el artículo «Relations between Surface Area and Volume in Lakes» de Daniel Cass y Gerald Wildenberg en *The College Mathematics Journal*, noviembre 1990 y, a continuación, proponga ejemplos de sólidos con «niveles de agua» a y b tales que $V(b) = 3 V(a)$ y $A(b) = 2 A(a)$, como indica la figura de la página siguiente, donde V es el volumen y A el área.



Para pensar En los Ejercicios 68 y 69, determinar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano xy y la función, en la región que se indica. (Tome la decisión a la vista de un esbozo de la región, *sin* efectuar cálculos.)

68. $f(x, y) = 4x$
 R : cuadrado de vértices $(0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)$

69. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 R : círculo acotado por $x^2 + y^2 = 9$
 a) 50 b) 500 c) -500
 d) 5 e) 5.000

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 70 y 71, determinar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

70. El volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ viene dado por la integral

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

71. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) en R , y si f y g son continuas en R , entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA \leq \int_R \int g(x, y) \, dA$$

72. Sea $f(x) = \int_1^x e^{t^2} \, dt$. Hallar el valor medio de f en el intervalo $[0, 1]$.

73. Calcular $\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \, dx$ (Ayuda: Hallar $\int_1^2 e^{-xy} \, dy$)

74. **Probabilidad** Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/a}, & x \geq 0, y \geq 6 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determinar la relación que debe haber entre las constantes a y k para que f sea una función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias x, y .



13.3

Cambio de variables: coordenadas polares

CONTENIDO ▪

Integrales dobles en coordenadas polares ▪

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son mucho más fáciles de calcular en forma polar que en forma rectangular. Esto es especialmente cierto para regiones circulares, en forma de cardioide o de pétalo de curvas rosa, y para integrandos donde aparezca $x^2 + y^2$.

En la Sección 9.4 introdujimos la relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las rectangulares (x, y) de un punto, a saber

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Descripción de una región en coordenadas polares

Describir en términos de coordenadas polares las regiones de la Figura 13.23.

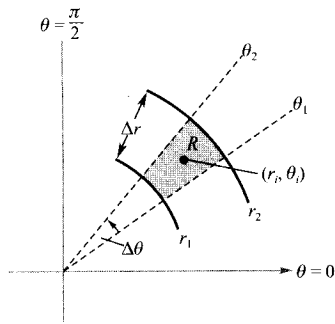
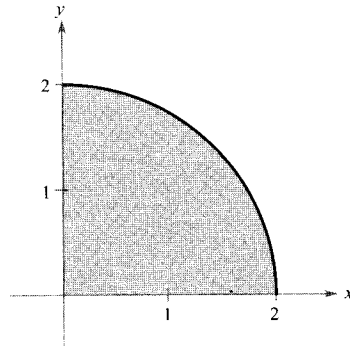
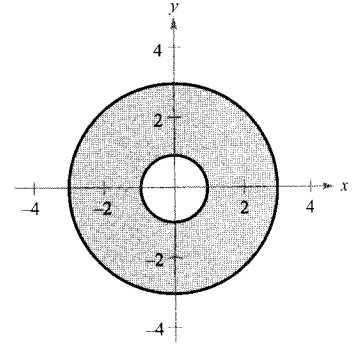


FIGURA 13.24
Sector polar.



a)



b)

FIGURA 13.23

Solución:

- a) La región R es un cuarto de círculo de radio 2. Puede describirse en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

- b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre dos círculos concéntricos, con centro en el origen, de radios 1 y 3. En coordenadas polares se describe como

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad \square$$

Las regiones del Ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

$$R = \{(r, \theta): r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

Sector polar

del tipo que muestra la Figura 13.24.

Para definir la integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, consideremos una región R acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En vez de dividir R en pequeños rectángulos, la dividimos en pequeños sectores polares, superponiendo a R un retículo polar formado por semirrectas radiales y círculos, como indica la Figura 13.25. Los sectores polares R_i que están contenidos por completo en R constituyen una **partición polar** Δ de R , cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la diagonal más grande de entre todas las de sus sectores polares.

Consideremos un sector polar concreto R_i como el de la Figura 13.26. Puede demostrarse (véase el Ejercicio 49) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \quad \text{Área de } R_i$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta \theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta \theta_i$$

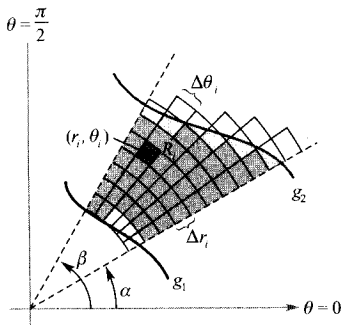


FIGURA 13.25
El retículo polar superpuesto a la región R .

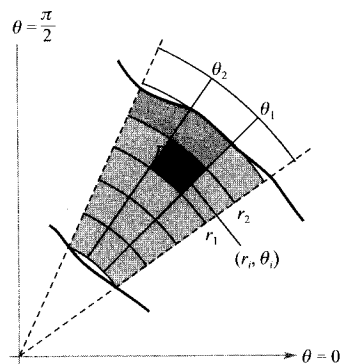


FIGURA 13.26
El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tales que $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

de manera que

$$\int_R \int f(x, y) \, dA \approx \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

La suma de la derecha se puede interpretar como una suma de Riemann para $f(r \cos \theta, r \sin \theta)r$. La región R corresponde a una región S horizontalmente simple en el plano $r\theta$ (Figura 13.27). Los sectores polares R_i corresponden a rectángulos S_i y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta \theta_i$. Así pues, el miembro de la derecha de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\int_S \int f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dA$$

Por tanto, el Teorema 13.2 nos permite escribir

$$\begin{aligned} \int_R \int f(x, y) \, dA &= \int_S \int f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dA \\ &= \int_a^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Esto sugiere el siguiente teorema, cuya demostración discutiremos en la Sección 13.8.

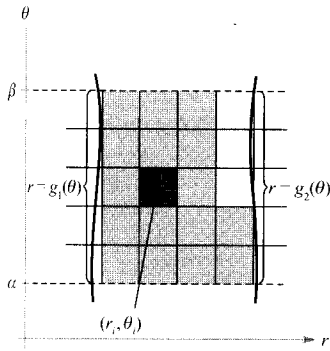


FIGURA 13.27
Región S horizontalmente simple.

Nota. Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R , la integral del Teorema 13.3 se puede interpretar como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R .

TEOREMA 13.3 CAMBIO DE VARIABLE A FORMA POLAR

Sea R la región plana constituida por todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R , entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

EXPLORACIÓN

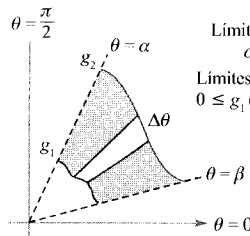
Volumen de un paraboloides

En la exploración de la página 1225 se le pedía formular los diversos métodos que conocía en ese momento para calcular el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

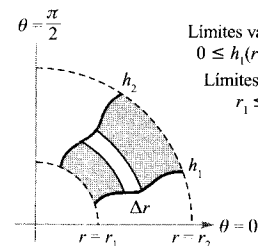
y el plano xy . Ahora conoce otra más. Úsela para calcular el volumen de ese sólido.

La región R debe ser de alguna de las dos formas básicas, r -simple o θ -simple, que muestra la Figura 13.28.



Región r -simple

Límites fijos para θ :
 $\alpha \leq \theta \leq \beta$
Límites variables para r :
 $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$



Región θ -simple

Límites variables para θ :
 $0 \leq h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)$
Límites fijos para r :
 $r_1 \leq r \leq r_2$

FIGURA 13.28

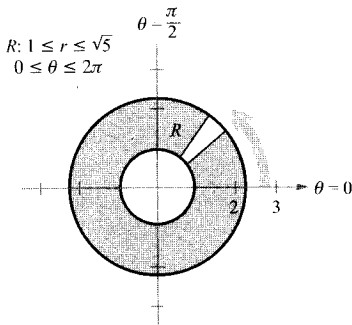


FIGURA 13.29
Región r -simple.

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral doble

Sea R la región anular comprendida entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$ (Figura 13.29). Calcular la integral $\iint_R (x^2 + y) dA$.

Solución: Las fronteras en polares son $1 \leq r \leq \sqrt{5}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Además, $x^2 = (r \cos \theta)^2$ e $y = r \sin \theta$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x^2 + y) dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(6 \cos^2 \theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3 \cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \left(3\theta + 3 \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 6\pi
 \end{aligned}$$

□

Conviene hacer notar el factor extra r en el integrando del Ejemplo 2. Proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación de diferenciales,

$$dA = r dr d\theta$$

que indica que el área de un sector polar crece al alejarnos del origen.

EJEMPLO 3 Cambio de variables a forma polar

Usar coordenadas polares para calcular el volumen del sólido limitado por arriba por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio superior}$$

y por abajo por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{Región circular inferior}$$

que muestra la Figura 13.30.

Solución: En la Figura 13.30 vemos que R tiene cotas

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

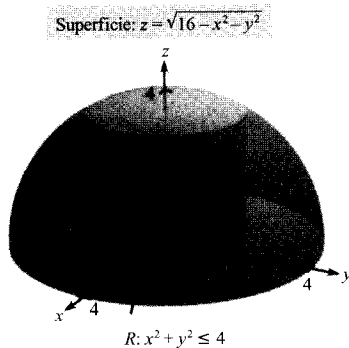


FIGURA 13.30

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares las cotas son

$$0 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. En consecuencia, el volumen V viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2} \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (24\sqrt{3} - 64) \, d\theta \\ &= -\frac{8}{3} (3\sqrt{3} - 8)\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}) \\ &\approx 46,98 \end{aligned}$$

□

Nota. Con el fin de comprender la ventaja de las coordenadas polares en el Ejemplo 3, intente calcular la correspondiente integral doble en forma rectangular

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$



Cualquier programa de calculadora capaz de calcular integrales dobles en coordenadas rectangulares es capaz también de calcularlas en polares. La razón es que el valor de una integral no depende de las coordenadas utilizadas. En otras palabras, si se evalúa en una calculadora, mediante cálculo simbólico, la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - x^2} \, x \, dx \, dy$$

se obtiene el mismo valor encontrado en el Ejemplo 3.

Igual que en coordenadas rectangulares, se puede usar la integral doble

$$\iint_R \, dA$$

para calcular el área de una región plana.

EJEMPLO 4 Área de una región polar

Utilizar una integral doble para calcular el área encerrada por la gráfica de $r = 3 \cos 3\theta$.

Solución: Sea R un pétalo de la curva de la Figura 13.31. Esta región es r -simple, con fronteras

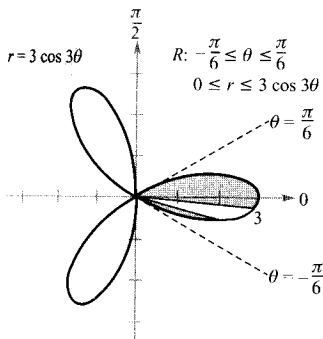


FIGURA 13.31

El área de R es $3\pi/4$ y el área total es $9\pi/4$.

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{Cotas fijas para } \theta$$

$$0 \leq r \leq 3 \cos 3\theta \quad \text{Cotas variables para } r$$

Así pues, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A &= \int_R \int dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{3 \cos 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{3 \cos 3\theta} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d\theta \\ &= \frac{9}{4} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{1}{6} \operatorname{sen} 6\theta \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, el área total es $A = 9\pi/4$. □

Como ilustra el Ejemplo 4, el área de una región del plano puede representarse por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

Si $g_1(\theta) = 0$ se reduce a

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{g_2(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (g_2(\theta))^2 d\theta \end{aligned}$$

lo cual coincide con el Teorema 9.13.

Hasta este momento, todos los ejemplos de integrales dobles en forma polar aparecidos en esta sección han sido del tipo

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

efectuando en primer lugar la integración en r . A veces puede ser más fácil la integración cambiando el orden de integración, como sucede en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral

$$r = \frac{\pi}{3\theta}$$

e inferiormente por el eje x , entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución: La región, que puede verse en la Figura 13.32, tiene en polares las cotas

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}$$

Por tanto, su área es

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \int_0^{\pi/3r} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 r\theta \Big|_0^{\pi/3r} \, dr \\ &= \int_1^2 \frac{\pi}{3} \, dr \\ &= \frac{\pi r}{3} \Big|_1^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

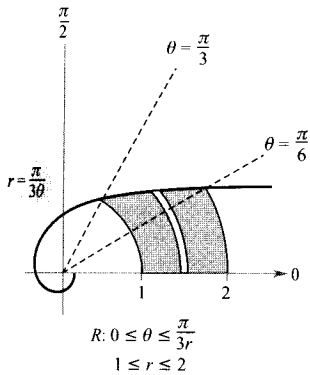


FIGURA 13.32
Región θ -simple.

Ejercicios de la Sección 13.3

En los Ejercicios 1-6, evaluar la integral doble y dibujar un esbozo de la región R .

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^6 3r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$

2. $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2 \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta$

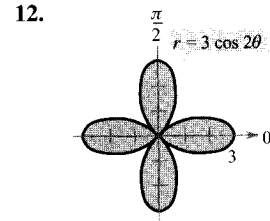
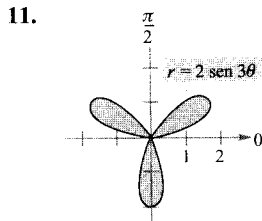
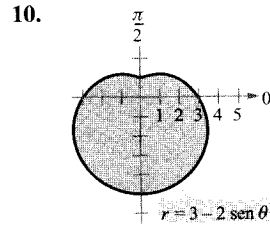
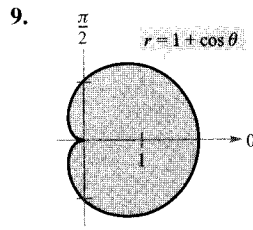
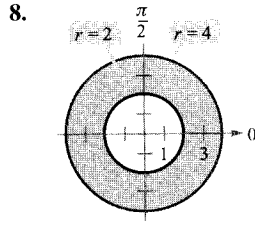
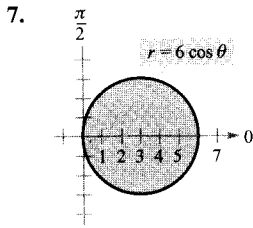
3. $\int_0^{\pi/2} \int_2^3 \sqrt{9 - r^2} \, r \, dr \, d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 r e^{-r^2} \, dr \, d\theta$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1 + \sin \theta} \theta r \, dr \, d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1 - \cos \theta} (\sin \theta) r \, dr \, d\theta$

En los Ejercicios 7-12, usar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.



En los Ejercicios 13-18, calcular la integral doble pasando a coordenadas polares.

13. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y \, dx \, dy$

14. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x \, dy \, dx$

15. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$

16. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

17. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \, dx$

18. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 \, dx \, dy$

En los Ejercicios 19 y 20, combinar, pasando a polares, la suma de las dos integrales dobles en una sola. Evaluar la integral doble resultante.

19. $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$

20. $\int_0^{5\sqrt{2}/2} \int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy \, dy \, dx$

En los Ejercicios 21-24, usar coordenadas polares para escribir la integral doble $\int_R f(x, y) \, dA$

21. $f(x, y) = x + y$, $R: x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

22. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $R: x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

23. $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $R: x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq x$

24. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, $R: x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Volumen En los Ejercicios 25-30, usar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

25. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, primer octante

26. $z = x^2 + y^2 + 1$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$

27. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 25$

28. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4$

29. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

30. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

31. **Volumen** Determinar a de modo que el volumen interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

32. **Volumen** Usar una integral doble en coordenadas polares para calcular el volumen de una esfera de radio a .

33. **Volumen** Averiguar el diámetro que ha de tener una perforación vertical por el centro del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones

$$z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}, z = 0, y \quad x^2 + y^2 = 16$$

para que se elimine la décima parte del volumen del sólido.

34. **Diseño industrial** La superficie de una leva admite como modelo las desigualdades

$$\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad y$$

$$\frac{-9}{4(x^2 + y^2 + 9)} \leq z \leq \frac{9}{4(x^2 + y^2 + 9)}$$

donde todas las medidas son en pulgadas

- a) Representar la forma de la leva con ayuda de una calculadora adecuada.
 b) Usar la calculadora para estimar el perímetro de la curva polar

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$$

Ésta es la distancia que recorre una pieza en contacto con la leva durante un giro completo de ésta.

- c) Hallar el volumen de la leva con ayuda de la calculadora.

35. **Para pensar** Consideremos el programa que se escribió en el Ejercicio 62 de la Sección 13.2 para aproximar integrales dobles en coordenadas rectangulares. Si se utiliza ese programa para estimar la integral doble

$$\int_R \int f(r, \theta) dA$$

en coordenadas polares, ¿cómo hay que modificar f para introducirla en el programa? Dado que los límites de integración son constantes, describir la región plana de integración.

36. **Aproximación** Las secciones horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de cuarto de círculo de radio aproximado 50 pies. La base se subdivide en 20 subregiones, como indica la figura. En el centro de cada subregión, se mide la altura del hielo, lo que da los siguientes puntos en coordenadas cilíndricas.

$$\left(5, \frac{\pi}{16}, 7\right), \left(15, \frac{\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{\pi}{16}, 10\right), \left(35, \frac{\pi}{16}, 12\right),$$

$$\left(45, \frac{\pi}{16}, 9\right), \left(5, \frac{3\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(25, \frac{3\pi}{16}, 14\right),$$

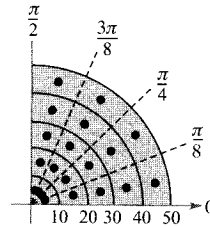
$$\left(35, \frac{3\pi}{16}, 15\right), \left(45, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(5, \frac{5\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{5\pi}{16}, 11\right),$$

$$\left(25, \frac{5\pi}{16}, 15\right), \left(35, \frac{5\pi}{16}, 18\right), \left(45, \frac{5\pi}{16}, 14\right), \left(5, \frac{7\pi}{16}, 5\right),$$

$$\left(15, \frac{7\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{7\pi}{16}, 11\right), \left(35, \frac{7\pi}{16}, 16\right), \left(45, \frac{7\pi}{16}, 12\right)$$

Aproximar:

- a) El volumen del bloque.
 b) Su peso, suponiendo que el hielo pesa 56 libras/pie³.
 c) El número de galones de agua que contiene el bloque, si hay 7.48 galones en cada pie cúbico.



- Aproximación** En los Ejercicios 37 y 38, usar integración simbólica para estimar el valor de la integral doble.

37.
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^5 r\sqrt{1+r^3} \sin \sqrt{\theta} dr d\theta$$

38.
$$\int_0^{\pi/4} \int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}} dr d\theta$$

Para pensar En los Ejercicios 39 y 40, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región dada. (Decidir a la vista de un esbozo del sólido, sin efectuar cálculos.)

39. $f(x, y) = 15 - 2y$; R : semicírculo: $x^2 + y^2 = 16$, $y \geq 0$
 a) 100 b) 200 c) 300 d) -200 e) 800
 40. $f(x, y) = xy + 2$; R : cuarto de círculo: $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 a) 25 b) 8 c) 100 d) 50 e) -30

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 41 y 42, discutir si el enunciado es correcto o no. En caso de que no lo sea, explicar el porqué o dar un ejemplo que ponga de relieve su falsedad.

41. Si $\int_R \int f(r, \theta) dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R .
 42. Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es doble que la de la región R , entonces $2 \int_R \int f(r, \theta) dA = \int_S \int f(r, \theta) dA$.
 43. **Probabilidad** El valor de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

aparece en el estudio de la función densidad de probabilidad normal.

- a) Usar coordenadas polares para calcular la integral doble

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dA$$

- b) Usar el resultado del apartado a) para determinar I .

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre este problema véase el artículo «Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates» de William Dunham en *Mathematics Teacher*, enero 1988.

44. Usar el resultado del Ejercicio 43 y un cambio de variables para calcular las siguientes integrales. No hace falta integrar.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} dx$$

45. **Población** La densidad de población de una ciudad puede aproximarse mediante el modelo $f(x, y) = 4.000e^{-0.01(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 49$, donde x e y se miden en millares. Integrar la función densidad sobre la región circular indicada para estimar la población de esa ciudad.

46. **Probabilidad** Determinar k de modo que la función

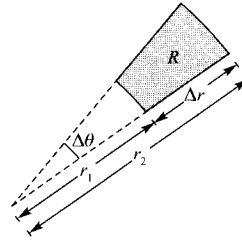
$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea una función densidad de probabilidad.

47. **Para pensar** Consideremos la región acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$, e $y = \sqrt{3}x$ y la integral doble $\int_R \int dA$. Determinar los límites de integración si la región R se divide en a) elementos representativos horizontales, b) elementos representativos verticales, y c) sectores polares.

48. Repetir el Ejercicio 47 para una región R acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

49. Probar que el área A del sector polar R de la figura es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio medio de R .



13.4

Centros de masas y momentos de inercia

- CONTENIDO ■
 Masa ■
 Momentos y centros de masas ■
 Momentos de inercia ■

Masa

En la Sección 6.6 analizamos varias aplicaciones de la integración relativas a una lámina de densidad constante ρ . Por ejemplo, si la lámina correspondiente a la región R de la Figura 13.33 tiene densidad constante ρ su masa viene dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho \int_R \int dA = \int_R \int \rho dA \quad \text{Densidad constante}$$

De no especificar lo contrario, se suponía que una lámina tiene densidad constante. En esta sección, sin embargo, extendemos el término *lámina* al caso de densidad *variable*. También pueden utilizarse integrales dobles para calcular la masa de una lámina de densidad variable, dada en cada punto (x, y) por el valor de la **función densidad** $\rho(x, y)$.

DEFINICIÓN DE LA MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función densidad continua de una lámina que corresponde a una región plana R , la masa m de la lámina viene dada por

$$m = \int_R \int \rho(x, y) dA \quad \text{Densidad variable}$$

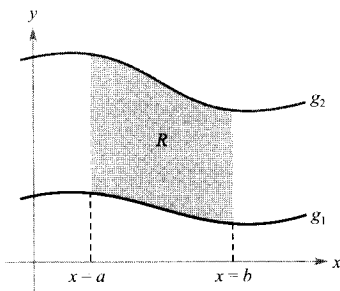


FIGURA 13.33
Lámina de densidad constante ρ .

| Nota. La densidad de un sólido se expresa como masa por unidad de volumen, pero para una lámina plana se mide en términos de masa por unidad de área.

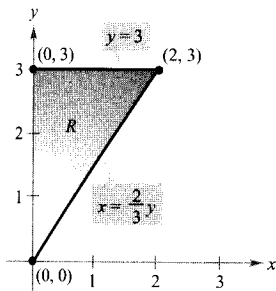


FIGURA 13.34

Lámina de densidad variable $\rho(x, y) = 2x + y$.

EJEMPLO 1 Masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(2, 3)$, si su densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

Solución: En la Figura 13.34 vemos que R tiene fronteras $x = 0$, $y = 3$, $y = 3x/2$ (o bien $x = 2y/3$). Por tanto, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_R (2x + y) \, dA = \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[x^2 + xy \right]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9} \int_0^3 y^2 \, dy \\ &= \frac{10}{9} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 10 \end{aligned}$$

□

| Nota. Nótese en la Figura 13.34 que la lámina está sombreada, de forma que el tono más oscuro corresponde a la parte más densa.

EJEMPLO 2 Cálculo de la masa en coordenadas polares

Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción del primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia del punto al origen (Figura 13.35).

Solución: En un punto arbitrario (x, y) la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= k\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ &= k\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, la masa viene dada por

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

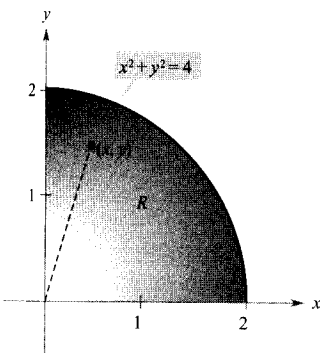


FIGURA 13.35

Densidad en (x, y) : $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Con el fin de simplificar la integración, cambiamos a coordenadas polares, usando las cotas $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 2$. Así pues, la masa es

$$\begin{aligned} m &= \int_R \int k\sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 k\sqrt{r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{kr^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \left[\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi k}{3} \end{aligned}$$

□



Hemos mencionado con frecuencia en este libro las ventajas de los programas informáticos que realizan integración simbólica. Aun en el caso de que utilice tales programas habitualmente, debe quedar claro que sólo rinden su máximo beneficio en manos de un usuario con suficientes conocimientos de la teoría. Por ejemplo, nótese la simplificación que supone para la integral del Ejemplo 2 su paso a polares.

Forma rectangular

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

Forma polar

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 \, dr \, d\theta$$

Intente calcular ambas integrales usando una calculadora capaz de efectuar integración simbólica. Algunos programas no pueden con la primera, pero todos son capaces de calcular la segunda.

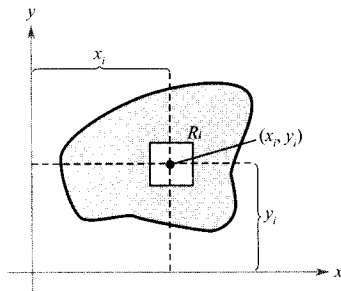


FIGURA 13.36
 $M_x = (\text{masa})(y_i)$
 $M_y = (\text{masa})(x_i)$

Momentos y centros de masas

Para una lámina de densidad variable, los momentos de masa se definen de modo análogo a como se hizo en el caso de densidad uniforme. Para una partición Δ de una lámina correspondiente a una región plana R , consideremos el i -ésimo rectángulo R_i de área ΔA_i , como muestra la Figura 13.36. Supongamos la masa de R_i concentrada en uno de sus puntos interiores (x_i, y_i) . El momento de masa de R_i respecto del eje x puede aproximarse por

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\Delta A_i](y_i)$$

Asimismo, el momento de masa respecto del eje y se puede aproximar por

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\Delta A_i](x_i)$$

Formando las sumas de Riemann de todos esos productos y tomando los límites cuando la norma de Δ tiende a 0, se obtienen las siguientes definiciones de los momentos respecto de los ejes x e y .

MOMENTOS Y CENTROS DE MASAS DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función densidad continua sobre la lámina plana R . Los **momentos de masa** respecto de los ejes x e y son, respectivamente,

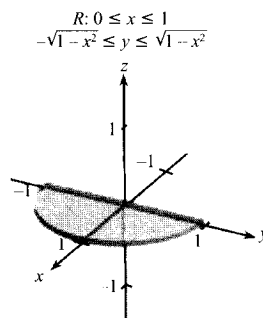
$$M_x = \int_R \int y\rho(x, y) \, dA \quad \text{y} \quad M_y = \int_R \int x\rho(x, y) \, dA$$

Si la masa de la lámina es m , el **centro de masas** es

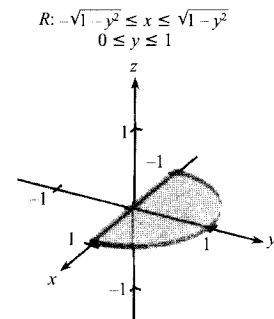
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$$

Si R representa una región plana en lugar de una lámina, el punto (\bar{x}, \bar{y}) se llama el **centroide** de la región.

Para algunas láminas planas se puede hallar el centro de masas (o una de sus coordenadas) por argumentos de simetría, sin necesidad de integrar. Por ejemplo, consideremos las láminas de la Figura 13.37. Por simetría, vemos que $\bar{y} = 0$ ha de ser para la primera y $\bar{x} = 0$ para la segunda.



Simétrica respecto del eje x



Simétrica respecto del eje y

FIGURA 13.37

EJEMPLO 3 Cálculo del centro de masas

Hallar el centro de masas de la lámina correspondiente a la región parabólica

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 \quad \text{Región parabólica}$$

si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia de (x, y) al eje x , como indica la Figura 13.38.

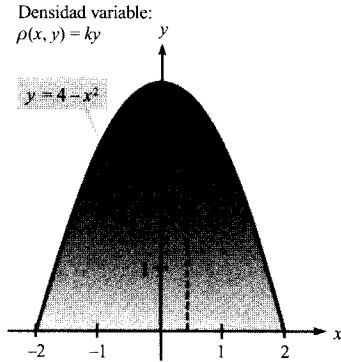


FIGURA 13.38

Región parabólica de densidad variable.

Solución: Como la lámina es simétrica respecto del eje y ,

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masas se encuentra en algún punto del eje y . Por tanto $\bar{x} = 0$. Para hallar \bar{y} calculamos previamente la masa de la lámina.

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} ky \, dy \, dx = \frac{k}{2} \int_{-2}^2 y^2 \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{k}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{k}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= k \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256k}{15} \end{aligned}$$

Ahora, ya podemos hallar el momento respecto del eje x .

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (y)(ky) \, dy \, dx = \frac{k}{3} \int_{-2}^2 y^3 \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{k}{3} \int_{-2}^2 (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6) dx \\ &= \frac{k}{3} \left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{4.096k}{105} \end{aligned}$$

Así pues,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4.096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

así que el centro de masas es $(0, 16/7)$. □

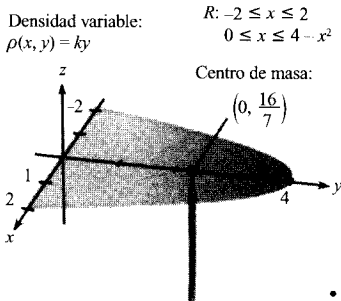


FIGURA 13.39

El centro de masas de una lámina plana es su punto de equilibrio.

Aunque se pueden interpretar los momentos M_x, M_y como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x, y , el cálculo de los momentos suele ser un paso intermedio hacia un objetivo más relevante: el centro de masas. El uso de M_x, M_y en el Ejemplo 3 es típico en ese sentido. Conocer el centro de masas es útil en muy diversas aplicaciones, pues permite tratar la lámina como si toda su masa estuviera concentrada en ese punto. Intuitivamente, el centro de masas es el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del Ejemplo 3 se mantendría en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocada en $(0, 16/7)$, como sugiere la Figura 13.39.

Momentos de inercia

Los momentos M_x , M_y , utilizados para determinar el centro de masas se suelen llamar **primeros momentos** respecto de los ejes x , y . En cada caso, el momento es el producto de la masa por una distancia.

$$M_x = \int_R \int (y) \rho(x, y) dA \qquad M_y = \int_R \int (x) \rho(x, y) dA$$

↑ ↑
↑ ↑

Distancia Masa
Distancia Masa

al eje x
al eje y

Ahora introduciremos otro tipo de momentos, el **segundo momento** o **momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Así como la masa es una medida de la resistencia de la materia a cambios en su movimiento rectilíneo, el momento de inercia *mide la resistencia de la materia a cambios en su movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m dista d de una recta fija, su momento de inercia respecto de ella se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2$$

Al igual que con los momentos de masas, podemos generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x , y . Estos segundos momentos, que se denotan por I_x , I_y , son productos de una masa por el cuadrado de una distancia.

! Nota. Para una lámina en el plano xy , I_0 representa el momento de inercia de la lámina respecto del eje z . El término «momento polar de inercia» se debe a que en su cálculo se utiliza el cuadrado de la distancia polar r .

$$I_x = \int_R \int (y^2) \rho(x, y) dA \qquad I_y = \int_R \int (x^2) \rho(x, y) dA$$

↑ ↑
↑ ↑

Cuadrado de la distancia Masa
Cuadrado de la distancia Masa

al eje x
al eje y

$$I_0 = \int_R \int (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

$$= \int_R \int r^2 \rho(x, y) dA$$

La suma de los momentos I_x , I_y se llama **momento polar de inercia** y se denota por I_0 .

EJEMPLO 4 Cálculo del momento de inercia

Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del Ejemplo 3.

Solución: De la definición del momento de inercia se sigue que

$$I_x = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y^2(ky) dy dx$$

$$= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \left[y^4 \right]_0^{4-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8) dx \\
 &= \frac{k}{4} \left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \right]_{-2}^2 \\
 &= \frac{32.768k}{315}
 \end{aligned}$$

□

El momento de inercia de una lámina en rotación sirve para medir su energía cinética. Por ejemplo, si una lámina plana en torno a una recta con **velocidad angular** de ω radianes/s (Figura 13.40), su energía cinética es

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{Energía cinética de una lámina en rotación}$$

Por otra parte, la energía cinética de una masa m que se mueve en línea recta con velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Energía cinética en el movimiento rectilíneo}$$

Así pues, la energía cinética de una masa en movimiento rectilíneo es proporcional a su masa, mientras que la de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El radio de giro de una masa m que gira con momento de inercia I se define como

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{Radio de giro}$$

Si toda la masa estuviera situada a distancia \bar{r} del eje de giro, tendría el mismo momento de inercia y, en consecuencia, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del Ejemplo 4 respecto del eje x es

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32.768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2,47$$

EJEMPLO 5 Cálculo del radio de giro

Hallar el radio de giro respecto del eje y de la lámina correspondiente a la región $R: 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi$, si la densidad en (x, y) viene dada por $\rho(x, y) = x$.

Solución: La Figura 13.41 muestra la región R . Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre R se ve que la masa de la región es π . El momento de inercia respecto del eje y es

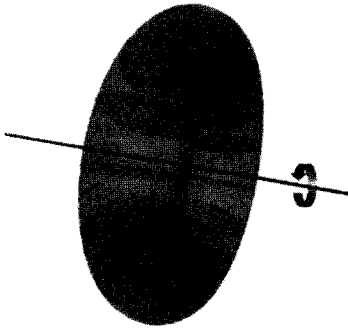


FIGURA 13.40
Lámina plana girando a ω radianes/s.

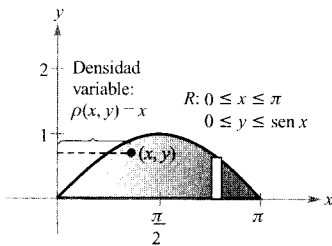


FIGURA 13.41
El radio de giro respecto del eje y es aproximadamente 1,97.

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^3 dy dx \\
 &= \int_0^\pi x^3 y \Big|_0^{\sin x} dx \\
 &= \int_0^\pi x^3 \sin x dx \\
 &= \left[(3x^2 - 6)(\sin x) - (x^3 - 6x)(\cos x) \right]_0^\pi \\
 &= \pi^3 - 6\pi
 \end{aligned}$$

Por tanto, el radio de giro respecto del eje y es

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} = \sqrt{\pi^2 - 6} \approx 1,97 \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 13.4

En los Ejercicios 1-4, hallar la masa y el centro de masas de la lámina cuya densidad se especifica.

- R : Rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b)
 a) $\rho = k$ b) $\rho = ky$ c) $\rho = kx$
- R : Rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b)
 a) $\rho = kxy$ b) $\rho = k(x^2 + y^2)$
- R : Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(b/2, h)$, $(b, 0)$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = ky$ c) $\rho = kx$
- R : Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = x^2 + y^2$
- Traslaciones en el plano** Trasladar la lámina del Ejercicio 1 cinco unidades a la derecha y hallar el centro de masas resultante.
- Conjetura** A la vista del resultado del Ejercicio 5, formular una conjetura acerca de cómo cambia el centro de masas cuando una lámina de densidad constante se traslada h unidades horizontalmente o k unidades verticalmente. ¿Es válida la conjetura para láminas de densidad variable? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 7-18, hallar la masa y el centro de masas de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (Ayuda: Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares).

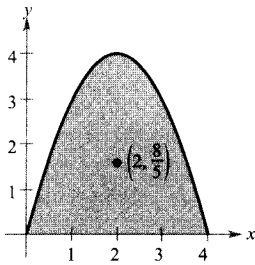
- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $a) \rho = k$ b) $\rho = k(a - y)y$
- $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq x, 0 \leq y, a) \rho = k$ b) $\rho = k(x^2 + y^2)$

- $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $\rho = kxy$
- $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$, $\rho = kx$
- $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $\rho = k$
- $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $\rho = kx^2$
- $x = 16 - y^2$, $x = 0$, $\rho = kx$
- $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $\rho = ky^2$
- $y = \sin \frac{\pi x}{L}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = L$, $\rho = ky$
- $y = \cos \frac{\pi x}{L}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$, $\rho = k$
- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq y \leq x$, $\rho = k$
- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $y = x$, $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$

En los Ejercicios 19-22, usar integración simbólica para calcular la masa y el centro de masas de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones para la densidad indicada.

- $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $\rho = ky$
- $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$, $\rho = k/x$
- $r = 2 \cos 3\theta$, $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $\rho = k$
- $r = 1 + \cos \theta$, $\rho = k$

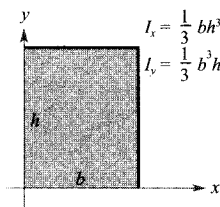
Para pensar El centro de masas de la lámina de densidad constante de la figura es $(2, 8/5)$. En los Ejercicios 23-26, enunciar una conjetura sobre cómo cambiará el centro de masas (\bar{x}, \bar{y}) para una lámina de densidad $\rho(x, y)$ no constante. Explicar la respuesta. (Elaborar la conjetura sin efectuar cálculos.)



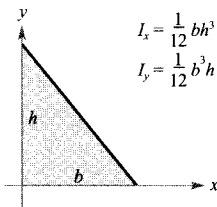
23. $\rho(x, y) = ky$ 24. $\rho(x, y) = k|2 - x|$
 25. $\rho(x, y) = kxy$ 26. $\rho(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$

En los Ejercicios 27-32, verificar los momentos de inercia dados y hallar \bar{x} e \bar{y} . Suponemos que las láminas tienen densidad $\rho = 1$. (Estas regiones son formas de uso común en Ingeniería.)

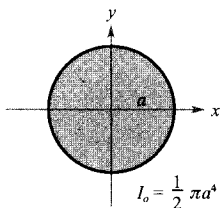
27. Rectángulo



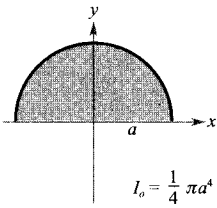
28. Triángulo rectángulo



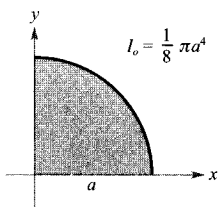
29. Círculo



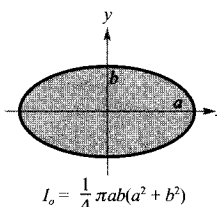
30. Semicírculo



31. Cuarto de círculo



32. Elipse



En los Ejercicios 33-40, calcular I_x , I_y , I_o , \bar{x} e \bar{y} para la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar integración simbólica para evaluar las integrales dobles.

33. $y = 0, y = b, x = 0, x = a, \rho = ky$

34. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0, \rho = ky$

35. $y = 4 - x^2, y = 0, x > 0, \rho = kx$

36. $y = x, y = x^2, \rho = kxy$

37. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4, \rho = kxy$

38. $y = x^2, y^2 = x, \rho = x^2 + y^2$

39. $y = x^2, y^2 = x, \rho = kx$

40. $y = x^3, y = 4x, \rho = ky$

En los Ejercicios 41-46, escribir las integrales dobles requeridas para el cálculo del momento de inercia I , respecto de la recta indicada, de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar integración simbólica para evaluar esas integrales dobles.

41. $x^2 + y^2 = b^2, \rho = k$, recta: $x = a(a > b)$

42. $y = 0, y = 2, x = 0, x = 4, \rho = k$, recta: $x = 6$

43. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4, \rho = kx$, recta: $x = 6$

44. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0, \rho = ky$, recta: $y = a$

45. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0, x \geq 0, \rho = k(a - y)$, recta: $y = a$

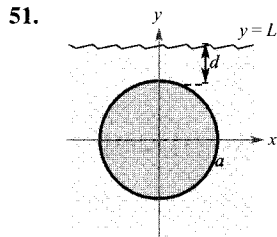
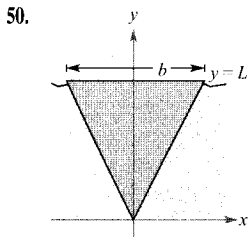
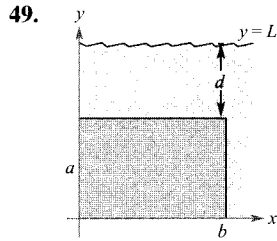
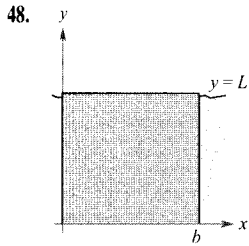
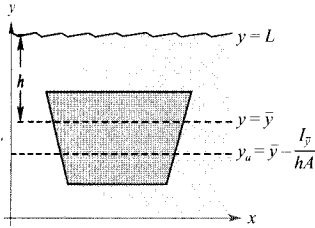
46. $y = 4 - x^2, y = 0, \rho = k$, recta: $y = 2$

47. Demostrar el siguiente teorema de Pappus: sea R una región plana y sea L una recta en ese plano, tal que L no pasa por el interior de R . Si r es la distancia del centroide de R a la recta, el volumen del sólido de revolución generado al girar la región R en torno a esa recta viene dado por $V = 2\pi rA$, siendo A el área de R .

Hidráulica En los Ejercicios 48-51, determinar el punto y_a del eje horizontal en el que debe situarse una puerta vertical en una presa para lograr que no haya momento que produzca rotación bajo la carga especificada (véase figura en la página siguiente). El modelo para y_a es

$$y_a = \bar{y} - \frac{I_{\bar{y}}}{hA}$$

donde \bar{y} es la coordenada y del centroide de la puerta, $I_{\bar{y}}$ el momento de inercia de la puerta respecto de la recta $y = \bar{y}$, h la profundidad del centroide bajo la superficie del agua y A el área de la puerta.



PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Centro de presión de una vela El centro de presión de una vela es el punto (x_p, y_p) en el cual se puede considerar que actúa la fuerza aerodinámica total. Si la vela viene representada por una región plana R , su centro de presión es

$$x_p = \frac{\iint_R xy \, dA}{\iint_R y \, dA}$$

y

$$y_p = \frac{\iint_R y^2 \, dA}{\iint_R y \, dA}$$

Consideremos una vela triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 5)$. Verificar los valores de las tres integrales siguientes.

$$\begin{aligned} \iint_R y \, dA &= 10 \\ \iint_R xy \, dA &= \frac{35}{6} \\ \iint_R y^2 \, dA &= \frac{155}{6} \end{aligned}$$

Calcular las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión. Hacer un dibujo de la vela e indicar en él la localización del centro de presión.

CONTENIDO ■
Área de una superficie ■

13.5
Área de una superficie

Área de una superficie

A estas alturas conocemos ya muchas cosas acerca de la región sólida comprendida entre una superficie y una región acotada R del plano xy (Figura 13.42). Por ejemplo, sabemos hallar los extremos de f en R (Sección 12.8), el área de la base R del sólido (Sección 13.1), el volumen del sólido (Sección 13.2) y el centroide de la base R (Sección 13.4).

En esta sección veremos cómo hallar el **área de la superficie** superior del sólido. Más tarde, aprenderemos a calcular el centroide del sólido (Sección 13.6) y el área lateral (Sección 14.2).

Para empezar, consideremos una superficie S dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie definida sobre una región } R$$

definida sobre una región R . Suponemos que R es cerrada y acotada y que f tiene primeras derivadas parciales continuas. Para hallar el área de la superfi-

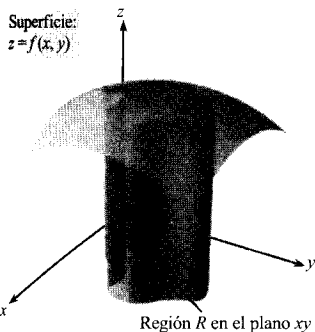


FIGURA 13.42

cie, construimos una partición interior de R consistente en n rectángulos, siendo el área del i -ésimo rectángulo R_i igual a $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, como indica la Figura 13.43. En cada R_i , sea (x_i, y_i) el punto más próximo al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ de la superficie S construimos un plano tangente T_i . El área de la porción del plano tangente que está justo encima de R_i es aproximadamente igual al área de la superficie encima de R_i . Esto es, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, el área de la superficie S viene dada por

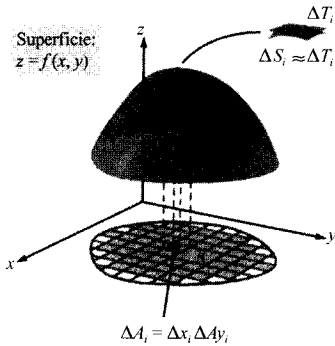


FIGURA 13.43

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i$$

Para calcular el área del paralelogramo ΔT_i observemos que sus lados vienen dados por los vectores

$$\mathbf{u} = \Delta x_i \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = \Delta y_i \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \mathbf{k}$$

Según el Teorema 10.8, el área de ΔT_i viene dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \end{vmatrix} \\ &= f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{k} \\ &= (-f_x(x_i, y_i) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \mathbf{j} + \mathbf{k}) \Delta A_i \end{aligned}$$

Así pues, el área de ΔT_i es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A_i$, y

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie } S &\approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i \end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente definición de área de una superficie.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre la región cerrada y acotada R del plano xy , el **área de la superficie** S dada por $z = f(x, y)$ sobre R es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R dS \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \end{aligned}$$

Como ayuda para memorizar la integral doble del área de una superficie, es útil darse cuenta de que es análoga a la integral para la longitud de arco.

Longitud sobre el eje x :
$$\int_a^b dx$$

Longitud de arco en el plano xy :
$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Área en el plano xy :
$$\int_R \int dA$$

Área de una superficie en el espacio:

$$\int_R \int dS = \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$$

Al igual que las integrales para la longitud de arco, las que dan el área de una superficie suelen ser muy difíciles de calcular. No obstante, hay excepciones como la del próximo ejemplo.

EJEMPLO 1 Área de una región plana

Hallar el área de la porción del plano $z = 2 - x - y$ que está situada encima del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante (Figura 13.44).

Solución: Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, el área de esa superficie viene dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\ &= \int_R \int \sqrt{3} dA \\ &= \sqrt{3} \int_R \int dA \end{aligned}$$

Nótese que la integral de la derecha es simplemente $\sqrt{3}$ veces el área de la región R . Así pues, el área de S es

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} (\text{área de } R) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \end{aligned}$$

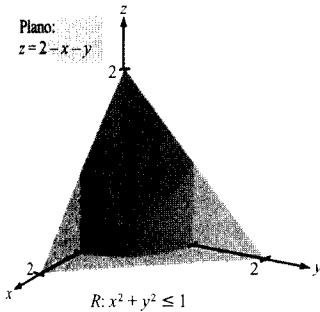


FIGURA 13.44

El área de la porción del plano que está situada encima del cuarto de círculo es $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$.

EJEMPLO 2 Cálculo del área de una superficie

Hallar el área de la porción de la superficie

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y \quad \text{Superficie}$$

situada encima de la región triangular con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, y $(0, 1, 0)$.

Solución: Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA = \\ &= \int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 1} \, dA \end{aligned}$$

En la Figura 13.45 vemos que las cotas para R son $0 \leq x \leq 1$ y $x - 1 \leq y \leq 1 - x$. Por tanto, la integral se convierte en

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 y \sqrt{2 + 4x^2} \Big|_{x-1}^{1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 (2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}) \, dx \quad \text{Tablas de integración (apéndice),} \\ &\quad \text{fórmula 26 y regla de las potencias.} \\ &= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{2 + 4x^2}) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{6} + \ln(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= 1,618 \end{aligned}$$

□

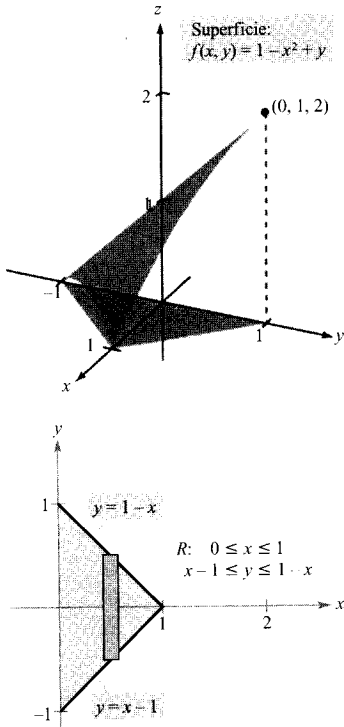


FIGURA 13.45

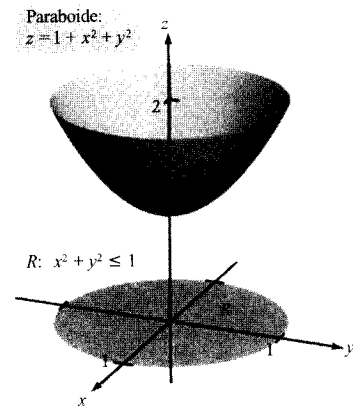


FIGURA 13.46

El área de la porción del paraboloide que está situada encima del círculo unidad es aproximadamente 5,33.

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Calcular el área de la superficie del paraboloide

$$z = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{Paraboloide}$$

sobre el círculo unidad (Figura 13.46).

Solución: Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, se tiene

$$\begin{aligned} S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA = \\ &= \int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \end{aligned}$$

Pasamos a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Entonces, al estar la región R acotada por $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} d\theta \\ &= \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6} \approx 5,33 \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Área de una superficie

Hallar el área S de la porción de superficie del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio}$$

situada encima de la región R acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$.

Solución: Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y de la fórmula para el área de una superficie deducimos que

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA = \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la superficie es

$$S = \int_R \int \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA$$

Pasamos a polares haciendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Con ello, teniendo en cuenta que la región R está acotada por

$$0 \leq r \leq 3 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

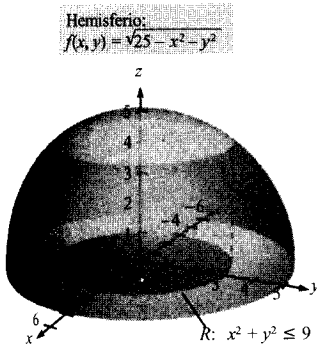


FIGURA 13.47

El área de la porción del hemisferio situada sobre el círculo es 10π .

resulta

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25-r^2}} r \, dr \, d\theta \\
 &= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{25-r^2} \right]_0^3 d\theta \\
 &= 5 \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 10\pi
 \end{aligned}$$

□

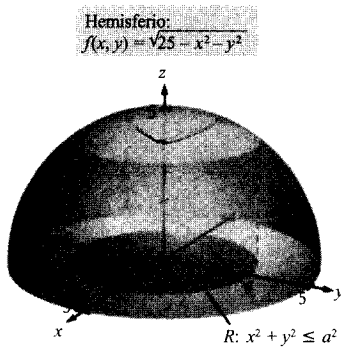


FIGURA 13.48

El procedimiento del Ejemplo 4 sirve también para calcular el área de una esfera usando la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, donde $0 < a < 5$ (Figura 13.48). El área de la porción del hemisferio $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ situada sobre la región circular es

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r \, dr \, d\theta \\
 &= 10\pi(5 - \sqrt{25 - a^2})
 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando a tiende a 5 y multiplicando por 2 el resultado, se obtiene como área total 100π . (El área de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.)

Para estimar el valor de una integral doble puede usarse la regla de Simpson o la de los trapecios, *siempre que* se sepa resolver la primera integración, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Aproximación del área de una superficie por la regla de Simpson

Calcular el área de la superficie de la porción del paraboloido

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{Paraboloido}$$

situada sobre la región cuadrada limitada por $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Solución: Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

luego el área de esa superficie viene dada por

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA = \\
 &= \int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA
 \end{aligned}$$

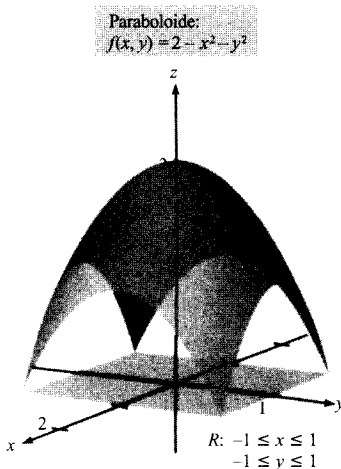


FIGURA 13.49

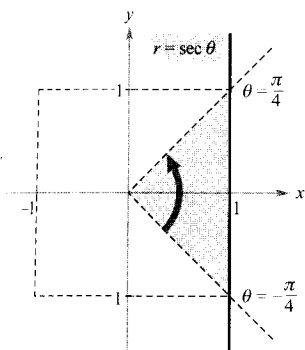


FIGURA 13.50

Un cuarto de la región R está acotado por

$$0 \leq r \leq \sec \theta \text{ y } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

En coordenadas polares, la recta $x = 1$ se expresa $r \cos \theta = 1$ o bien $r = \sec \theta$, y de la Figura 13.50 se desprende que un cuarto de la región R está acotado por

$$0 \leq r \leq \sec \theta \text{ y } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Haciendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \frac{1}{4} \int_R \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left. \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sec \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta \end{aligned}$$

Finalmente, la regla de Simpson con $n = 10$ da como aproximación para esa integral *simple*

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta \\ &\approx 7.45 \end{aligned}$$

□



La mayoría de los programas que realizan integración simbólica son capaces de aplicar también técnicas de cálculo aproximado. Intente, si dispone de los medios adecuados, aproximar el valor de la integral del Ejemplo 5.

Ejercicios de la Sección 13.5

En los Ejercicios 1-14, calcular el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R . (Ayuda: Algunas de las integrales son más fáciles en coordenadas polares.)

1. $f(x, y) = 2x + 2y$

R : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$

2. $f(x, y) = 10 + 2x - 3y$

R : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$

3. $f(x, y) = 8 + 2x + 2y$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

4. $f(x, y) = 10 + 2x - 3y$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$

5. $f(x, y) = 9 - x^2$

R : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$

6. $f(x, y) = y^2$

R : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$

7. $f(x, y) = 2 + x^{3/2}$

R : rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$

8. $f(x, y) = 2 + \frac{3}{2}x^{3/2}$

$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

9. $f(x, y) = \ln |\sec x|$
 $R = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x \right\}$

10. $f(x, y) = 4 + x^2 - y^2$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$

12. $f(x, y) = xy$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$

13. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, b < a\}$

14. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

En los Ejercicios 15-18, hallar el área de la superficie.

15. Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante.

16. Porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante.

17. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

18. Porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

En los Ejercicios 19-24, escribir una integral doble que represente el área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R . Usar integración simbólica, en una calculadora apropiada, para evaluar las integrales dobles.

19. $f(x, y) = 2y + x^2$
 R : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

20. $f(x, y) = 2x + y^2$
 R : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

21. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y)\}$

22. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 16\}$

23. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

24. $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \cos x$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Para pensar En los Ejercicios 25 y 26, averiguar qué valor aproxima mejor el área de la superficie de $z = f(x, y)$ sobre la región R . (Tómese la decisión sin efectuar cálculos.)

25. $f(x, y) = 10 - \frac{1}{2}y^2$
 R : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$
 a) 16 b) 200 c) -100 d) 72 e) 36

26. $f(x, y) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$
 R : círculo acotado por $x^2 + y^2 = 9$
 a) -100 b) 150 c) 9π d) 55 e) 500

En los Ejercicios 27 y 28, usar integración simbólica para aproximar la integral doble que expresa el área de la superficie de la gráfica de f sobre la región $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

27. $f(x, y) = e^x$ 28. $f(x, y) = \frac{2}{5}y^{5/2}$

En los Ejercicios 29-34, escribir una integral doble que represente el área de la superficie de la gráfica de f sobre la región R .

29. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$
 R : cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$

30. $f(x, y) = e^{-x} \sin y$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

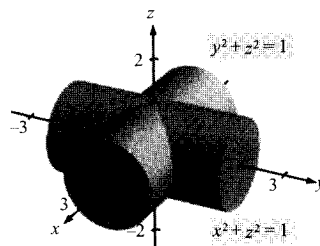
31. $f(x, y) = e^{-x} \sin y$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

32. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

33. $f(x, y) = e^{xy}$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10\}$

34. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$
 $R = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

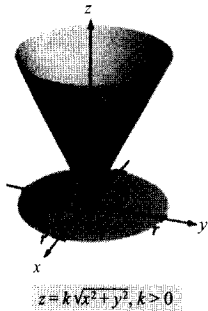
35. Hallar el área de la superficie del sólido intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ (véase figura).



36. Probar que el área del cono

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad k > 0$$

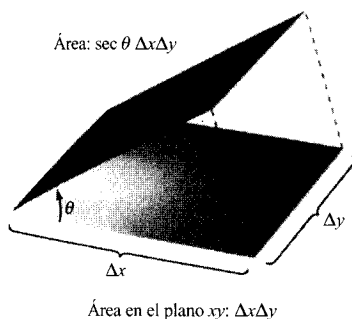
sobre la región $x^2 + y^2 \leq r^2$ circular en el plano xy es $\pi r^2 \sqrt{k^2 + 1}$ (véase figura).



37. **Diseño de edificios** Se construye un auditorio sobre una base R , en forma de un cuarto de círculo de radio 50 pies, acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 50^2$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Un modelo para el suelo y el techo viene dado por las ecuaciones

$$\text{Suelo: } z = \frac{x + y}{5} \quad \text{Techo: } z = 20 + \frac{xy}{100}$$

- a) Calcular el volumen de la sala, lo cual afecta a las instalaciones de calefacción y aire acondicionado.
 b) Calcular el área del techo del auditorio.
38. El ángulo entre un plano P y el plano xy es θ , con $0 \leq \theta < \pi/2$. La proyección de una región rectangular de P sobre el plano xy es un rectángulo de lados Δx y Δy , como muestra la figura. Demostrar que el área de la región rectangular de P es $\sec \theta \Delta x \Delta y$



39. **Para pensar** Usar el resultado del Ejercicio 38 para ordenar los planos por áreas crecientes correspondientes a una región dada R en el plano xy . Justificar ese orden sin efectuar cálculos.
- a) $z_1 = 2 + x$ b) $z_2 = 5$
 c) $z_3 = 10 - 5x + 9y$ d) $z_4 = 3 + x - 2y$

40. **Diseño industrial** Una empresa fabrica un objeto esférico de 25 cm de radio. Se perfora en él un orificio de 4 cm a través de su centro. Calcular a) el volumen del objeto y b) el área de su superficie.

41. **¿Verdadero o falso?** El área de la superficie dada por la gráfica de una función $z = f(x, y)$ sobre una región R crece si se traslada la gráfica verticalmente k unidades. Explicar la respuesta.

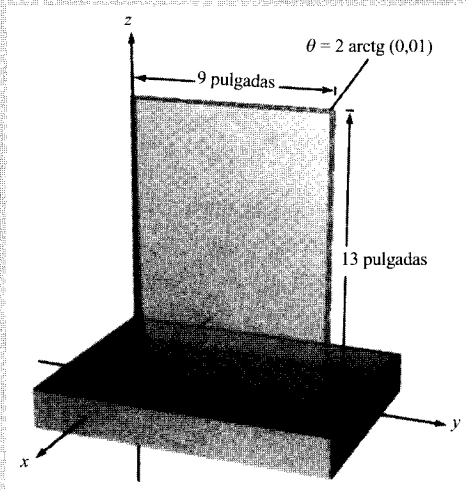
PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Capilaridad Una propiedad bien conocida de los líquidos, conocida como «capilaridad», consiste en que ascienden por conductos muy estrechos. La figura muestra dos placas que forman una cuña muy estrecha en un contenedor de líquido. La superficie superior del líquido adquiere una forma hiperbólica de ecuación

$$z = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde x, y, z se miden en pulgadas. La constante k depende del ángulo de la cuña, del tipo de líquido y del material de las placas.

- a) Calcular el volumen de líquido que ha ascendido por la cuña, suponiendo $k = 1$.
 b) Calcular el área de la superficie del líquido que ha ascendido por la cuña.



Adaptación de un problema de capilaridad de «Capillary Phenomena» de Thomas Greenslade Jr. en *Physics Teacher*, mayo 1992 (con permiso del autor).

CONTENIDO ■

Integrales triples ■

Centro de masas y momentos de inercia ■

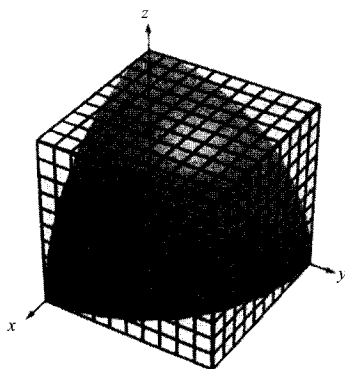
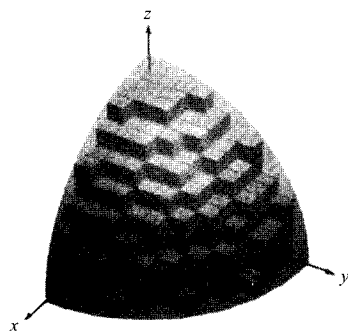
Región sólida Q 

FIGURA 13.51

$$\text{Volumen de } Q \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

13.6

Integrales triples y aplicaciones

Integrales triples

El procedimiento utilizado para definir una integral triple imita el de las integrales dobles. Consideremos una función f de tres variables, continua sobre una región sólida acotada Q . Superponemos a Q un retículo de cajas y formamos la **partición interior** con todas las cajas que están completamente dentro de Q (Figura 13.51). El volumen de la i -ésima caja es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \quad \text{Volumen de la } i\text{-ésima caja}$$

La norma $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más larga entre las de las n cajas de la partición. Elegimos un punto (x_i, y_i, z_i) en cada caja y formamos la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Tomando el límite para $\|\Delta\| \rightarrow 0$ llegamos a la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si f es continua en una región sólida acotada Q , la **integral triple de f sobre Q** se define como

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

siempre que este límite exista. El **volumen** de la región sólida Q viene dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint_Q dV$$

Algunas propiedades de las integrales dobles expuestas en el Teorema 13.1 se extienden a las integrales triples.

1.
$$\iiint_Q cf(x, y, z) dV = c \iiint_Q f(x, y, z) dV$$
2.
$$\iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$$
3.
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$$

donde Q es la unión de dos subregiones sólidas Q_1, Q_2 sin solapamiento. Si la región sólida Q es simple, la integral triple $\iiint f(x, y, z) dV$ se puede evaluar mediante una integral iterada, usando cualquiera de estos seis posibles órdenes de integración:

$$dx dy dz, dy dx dz, dz dx dy, dx dz dy, dy dz dx, dz dy dx$$

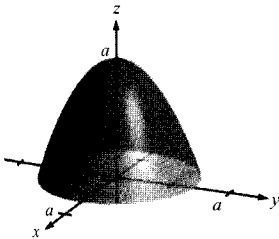
La próxima versión del teorema de Fubini describe una región simple respecto del orden $dz dy dx$. Descripciones similares pueden formularse para los otros cinco órdenes.

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector de paraboloides En las páginas 1225 y 1233 se le pidió resumir los métodos que conocía para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, a > 0$$

y el plano xy . Ahora conoce otro método. Úselo para calcular el volumen del sólido.



TEOREMA 13.4 EVALUACIÓN DE INTEGRALES ITERADAS

Sea f continua en una región sólida Q definida por

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1, g_2 son funciones continuas. Entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Para calcular una integral iterada en el orden $dz dy dx$, mantenemos tanto x como y constantes en la integración más interior. A continuación, mantenemos x constante para la segunda integración.

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral iterada triple

Calcular la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) dz dy dx$$

Solución: Para la primera integración mantenemos x e y constantes con respecto a z .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2) \Big|_0^{x+y} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) dy dx \end{aligned}$$

Para la segunda integración, mantenemos x constante con respecto a y .

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) dy dx &= \int_0^2 \left[e^x \left(x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \right]_0^x dx \\
 &= \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx \\
 &= \frac{19}{6} \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \right]_0^2 \\
 &= 19 \left(\frac{e^2}{3} + 1 \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

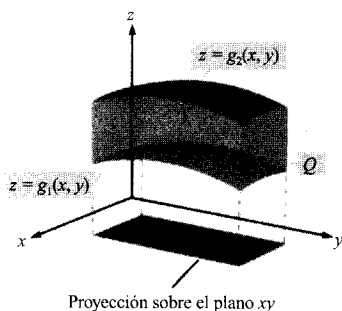


FIGURA 13.52

La región sólida Q está comprendida entre dos superficies.

| Nota. El Ejemplo 1 ilustra el orden de integración $dz dy dx$. Para otros órdenes se sigue un procedimiento análogo. Así, para calcular una integral iterada triple en el orden $dx dy dz$, mantenemos y, z constantes respecto de x para la integración más interior. Después, para la segunda integración, mantenemos z constante e integramos en y . Finalmente, en la tercera integración integramos en z .

Para determinar los límites de un orden particular de integración, es aconsejable, en general, hallar primero los límites más interiores. Entonces, proyectando el sólido Q sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración por los métodos utilizados para integrales dobles. Por ejemplo, para calcular

$$\iiint_Q f(x, y, z) dz dy dx$$

determinar primero los límites para z y entonces la integral tiene la forma

$$\iint \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy dx$$

Proyectando el sólido Q sobre el plano xy , podemos determinar los límites para x e y como se hacía para las integrales dobles, tal como muestra la Figura 13.52.

EJEMPLO 2 Una integral triple para calcular un volumen

Hallar el volumen del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

Solución: Como x, y, z juegan papeles similares en la ecuación, el orden de integración es probablemente irrelevante, así que elegimos $dz dy dx$. Además, los cálculos se simplifican considerando sólo la porción del elipsoide del primer octante (Figura 13.53). Dado que el orden elegido es $dz dy dx$, hemos de determinar en primer lugar los límites para z .

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

En la Figura 13.54 vemos que las cotas para x e y son $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, así que el volumen del elipsoide es

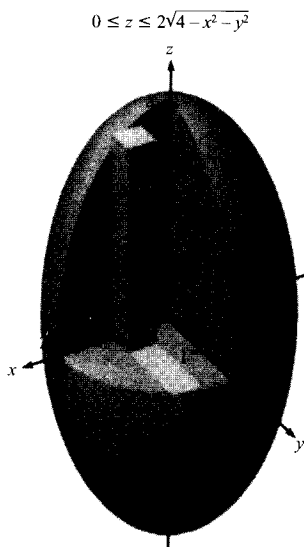


FIGURA 13.53

El volumen del elipsoide es $64\pi/3$.

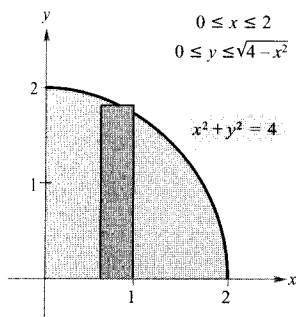


FIGURA 13.54

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_Q dV \\
 &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\
 &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z \Big|_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy \, dx \\
 &= 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2} \, dy \, dx \quad \text{Tablas de integración (apéndice), fórmula 37} \\
 &= 8 \int_0^2 \left[y\sqrt{4-x^2-y^2} + (4-x^2) \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right) \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= 8 \int_0^2 (4-x^2) \left(\frac{\pi}{2}\right) dx \\
 &= 4\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \frac{64\pi}{3}
 \end{aligned}$$

□

El Ejemplo 2 es inusual en el sentido de que los seis órdenes de integración llevan a integrales de dificultad similar. Intente resolver ese cálculo usando algún otro orden. Así, el orden $dx \, dy \, dz$ conduce a la integral

$$V = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}/2} \int_0^{\sqrt{16-4y^2-z^2}/2} dx \, dy \, dz$$

Si halla esta integral obtendrá el mismo valor del Ejemplo 2. Eso ocurre siempre: el valor de la integral no se ve afectado por el orden de integración. Sin embargo, la dificultad del cálculo sí puede verse afectado. En el Ejemplo 3 el orden propuesto no es conveniente, de manera que lo cambiaremos para simplificar el problema.

EJEMPLO 3 Cambio del orden de integración

Calcular $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \sen y^2 \, dz \, dy \, dx$

Solución: Nótese que, tras una integración en el orden dado, nos encontraríamos con la integral $2 \int \sen(y^2) \, dy$, que no es una función elemental. Para eludir esa dificultad, cambiamos el orden de integración a $dz \, dx \, dy$, de manera que y quede como variable exterior. La región sólida Q viene dada por

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \leq z \leq 3$$

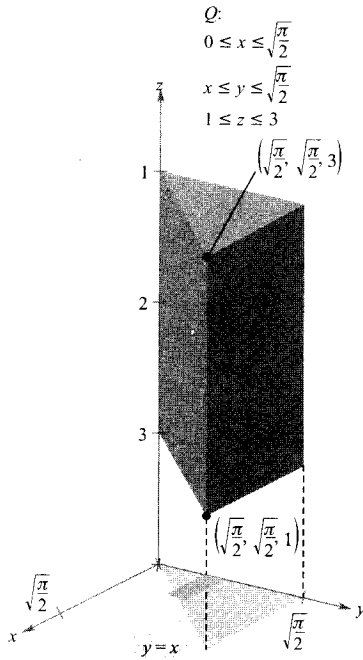


FIGURA 13.55
El volumen de la región sólida Q es 1.

como muestra la Figura 13.55, y la proyección de Q sobre el plano xy da las cotas

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq y$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_Q dV = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2) \, dz \, dx \, dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z \operatorname{sen}(y^2) \Big|_1^3 \, dx \, dy \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \operatorname{sen}(y^2) \, dx \, dy \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \operatorname{sen}(y^2) \Big|_0^y \, dy \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \operatorname{sen}(y^2) \, dy \\
 &= -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4 Determinación de los límites de integración

Escribir una integral triple para el volumen de cada región sólida.

- a) La región del primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$.
- b) El hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
- c) La región limitada inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Solución:

- a) En la Figura 13.56 vemos que el sólido está acotado por abajo por el plano xy ($z = 0$) y por arriba por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto,

$$0 \leq z \leq 1 - y^2 \quad \text{Cotas para } z$$

Al proyectar la región sobre el plano xy se obtiene un paralelogramo. Puesto que dos lados del paralelogramo son paralelos al eje x , tenemos las cotas

$$1 - y \leq x \leq 3 - y \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1$$

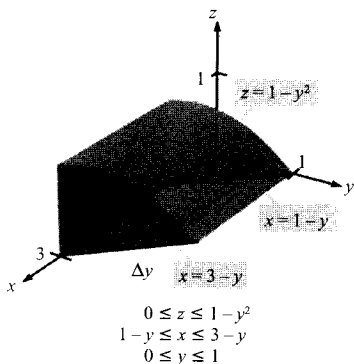


FIGURA 13.56

En consecuencia, el volumen de la región viene dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz \, dx \, dy$$

b) Para el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tenemos

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{Cotas para } z$$

En la Figura 13.57 se aprecia que la proyección del hemisferio sobre el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, y podemos usar el orden $dx \, dy$ o el orden $dy \, dx$. Elijiendo el primero, tenemos

$$-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

lo cual implica que el volumen de la región viene dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dx \, dy$$

c) Para la región acotada por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, es

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \quad \text{Cotas para } z$$

La esfera y el paraboloide se cortan cuando $z = 2$. Además, vemos en la Figura 13.58 que la proyección del sólido sobre el plano xy es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Usando el orden $dy \, dx$ se tiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

de donde se sigue que el volumen de la región viene dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \quad \square$$

Centro de masas y momentos de inercia

En el resto de esta sección discutimos dos aplicaciones de las integrales triples que son importantes en Ingeniería. Consideremos una región sólida Q cuya densidad en (x, y, z) viene dada por la **función densidad** ρ . El **centro de masas** de una región sólida Q de masa m viene dada por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

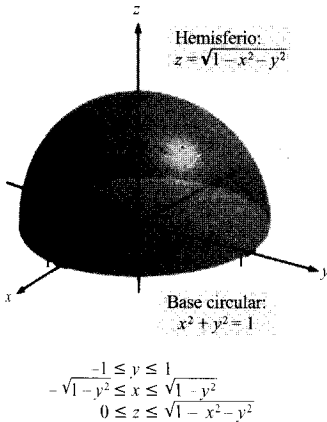


FIGURA 13.57

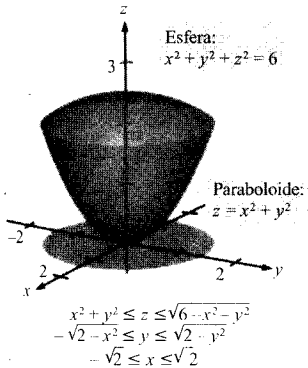
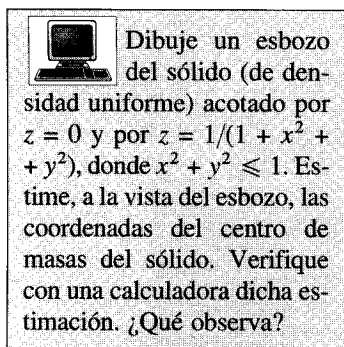


FIGURA 13.58



$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z) dV \quad \text{Masa del sólido}$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z) dV \quad \text{Primer momento respecto del plano } yz$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z) dV \quad \text{Primer momento respecto del plano } xz$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z) dV \quad \text{Primer momento respecto del plano } xy$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Nota. En Física y en Ingeniería, el momento de inercia sirve para calcular el tiempo requerido para que una masa alcance una velocidad de giro prefijada en torno al eje x (Figura 13.59). Cuanto mayor es el momento de inercia, mayor es la fuerza que debe actuar para que la masa alcance la velocidad dada.

Las cantidades M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} se llaman los **primeros momentos** de la región Q respecto de los planos yz , xz y xy .

Los primeros momentos de una región sólida se toman respecto de un plano, mientras que los segundos se toman respecto de una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) respecto de los ejes x , y , z son

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV \quad \text{Momento de inercia respecto al eje } x$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV \quad \text{Momento de inercia respecto al eje } y$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV \quad \text{Momento de inercia respecto al eje } z$$

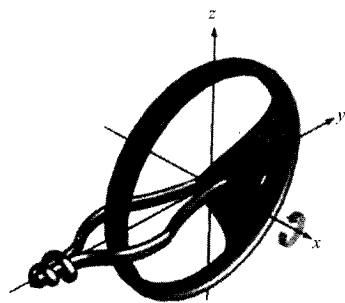


FIGURA 13.59

En problemas que requieran calcular los tres momentos, se puede ahorrar mucho esfuerzo aplicando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde I_{xy} , I_{xz} , e I_{yz} son

$$I_{xy} = \iiint_Q z^2\rho(x, y, z) dV$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2\rho(x, y, z) dV$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x, y, z) dV$$

EJEMPLO 5 Centro de masas de una región sólida

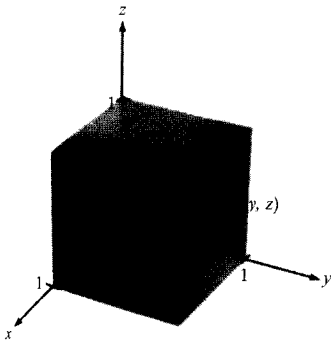


FIGURA 13.60
Densidad variable: $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

Calcular el centro de masas del cubo unidad de la Figura 13.60, si la densidad en el punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Solución: Como la densidad en (x, y, z) es proporcional al cuadrado de la distancia entre $(0, 0, 0)$ y (x, y, z) , es

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

Por la simetría de la región, cualquier orden de integración produce una integral de dificultad análoga.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 dy dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) dy dx \\ &= k \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right)y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx \\ &= k \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^1 = k \end{aligned}$$

El primer momento respecto del plano yz es

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= k \int_0^1 x \left[\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy \right] dx \end{aligned}$$

Nótese que x puede sacarse de los dos integrales interiores porque es constante respecto de y y respecto de z . Tras sacar ese factor, los dos integrales son las mismas que para la masa m . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{7k}{12} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}$$

Finalmente, de la naturaleza de ρ y la simetría de x, y, z en esta región sólida, se sigue que $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, y el centro de masas es $(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12})$. \square

EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Calcular los momentos de inercia, respecto de los ejes x e y , de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

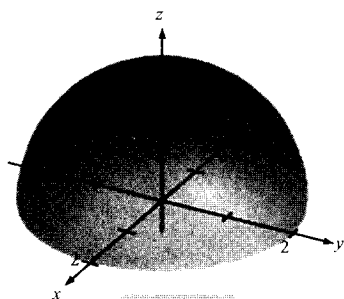
y el plano xy , si la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia de (x, y, z) al plano xy .

Solución: La densidad de la región es $\rho(x, y, z) = kz$. De la simetría del problema se sigue que $I_x = I_y$, así que basta calcular uno de ellos, digamos I_x . A la vista de la Figura 13.61, elegimos el orden $dz \, dy \, dx$ y obtenemos

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2 + z^2)(kz) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2(4-x^2-y^2)}{2} + \frac{(4-x^2-y^2)^2}{4} \right] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4-x^2)^2 - y^4] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \left[(4-x^2)^2 y - \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \frac{8}{5} (4-x^2)^{5/2} \, dx \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^2 (4-x^2)^{5/2} \, dx \quad x = 2 \operatorname{sen} \theta \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^{\pi/2} 64 \cos^6 \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{256k}{5} \right) \left(\frac{5\pi}{32} \right) \quad \text{Fórmula de Wallis} \\ &= 8k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Hemisferio:
 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$



Base circular:
 $x^2 + y^2 = 4$

FIGURA 13.61

Densidad variable: $\rho(x, y, z) = kz$.

Así pues, $I_x = 8k\pi = I_y$. □

| Nota. En el Ejemplo 6 los momentos de inercia respecto de los ejes x e y son iguales. Sin embargo, el momento respecto del eje z es distinto. A primera vista, ¿parece que este último debe ser mayor o menor que los calculados en el Ejemplo 6? Efectuando los cálculos pertinentes puede comprobar que $I_z = \frac{16}{3}k\pi$. Eso significa que el sólido de la Figura 13.61 presenta más resistencia a la rotación en torno a los ejes x , y que en torno al eje z .

Ejercicios de la Sección 13.6

En los Ejercicios 1-8, calcular la integral triple.

$$1. \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

$$2. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$3. \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \, dz \, dy \, dx$$

$$4. \int_0^4 \int_0^\pi \int_0^{1-x} x \, \text{sen } y \, dz \, dy \, dx$$

$$5. \int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-xz} \, dy \, dx \, dz$$

$$6. \int_1^4 \int_1^{e^3} \int_0^{1/xz} \ln z \, dy \, dz \, dx$$

$$7. \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \text{sen } y \, dz \, dx \, dy$$

4 En los Ejercicios 9 y 10, usar integración simbólica en una calculadora para evaluar la integral triple.

$$9. \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{x^2} x \, dz \, dy \, dx$$

$$10. \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y \, dz \, dy \, dx$$

En los Ejercicios 11 y 12, usar integración simbólica para aproximar la integral triple.

$$11. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^4 \frac{x^2 \text{sen } y}{z} \, dz \, dy \, dx$$

$$12. \int_0^3 \int_0^{2-(2y/3)} \int_0^{6-2y-3z} ze^{-xz} \, dx \, dz \, dy$$

En los Ejercicios 13-16, esbozar la región sólida cuyo volumen representa la integral triple y reescribir la integral en el nuevo orden de integración que se especifica.

$$13. \int_0^4 \int_0^{(4-x)/2} \int_0^{(12-3x-6y)/4} dz \, dy \, dx$$

Reescribirla usando el orden $dy \, dx \, dz$.

$$14. \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{10-x-y} dz \, dy \, dx$$

Reescribirla usando el orden $dz \, dx \, dy$.

$$15. \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dx \, dy$$

Reescribirla usando el orden $dz \, dy \, dx$

$$16. \int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz \, dy \, dx$$

Reescribirla usando el orden $dx \, dy \, dz$

En los Ejercicios 17 y 18, escribir los seis posibles órdenes de integración para la integral triple sobre el sólido Q

$$\iiint_Q xyz \, dV$$

$$17. Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$18. Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2-x\}$$

Volumen En los Ejercicios 19-24, usar una integral triple para calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

$$19. x = 4 - y^2, z = 0, z = x$$

$$20. z = xy, z = 0, x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$$

$$21. x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$22. z = 9 - x^2 - y^2, z = 0$$

$$23. z = 4 - x^2, y = 4 - x^2, \text{ primer octante}$$

24. $z = 9 - x^2, y = -x + 2, y = 0, z = 0, x \geq 0$

Masa y centro de masas En los Ejercicios 25-28, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masas del sólido, cuya densidad se especifica, acotado por las gráficas de las ecuaciones.

25. Calcular \bar{x} usando $\rho(x, y, z) = k$

$Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$

26. Calcular y usando $\rho(x, y, z) = ky$

$Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$

27. Calcular \bar{z} usando $\rho(x, y, z) = kz$

$Q: z = 4 - x, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0$

28. Calcular y usando $\rho(x, y, z) = k$

$Q: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c > 0), x = 0, y = 0, z = 0$

Masa y centro de masas En los Ejercicios 29 y 30, escribir integrales triples para el cálculo de la masa y del centro de masas del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

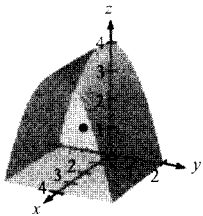
29. $x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b$

$\rho(x, y, z) = kxy$

30. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$

$\rho(x, y, z) = kz$

Para pensar El centro de masas del sólido de densidad constante que muestra la figura es $(2, 0, 8/5)$. En los Ejercicios 31-34, enunciar una conjetura (*sin* efectuar cálculos) acerca de cómo cambiará el centro de masas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para la densidad no constante $\rho(x, y)$. Explicar la respuesta.



31. $\rho(x, y, z) = kx$

32. $\rho(x, y, z) = kz$

33. $\rho(x, y, z) = k(y + 2)$

34. $\rho(x, y, z) = kxz^2(y + 2)^2$

Centroide En los Ejercicios 35-40, hallar el centroide del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones o descrito por la figura. Usar integración simbólica en una calculadora para evaluar las integrales triples. (Supóngase densidad uniforme y hállese el centro de masas.)

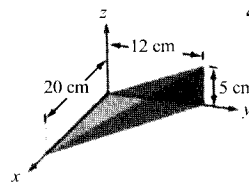
35. $z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h$

36. $y = \sqrt{4 - x^2}, z = y, z = 0$

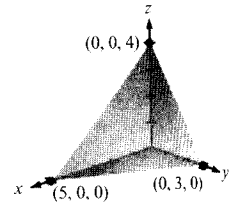
37. $z = \sqrt{4^2 - x^2 - y^2}, z = 0$

38. $z = \frac{1}{y^2 + 1}, z = 0, x = -2, x = 2, y = 0, y = 1$

39.



40.



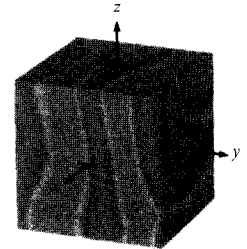
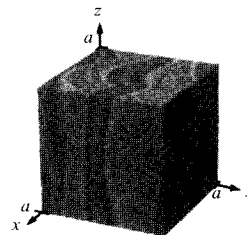
Momentos de inercia En los Ejercicios 41-44, hallar I_x, I_y, I_z para el sólido cuya densidad se especifica. Usar integración simbólica para evaluar las integrales triples.

41. a) $\rho = k$

42. a) $\rho(x, y, z) = k$

b) $\rho = kxyz$

a) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$

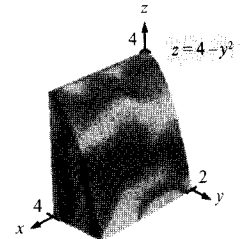
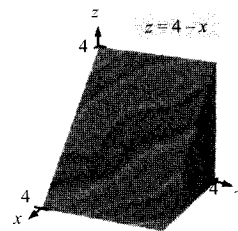


43. a) $\rho(x, y, z) = k$

44. a) $\rho = kz$

b) $\rho = ky$

a) $\rho = k(4 - z)$



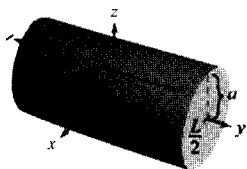
Momentos de inercia En los Ejercicios 45 y 46, verificar los momentos de inercia del sólido de densidad uniforme. Usar integración simbólica para evaluar las integrales triples.

45. $I_x = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$

46. $I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

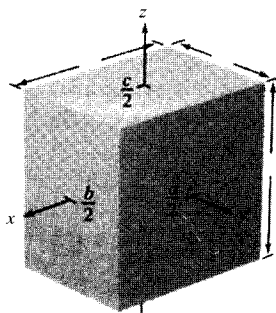
$$I_y = \frac{1}{2}ma^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$$



$$I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$$



Momentos de inercia En los Ejercicios 47 y 48, escribir una integral triple que dé el valor del momento de inercia respecto del eje z del sólido Q de densidad ρ .

47. $Q = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x\}$
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

48. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$
 $\rho = kx^2$

49. **Para pensar** Discutir si el momento de inercia, respecto del eje y , del cilindro del Ejercicio 45 crece o decrece si se toma la densidad variable $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $a = 4$.

- CONTENIDO ▀
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas ▀
- Integrales triples en coordenadas esféricas ▀



13.7

Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Muchas regiones comunes, como esferas, elipsoides, conos o paraboloides, dan lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. Tan es así que fue esta dificultad el motivo de la introducción de coordenadas no rectangulares. En esta sección, veremos cómo calcular integrales triples mediante coordenadas *cilíndricas* o *esféricas*.

Recordemos (Sección 10.7) que las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas son

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

| Nota. Estas fórmulas de conversión son fáciles de recordar si se tiene en cuenta que las de x e y son las mismas que para las coordenadas polares y que z queda invariable.

En este sistema de coordenadas, el sólido más simple es un bloque cilíndrico como el de la Figura 13.62, determinado por

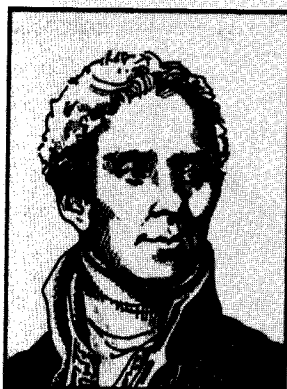
$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

Para obtener la expresión en coordenadas cilíndricas de una integral triple, supongamos que Q es una región sólida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Esto es,

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

y

$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$



PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827)

Uno de los primeros en usar el sistema de coordenadas cilíndricas fue el matemático francés Pierre Simon de Laplace, considerado el «Newton de Francia», quien publicó numerosos trabajos importantes en Mecánica, ecuaciones diferenciales y teoría de la probabilidad.

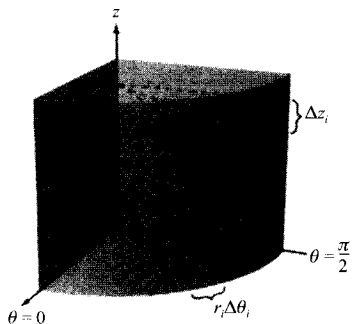


FIGURA 13.62

Volumen del bloque cilíndrico $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \Delta z_i$.

Si f es una función continua sobre el sólido Q , podemos escribir la integral triple de f sobre Q como

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_R \int \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

donde la integral doble sobre R se calcula en polares. Es decir, R es una región plana r -simple o θ -simple. Si R es r -simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

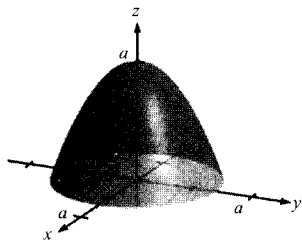
| Nota. Éste es sólo uno de los seis posibles órdenes de integración. Los otros cinco son $dz \, d\theta \, dr$, $dr \, dz \, d\theta$, $dr \, d\theta \, dz$, $d\theta \, dz \, dr$, y $d\theta \, dr \, dz$.

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector de paraboloides En las páginas 1225, 1233 y 1259 se le pedía resumir las formas que conociera de hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y por el plano xy . Ahora conoce una más. Úsela para calcular el volumen del sólido.



Compare los diferentes métodos. ¿Cuáles son sus ventajas e inconvenientes?

Para visualizar un orden particular de integración sirve de ayuda contemplar la integral triple en términos de tres movimientos de barrido, cada uno añadiendo una dimensión al sólido. Por ejemplo, en el orden $dr \, d\theta \, dz$, la primera integración se produce en la dirección r , lo que podemos imaginar como un punto en movimiento radial. A continuación, al crecer θ , el segmento recto barre un sector. Finalmente, al crecer z , ese sector genera una cuña sólida, como ilustra la Figura 13.63.

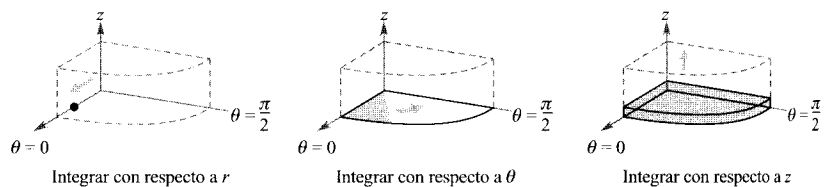


FIGURA 13.63

EJEMPLO 1 Cálculo de un volumen en coordenadas cilíndricas

Hallar el volumen de la región sólida Q que corta en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{Esfera}$$

el cilindro $r = 2 \sin \theta$ (Figura 13.64).

Solución: Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, las cotas para z son

$$-\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

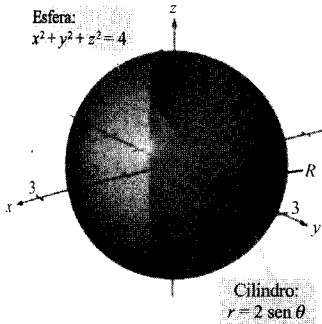


FIGURA 13.64

El volumen de la región sólida Q es $\frac{16}{9}(3\pi - 4)$.

Sea R la proyección del sólido sobre el plano $r\theta$. Las cotas de R son $0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Por tanto, el volumen de Q es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r\sqrt{4-r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8 - 8 \cos^3 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)] d\theta \\ &= \frac{32}{3} \left[\theta - \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16}{9}(3\pi - 4) \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 Cálculo de la masa en coordenadas cilíndricas

Hallar la masa de la porción del sólido elipsoidal Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, que está por encima del plano xy , supuesto que la densidad en un punto del sólido es proporcional a su distancia al plano xy .

Solución: La función densidad es $\rho(r, \theta, z) = kz$. Los límites para z son

$$0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{16 - 4r^2} = 2\sqrt{4 - r^2}$$

donde $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como muestra la Figura 13.65. La masa del sólido es

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} k z r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 z^2 r \Big|_0^{\sqrt{16-4r^2}} dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (16r - 4r^3) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[8r^2 - r^4 \right]_0^2 d\theta \\ &= 8k \int_0^{2\pi} d\theta = 16 \pi k \end{aligned}$$

□

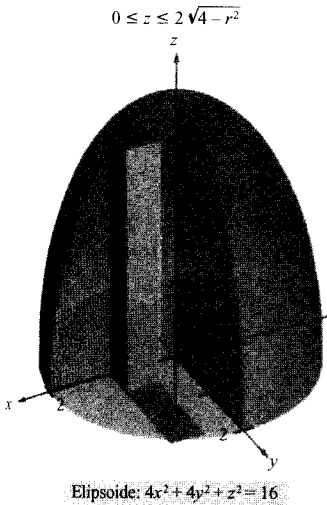


FIGURA 13.65

La masa del sólido elipsoidal es $16\pi k$.

La integración en cilíndricas es conveniente cuando aparecen en el integrando factores con $x^2 + y^2$, como sucede en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Momento de inercia

Calcular el momento de inercia respecto del eje de simetría del sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$ (Figura 13.66). La densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje z .

Solución: Puesto que el eje z es el eje de simetría, y $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, se sigue que

$$I_z = \iiint_Q k(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} dV$$

En coordenadas cilíndricas, $0 \leq r \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} I_z &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r dr d\theta dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{z}} d\theta dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5} d\theta dz \\ &= k \int_0^4 \frac{z^{5/2}}{5} (2\pi) dz = k \left[\left(\frac{2\pi}{5} \right) \left(\frac{2}{7} \right) z^{7/2} \right]_0^4 = \frac{512 k\pi}{35} \quad \square \end{aligned}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Las integrales triples que involucran esferas o conos suelen ser más fáciles de calcular en coordenadas esféricas. Recordemos (Sección 10.7) que las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a esféricas son

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por

$$\{(\rho, \theta, \phi): \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

donde $\rho_1 \geq 0$, $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, y $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$, como muestra la Figura 13.67. Si (ρ, θ, ϕ) es un punto del interior del bloque, el volumen del bloque se puede aproximar por $\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$.

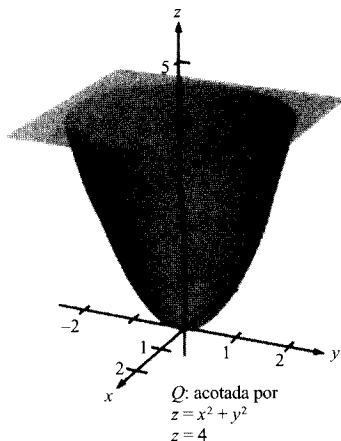


FIGURA 13.66

El momento de inercia respecto del eje z es $512 k\pi/35$.

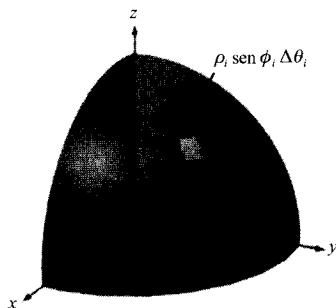


FIGURA 13.67

Bloque esférico $\Delta V_i \approx \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_i \Delta \rho_i \Delta \theta_i \Delta \phi_i$.

Por el proceso habitual de tomar una partición interior, sumar y pasar al límite se llega a la siguiente versión de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f definida sobre el sólido Q .

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Esta fórmula puede ser modificada para cubrir los otros órdenes de integración y generalizada de manera que incluya regiones con cotas variables.

Del mismo modo que en cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se calculan mediante integrales iteradas. Podemos visualizar un orden particular de integración, igual que hicimos en cilíndricas, imaginando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales añade una dimensión. Por ejemplo, la visualización para la integral iterada

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

(que se usó en el Ejemplo 4) se ilustra en la Figura 13.68.

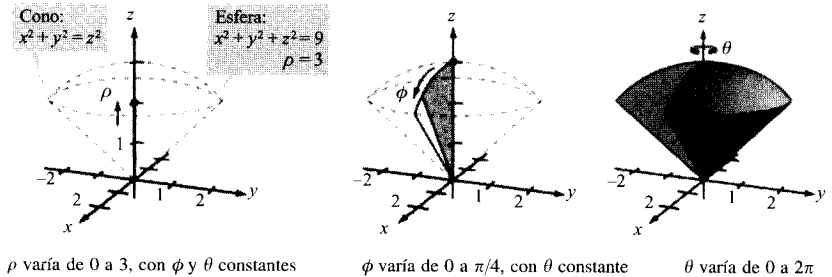


FIGURA 13.68

Nota. La letra griega ρ utilizada en coordenadas esféricas no tiene nada que ver con la densidad. No es sino el análogo tridimensional de la r usada en polares. En problemas donde hayan de convivir las coordenadas esféricas y una densidad, usaremos un símbolo distinto para la densidad.

EJEMPLO 4 Volumen en coordenadas esféricas

Calcular el volumen de la región sólida Q acotada por abajo por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (Figura 13.69).

Solución: En coordenadas esféricas la ecuación de la esfera es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3$$

Además, la esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

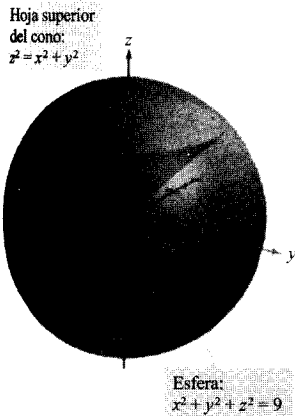


FIGURA 13.69

y como $z = \rho \cos \phi$, se sigue que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

En consecuencia, podemos usar el orden de integración $d\rho \, d\phi \, d\theta$, donde $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$, y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 9 \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \, d\theta = 9\pi(2 - \sqrt{2}) \approx 16,56 \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Centro de masas de una región sólida

Hallar el centro de masas de la región sólida Q de densidad uniforme acotada por abajo por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución: Por ser uniforme la densidad, podemos considerar que su valor en (x, y, z) es k . Por simetría, el centro de masas debe estar en el eje z , así que sólo es necesario calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$, donde $m = kV = 9k\pi(2 - \sqrt{2})$ por el Ejemplo 4. Como $z = \rho \cos \phi$, tenemos

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_Q kz \, dV = k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \\ &= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^3 \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/4} \, d\theta \, d\rho \\ &= \frac{k}{4} \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \frac{k\pi}{2} \int_0^3 \rho^3 \, d\rho = \frac{81}{8} k\pi \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{81}{9} \frac{k\pi/8}{k\pi(2 - \sqrt{2})} = \frac{9(2 + \sqrt{2})}{16} \approx 1,92$$

y el centro de masas es aproximadamente $(0, 0, 1,92)$. □

Ejercicios de la Sección 13.7

En los Ejercicios 1-6, evaluar la integral triple.

- $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r \cos \theta \, dr \, d\theta \, dz$
- $\int_0^{\pi/4} \int_0^2 \int_0^{2-r} rz \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos^2 \theta} \int_0^{4-r^2} r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^2 e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} \rho^2 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

En los Ejercicios 7 y 8, usar integración simbólica para calcular la integral triple.

- $\int_0^4 \int_0^z \int_0^{\pi/2} re^r \, d\theta \, dr \, dz$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} (2 \cos \phi) \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

En los Ejercicios 9-12, dibujar un esbozo de la región sólida cuyo volumen viene dado por la integral y evaluar la integral.

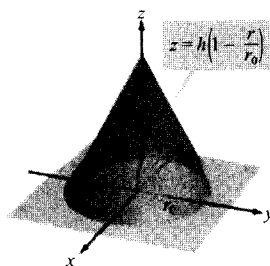
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{e^{-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{3-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^5 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

En los Ejercicios 13-16, pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas. Evaluar la que resulte más sencilla.

- $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$
- $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x \, dz \, dy \, dx$

$$16. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$$

En los Ejercicios 17-22, usar coordenadas cilíndricas para calcular la característica especificada del cono de la figura.



- Calcular el volumen del cono.
- Hallar el centroide del cono.
- Centro de masas** Hallar el centro de masas del cono si su densidad en todo punto es proporcional a la distancia del punto al eje del cono. Usar integración simbólica para calcular la integral triple.
- Centro de masas** Hallar el centro de masas del cono si su densidad en todo punto es proporcional a la distancia del punto a la base del cono. Usar integración simbólica para calcular la integral triple.
- Momento de inercia** Supuesto el cono de densidad uniforme, probar que su momento de inercia respecto del eje z es

$$I_z = \frac{3}{10} mr_0^2$$
- Momento de inercia** Suponiendo que la densidad del cono es

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$$
 hallar su momento de inercia respecto del eje z .

Momento de inercia En los Ejercicios 23 y 24, usar coordenadas cilíndricas para verificar la fórmula para el momento de inercia del sólido de densidad uniforme.

- Capa cilíndrica: $I_z = \frac{1}{2} m(a^2 + b^2)$
 $0 < a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h$
- Cilindro circular recto: $I_z = \frac{3}{2} ma^2$
 $r = 2a \sin \theta, 0 \leq z \leq h$
 Usar integración simbólica para calcular la integral triple.

Volumen En los Ejercicios 25-28, usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.

25. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$y \text{ a } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

26. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

27. Sólido acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $r = a \cos \theta$.

28. Sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y por encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Volumen En los Ejercicios 29 y 30, usar coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.

29. El toro dado por $\rho = 4 \sin \phi$. (Usar cálculo simbólico para hallar la integral triple.)

30. El sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$, e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Masa En los Ejercicios 31 y 32, usar coordenadas esféricas para hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con la densidad que se especifica.

31. La densidad en todo punto es proporcional a su distancia al origen.

32. La densidad en todo punto es proporcional a su distancia al eje z .

Centro de masas En los Ejercicios 33 y 34, usar coordenadas esféricas para localizar el centro de masas del sólido de densidad uniforme.

33. Hemisferio sólido de radio r .

34. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R , con $r < R$.

Momento de inercia En los Ejercicios 35 y 36, usar coordenadas esféricas para calcular el momento de inercia, respecto del eje z , del sólido de densidad uniforme.

35. Sólido acotado por el hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$, y el cono $\phi = \pi/4$.

36. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R , con $r < R$.

37. **Para pensar** Describir la superficie cuya ecuación es coordenada = constante para cada una de las coordenadas a) cilíndricas, b) esféricas.

38. **Para pensar** Al calcular una integral triple con límites de integración constantes en coordenadas cilíndricas, ¿sobre qué parte del sólido se está integrando? ¿Y en coordenadas esféricas?

39. Calcular el «volumen» de la «esfera de cuatro dimensiones»

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

calculando

$$16 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dw dz dy dx$$

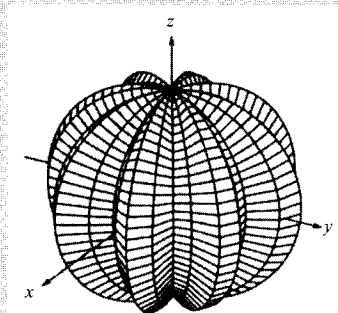
40. Probar que el volumen de un bloque esférico puede ser aproximado por

$$\Delta V \approx \rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

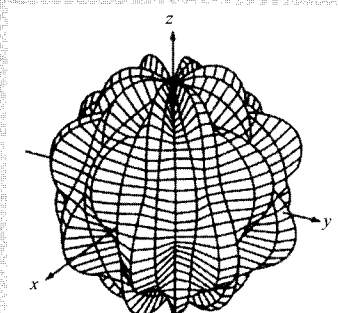
Esferas deformadas En los apartados a) y b), calcular el volumen de las esferas deformadas de las figuras adjuntas. Estos sólidos se utilizan como modelos de tumores.

a) $\rho = 1 + 0,2 \sin 8\theta \sin \phi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$



Generado por Maple

b) $\rho = 1 + 0,2 \sin 8\theta \sin 4\phi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$



Generado por Maple

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase la página 1208 o el artículo «Heat Therapy for Tumors» de Leah Edelstine-Keshet en *The UMAP Journal*, número del verano de 1991.

- CONTENIDO ■
 Jacobianos ■
 Cambio de variables en integrales dobles ■



13.8

Cambio de variables: jacobianos

Jacobianos

En una integral simple

$$\int_a^b f(x) dx$$

podemos cambiar de variable haciendo $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u) du$, y obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el cambio de variable introduce un factor adicional $g'(u)$ en el integrando. Lo mismo sucede en el caso de las integrales dobles

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_S \int f(g(u, v), h(u, v)) \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)}_{\text{Jacobiano}} du dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ introduce un factor que se llama el **jacobiano** de x, y respecto de u, v . Al definir el jacobiano conviene utilizar la siguiente notación en términos de determinantes.

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, el jacobiano de x, y respecto de u, v , que se denota por el símbolo $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

EJEMPLO 1 El jacobiano de la conversión rectangular-polar

Hallar el jacobiano del cambio de variables

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \sin \theta$$



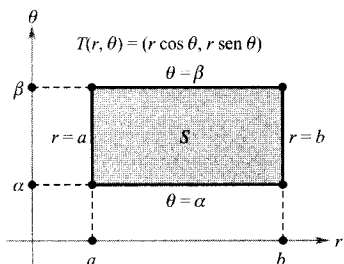
CARL GUSTAV JACOBI (1804-1851)

El jacobiano recibe su nombre en recuerdo del matemático alemán Carl Gustav Jacobson, conocido por sus contribuciones en muchas áreas de la Matemática. Su interés por la integración arrancó de su interés por calcular el perímetro de una elipse.

Solución: De la definición se sigue que el jacobiano es en esta ocasión

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ &= r \end{aligned}$$

□



El Ejemplo 1 sugiere que el cambio de variables de rectangulares a polares en una integral doble se puede escribir como

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta, \quad r > 0 \\ &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \end{aligned}$$

siendo S la región que corresponde en el plano rθ a la región R del plano xy (Figura 13.70). Esta fórmula es similar a la de la página 1233.

En general, un cambio de variables viene dado por una **transformación** biyectiva T de una región S del plano uv en una región R del plano xy, de la forma

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S. Nótese que el punto (u, v) está en S y el punto (x, y) en R. En la mayoría de los casos, se busca una transformación tal que la región S sea más simple que la región R.

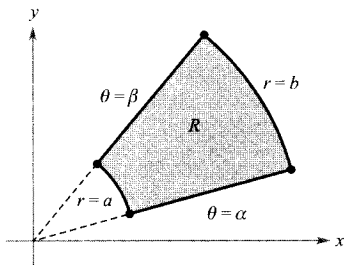


FIGURA 13.70

S es la región del plano rθ que corresponde a la región R del plano xy.

EJEMPLO 2 Un cambio de variables que simplifica la región

Sea R la región de la Figura 13.71, limitada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4, \quad y \quad x + y = 1$$

Hallar una transformación T de una región S en T tal que S sea un rectángulo con lados paralelos a los ejes u, v.

Solución: Para empezar, hacemos $u = x + y, v = x - 2y$. Resolviendo ese sistema se obtiene $T(u, v) = (x, y)$, donde

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

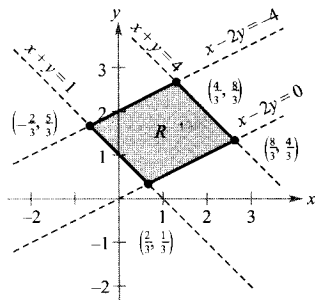


FIGURA 13.71

La región R en el plano xy.

Los cuatro contornos de R en el plano xy dan lugar a las siguientes cotas para S en el plano uv.

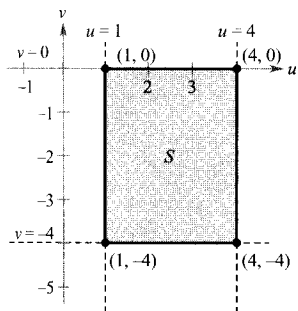


FIGURA 13.72
La región S en el plano uv .

Cotas en el plano xy

$$x + y = 1$$



$$u = 1$$

$$x + y = 4$$



$$u = 4$$

$$x - 2y = 0$$



$$v = 0$$

$$x - 2y = -4$$



$$v = -4$$

Cotas en el plano uv

La región S se muestra en la Figura 13.72. Nótese que la transformación T lleva los vértices de S a los vértices de R . Así,

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= \left(\frac{1}{3}[2(1) + 0], \frac{1}{3}[1 - 0] \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(4, 0) &= \left(\frac{1}{3}[2(4) + 0], \frac{1}{3}[4 - 0] \right) \\ &= \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(4, -4) &= \left(\frac{1}{3}[2(4) - 4], \frac{1}{3}[4 - (-4)] \right) \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1, -4) &= \left(\frac{1}{3}[2(1) - 4], \frac{1}{3}[1 - (-4)] \right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

□

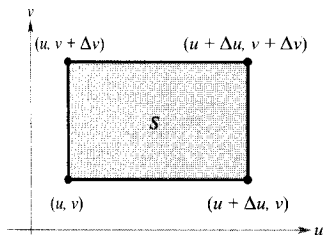


FIGURA 13.73
Área de $S = \Delta u \Delta v$
 $\Delta u > 0, \Delta v > 0$.

Cambio de variables en integrales dobles

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Sean R y S regiones en los planos xy y uv , relacionadas por las ecuaciones $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, tales que cada punto de R es imagen de un único punto de S . Si f es continua en R , g y h tienen derivadas parciales continuas en S , y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ es no nula en S , entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dx \, dy = \int_S \int f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

Demostración: Consideremos el caso en que R es el rectángulo del plano uv que muestra la Figura 13.73, con vértices (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$, y

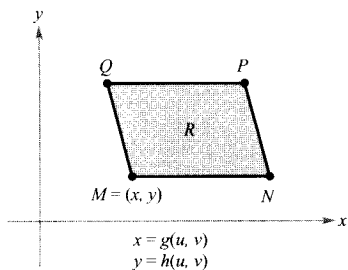


FIGURA 13.74

Los vértices en el plano xy son

$$M(g(u, v), h(u, v)),$$

$$N(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v)),$$

$$P(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v)),$$

$$\text{y } Q(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)).$$

($u, v + \Delta v$). Las imágenes de esos vértices en el plano xy pueden verse en la Figura 13.74. Si Δu y Δv son pequeños, la continuidad de g y h implica que R es aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{MQ} . Así pues, el área de R es

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\|$$

Además, si son muy pequeños Δu y Δv , las derivadas parciales de g y h con respecto a u pueden aproximarse por

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u}$$

y

$$h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)]\mathbf{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)]\mathbf{j} \\ &\approx [g_u(u, v)\Delta u]\mathbf{i} + [h_u(u, v)\Delta u]\mathbf{j} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\mathbf{j} \end{aligned}$$

Análogamente, podemos aproximar \overrightarrow{MQ} por $\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\mathbf{j}$, luego

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ} \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \mathbf{k}$$

De ahí se sigue que, en notación de jacobianos,

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

Como la aproximación mejora cuando Δu y Δv tienden a cero, el caso límite se puede escribir como

$$dA \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad \square$$

Los dos ejemplos siguientes ponen de manifiesto cómo un cambio de variables puede simplificar el proceso de integración. La simplificación puede producirse en la región R o en el integrando $f(x, y)$, o en ambos a la vez.

EJEMPLO 3 Un cambio de variables que simplifica la región

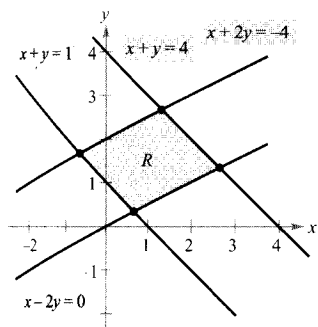


FIGURA 13.75

Sea R la región acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4, \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

(Figura 13.75). Calcular la integral doble

$$\iint_R 3xy \, dA$$

Solución: Según el Ejemplo 2, podemos usar el cambio de variables

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x e y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{3}$$

así que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, del Teorema 13.5 se deduce que

$$\begin{aligned} \iint_R 3xy \, dA &= \int_S \int 3 \left[\frac{1}{3}(2u + v) \frac{1}{3}(u - v) \right] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dv \, du \\ &= \int_1^4 \int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2 - uv - v^2) \, dv \, du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right]_{-4}^0 \, du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \left(8u^2 + 8u - \frac{64}{3} \right) \, du \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u \right]_1^4 \\ &= \frac{164}{9} \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4 Un cambio de variables que simplifica el integrando

Sea R la región cuadrada de vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, y $(1, 0)$. Calcular la integral

$$\iint_R (x + y)^2 \sin^2(x - y) \, dA$$

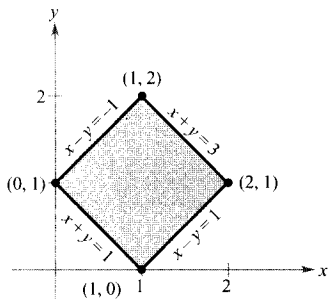


FIGURA 13.76
La región R en el plano xy .

Solución: Los lados de R están situados en las rectas $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$, y $x - y = 3$ (Figura 13.76). Haciendo $u = x + y$, $v = x - y$, las cotas para la región S en el plano uv son

$$1 \leq u \leq 3 \quad \text{y} \quad -1 \leq v \leq 1$$

tal como muestra la Figura 13.77. Despejando x e y en términos de u y v , resulta

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x e y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

luego el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Del Teorema 13.5 deducimos que

$$\begin{aligned} \int_R \int (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_1^3 u^2 \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{1}{2}\right) \, du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\operatorname{sen}^2 v) \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^3 \, dv \\ &= \frac{13}{6} \int_{-1}^1 \operatorname{sen}^2 v \, dv \\ &= \frac{13}{6} \int_{-1}^1 (1 - \cos 2v) \, dv \\ &= \frac{13}{6} \left[v - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2v \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{13}{6} \left[2 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (-2) \right] \\ &= \frac{13}{6} (2 - \operatorname{sen} 2) \\ &\approx 2,363 \end{aligned}$$

□

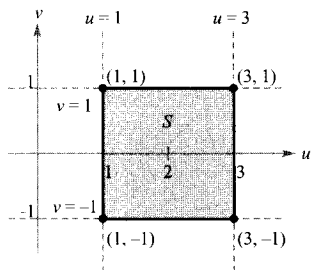


FIGURA 13.77
La región S en el plano uv .

ADVERTENCIA En todos los ejemplos de cambio de variables de esta sección, la región S es un rectángulo con lados paralelos a los ejes u, v . Ocasionalmente, un cambio de variables puede ser útil en otros tipos de regiones. Por ejemplo, el cambio $T(u, v) = (x, \frac{1}{2}y)$ transforma la región circular $u^2 + v^2 = 1$ en la región elíptica $x^2 + (y^2/4) = 1$.

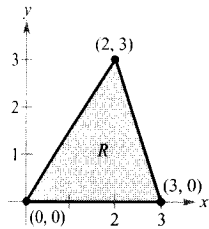
Ejercicios de la Sección 13.8

En los Ejercicios 1-8, calcular el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables propuesto.

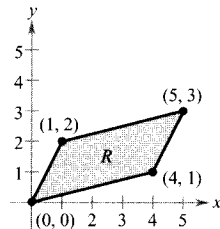
- $x = -\frac{1}{2}(u - v), y = \frac{1}{2}(u + v)$
- $x = au + bv, y = cu + dv$
- $x = u - v^2, y = u + v$
- $x = u - uv, y = uv$
- $x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$
- $x = u + a, y = v + a$
- $x = e^u \sin v, y = e^u \cos v$
- $x = \frac{u}{v}, y = u + v$

En los Ejercicios 9 y 10, dibujar un esbozo de la imagen S , en el plano uv , de la región R del plano xy , usando las transformaciones dadas.

9. $x = 3u + 2v$
 $y = 3v$

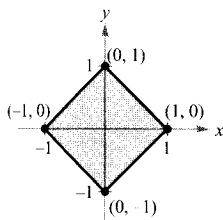


10. $x = 4u + v$
 $y = u + 2v$

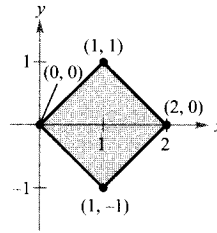


En los Ejercicios 11-16, usar el cambio de variables propuesto para calcular la integral doble.

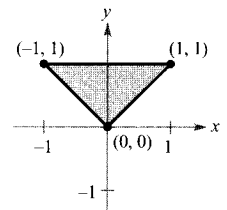
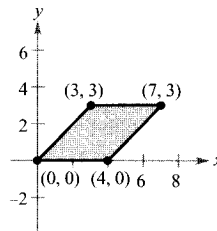
11. $\int_R \int 4(x^2 + y^2) dx dy$
 $x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$



12. $\int_R \int 48xy dx dy$
 $x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$



13. $\int_R \int y(x - y) dx dy$ 14. $\int_R \int 4(x + y)e^{x-y} dy dx$
 $x = u + v, y = u$ $x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$



15. $\int_R \int e^{-xy/2} dy dx$
 $x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}$

R : región del primer cuadrante comprendida entre las gráficas de $y = \frac{1}{4}x, y = 2x, y = \frac{1}{x}, y = \frac{4}{x}$

16. $\int_R \int y \sin xy dy dx$
 $x = \frac{u}{v}, y = v$

R : región comprendida entre las gráficas de $xy = 1, xy = 4, y = 1, y = 4$

En los Ejercicios 17-22, usar un cambio de variables para calcular el volumen de la región sólida que está bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R .

17. $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$

R : región acotada por el cuadrado de vértices $(4, 0), (6, 2), (4, 4)$ y $(2, 2)$.

18. $f(x, y) = (x + y^2)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)$

R : región acotada por el cuadrado de vértices $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, (π, π) , $(\pi/2, \pi/2)$

19. $f(x, y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$

R : región acotada por el paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(4, -1)$

20. $f(x, y) = (3x + 2y)^2 \sqrt{2y - x}$

R : región acotada por el paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 2)$

21. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

R : región acotada por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, donde $a > 0$

22. $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2y^2}$

R : región acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$. (Ayuda: Hacer $x = u$, $y = v/u$.)

23. Consideremos la región R del plano xy acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las transformaciones $x = au$, $y = bv$.

- Dibujar la región R y su imagen S bajo esa transformación.
- Hallar $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.
- Calcular el área de la elipse.

24. Usar el resultado del Ejercicio 23 para calcular el volumen de cada sólido abovedado, acotado por arriba por la superficie $z = f(x, y)$ y por abajo por la región elíptica R . (Ayuda: Después de efectuar el cambio de variables indicado por los resultados del Ejercicio 23, hacer un segundo cambio de variables a coordenadas polares).

a) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, $R: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

b) $f(x, y) = A \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$, $R: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

En los Ejercicios 25-28, hallar el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para el cambio de variables indicado. Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$, el jacobiano de x, y, z respecto de u, v, w se define como

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

25. $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$, $z = uvw$

26. $x = 4u - v$, $y = 4v - w$, $z = u + w$

27. **Coordenadas esféricas**

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

28. **Coordenadas cilíndricas**

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z$$

Ejercicios de repaso del Capítulo 13

En los Ejercicios 1 y 2, calcular la integral.

1. $\int_1^{x^2} x \ln y \, dy$ 2. $\int_y^{2y} (x^2 + y^2) \, dx$

En los Ejercicios 3-12, evaluar la integral múltiple, cambiando de coordenadas cuando sea conveniente.

3. $\int_0^1 \int_0^{1+x} (3x + 2y) \, dy \, dx$ 4. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + 2y) \, dy \, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 4x \, dy \, dx$ 6. $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} \, dx \, dy$

7. $\int_0^h \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$

8. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$

9. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^9 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

10. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{(x^2+y^2)/2} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$

11. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$

12. $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$

En los Ejercicios 13-16, usar integración simbólica en una calculadora para calcular el valor de la integral múltiple.

$$13. \int_{-2}^4 \int_{y^2/4}^{(4+y)/2} (x-y) \, dx \, dy$$

$$14. \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (8x-2y^2) \, dx \, dy$$

$$15. \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2) \, dz \, dy \, dx$$

$$16. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dy \, dx$$

Área En los Ejercicios 17-24, escribir los límites para la integral doble

$$\iint_R f(x, y) \, dA$$

en los dos órdenes de integración. Calcular el área de R tomando $f(x, y) = 1$ e integrando.

17. Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$.
18. Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 2)$.
19. El área mayor entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 25$ y $x = 3$.
20. Región acotada por las gráficas de $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.
21. Región encerrada por la gráfica de $y^2 = x^2 - x^4$.
22. Región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$.
23. Región comprendida entre las gráficas de $x = y + 3$ y $x = y^2 + 1$.
24. Región acotada por las gráficas de $x = -y$ y $x = 2y - y^2$.

Para pensar En los Ejercicios 25 y 26, dar un argumento geométrico para justificar la igualdad propuesta. Verificar la igualdad analíticamente.

$$25. \int_0^1 \int_{2y}^{2\sqrt{2-y^2}} (x+y) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{x/2} (x+y) \, dy \, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}/2} (x+y) \, dy \, dx$$

$$26. \int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} e^{x+y} \, dx \, dy = \int_0^3 \int_0^{2x/3} e^{x+y} \, dy \, dx + \int_3^5 \int_0^{5-x} e^{x+y} \, dy \, dx$$

Volumen En los Ejercicios 27-32, usar una integral múltiple y un sistema conveniente de coordenadas para calcular el volumen del sólido.

27. Sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 - y + 4$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$.
28. Sólido comprendido entre las gráficas de $z = x + y$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 3$ e $y = x$.
29. Sólido acotado por las gráficas de $z = 0$ y $z = h$, exterior al cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

e interior al paraboloido

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

30. El sólido que queda tras perforar un orificio de radio b por el centro de una esfera de radio R ($b < R$).
31. El sólido interior a las gráficas de $r = 2 \cos \theta$ y $r^2 + z^2 = 4$.
32. El sólido interior a las gráficas de $r^2 + z = 16$ y $r = 2 \sin \theta$.

Para pensar En los Ejercicios 33 y 34, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región. (Tomar la decisión a la vista de un esbozo del sólido, *sin* efectuar cálculos.)

$$33. f(x, y) = x + y$$

R : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$

a) $\frac{9}{2}$ b) 5 c) 13 d) 100 e) -100

$$34. f(x, y) = 10x^2y^2$$

R : círculo acotado por $x^2 + y^2 = 1$

a) π b) -15 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) 15

Probabilidad En los Ejercicios 35 y 36, hallar k de modo tal que la función sea una función densidad conjunta y hallar la probabilidad requerida, donde

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

$$35. f(x, y) = \begin{cases} kxye^{-(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$P(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$

$$36. f(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$P(0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.25)$

37. Consideremos la región R acotada en el plano xy por la gráfica de la ecuación

$$(x^2 + y^2) = 9(x^2 - y^2)$$

- a) Pasar la ecuación a coordenadas polares y representarla con ayuda de una calculadora.
 b) Usar una integral doble para calcular el área de la región R .
 c) Usar integración simbólica para determinar el volumen del sólido sobre la región R y bajo el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
38. Combinar la suma de dos integrales dobles en una sola integral doble cambiando a coordenadas polares. Evaluar la integral doble resultante.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy \, dy \, dx + \int_{8/\sqrt{13}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy \, dy \, dx$$

39. *Masa y centro de masas* En los Ejercicios 39 y 40, hallar la masa y el centro de masas de la lámina, de densidad dada, acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar integración simbólica para evaluar las integrales múltiples.

39. $y = 2x$, $y = 2x^3$, primer cuadrante

a) $\rho = kxy$ b) $\rho = k(x^2 + y^2)$

40. $y = \frac{h}{2} \left(2 - \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right)$, $\rho = k$, primer cuadrante

Área de superficies En los Ejercicios 41 y 42, calcular el área de la superficie de la gráfica de la función $f(x, y)$ sobre la región R .

41. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

$R: \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$

42. $f(x, y) = 16 - x - y^2$

$R: \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$

Usar integración simbólica para calcular la integral.

43. *Área de superficies* Hallar el área de la superficie del cilindro $f(x, y) = 9 - y^2$ que está sobre el triángulo acotado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$, $y = 3$.

44. *Área de superficies* El techo de un teatro al aire libre en un parque temático admite el modelo

$$f(x, y) = 25 \left[1 + e^{-(x^2+y^2)/1.000} \cos^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{1.000} \right) \right]$$

siendo la planta un semicírculo acotado por las gráficas de $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ e $y = 0$.

- a) Representar la superficie en una calculadora.
 b) Usar integración simbólica para aproximar el número de pies cuadrados de techo requeridos para cubrir el teatro.

Centro de masas En los Ejercicios 45-48, localizar el centro de masas del sólido de densidad uniforme acotado por las gráficas de las ecuaciones.

45. El sólido interior al hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$ y exterior al cono $\phi = \pi/4$.
 46. La cuña $x^2 + y^2 = a^2$, $z = cy$ ($c > 0$), $y \geq 0$, $z \geq 0$.
 47. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, primer octante.
 48. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ (el sólido más grande).

Momento de inercia En los Ejercicios 49 y 50, hallar el momento de inercia I_z del sólido de densidad dada.

49. El sólido de densidad uniforme interior al paraboloides

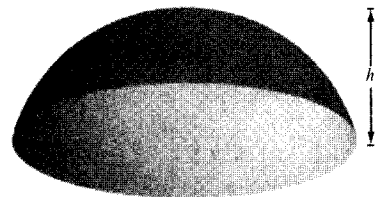
$$z = 16 - x^2 - y^2$$

y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$, $z \geq 0$

50. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, densidad proporcional a la distancia al centro.

51. *Investigación* Consideremos un casquete esférico de altura h de una esfera de radio a , con $h \leq a$, de densidad constante $\rho(x, y, z) = k$ (véase figura).

- a) Calcular el volumen del sólido.
 b) Hallar el centroide del sólido.
 c) Usar el resultado del apartado b) para localizar el centroide de un hemisferio de radio a .
 d) Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{z}$.
 e) Hallar I_z .
 f) Usar el resultado del apartado e) para hallar I_z para un hemisferio.



52. *Momento de inercia* Calcular el momento de inercia respecto del eje z del elipsoide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

donde $a > 0$.

En los Ejercicios 53 y 54, dar una interpretación geométrica de la integral triple.

$$53. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{6 \operatorname{sen} \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$54. \int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{1+r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 55-58, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

$$55. \int_a^b \int_c^d f(x)g(y) \, dy \, dx = \left[\int_a^b f(x) \, dx \right] \left[\int_c^d g(y) \, dy \right]$$

56. Si f es continua sobre R_1 y R_2 , y

$$\int_{R_1} \int dA = \int_{R_2} \int dA$$

entonces

$$\int_{R_1} \int f(x, y) \, dA = \int_{R_2} \int f(x, y) \, dA$$

$$57. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy = 4 \int_0^1 \int_0^1 \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$58. \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy < \frac{\pi}{4}$$

Capítulo 14

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

The Eight Fold Way de Helaman Ferguson, que domina el Mathematical Science Research Institute de Berkeley, fue creado utilizando un instrumento, denominado SP-2, con seis cables dotados de sensores que permitían a un ordenador calcular continuamente la posición (x, y, z) y la orientación de su punta.

Escultura matemática

El que la Matemática sea contemplada como ciencia o como arte depende de la perspectiva adoptada. Un escultor y matemático, Helaman Ferguson, combina ambos puntos de vista de manera peculiar. Sus esculturas, bautizadas con nombres como *Cosine Wild Sphere* o *Esker Trefoil Torus*, son implementaciones concretas de conceptos matemáticos que incorporan en su creación ideas tales como desarrollos en serie y campos vectoriales. Algunas de las imágenes básicas de sus obras son toros o toros dobles, bandas de Möbius o nudos en forma de trébol. Una de sus técnicas consiste en utilizar gráficas tridimensionales, generadas por algún programa informático, como modelos para sus esculturas. Así, puede usar las coordenadas de la pantalla del ordenador para dirigir su trabajo de escultor.

La figura de la página siguiente muestra una de las obras de Helaman Ferguson, el *Umbilic Torus NC*, cuya forma admite como modelo la superficie determinada por las ecuaciones paramétricas

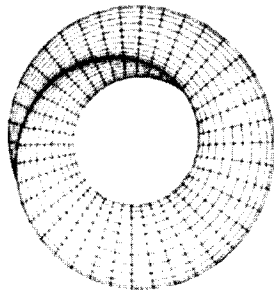
$$x = \operatorname{sen} u \left[7 + \cos \left(\frac{u}{3} - 2v \right) + 2 \cos \left(\frac{u}{3} + v \right) \right]$$

$$y = \cos u \left[7 + \cos \left(\frac{u}{3} - 2v \right) + 2 \cos \left(\frac{u}{3} + v \right) \right]$$

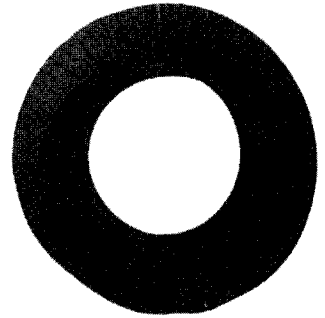
$$z = \operatorname{sen} \left(\frac{u}{3} - 2v \right) + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{u}{3} + v \right)$$

$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi$$

Helaman Ferguson es doctor en Matemáticas y trabaja en su estudio de Laurel, Maryland. Además de exhibir sus obras por todo el mundo, diseña algoritmos para maquinaria industrial y para la visualización científica.



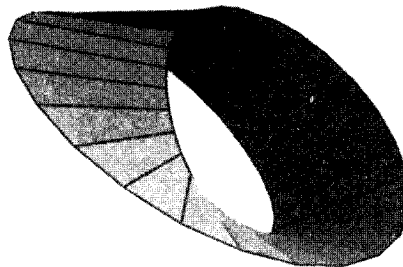
Visualización en Mathematica del *Umbilic Torus NC*



Fotografía del *Umbilic Torus NC*

CUESTIONES

1. Explicar la relación del toro umbílico de la figura con la banda de Möbius. (La fotografía al final de la página muestra una banda de Möbius.)
2. Representar el toro mediante algún programa informático adecuado para dibujar superficies en modo paramétrico.
3. Visto desde arriba, es decir desde un punto del eje z algo alejado, el toro tiene aspecto circular. ¿Es posible modificar su aspecto de manera que sea más bien elíptico? En caso afirmativo, utilizar una calculadora adecuada para representar un toro «elíptico».



Análisis vectorial

14.1 Campos de vectores

- CONTENIDO
- Campos de vectores
 - Campos vectoriales conservativos
 - Rotacional de un campo vectorial
 - Divergencia de un campo vectorial

Campos de vectores

En el Capítulo 11 estudiamos funciones vectoriales, que a *un número real* le asignan un vector, y tuvimos ocasión de comprobar su utilidad en la representación de curvas y del movimiento a lo largo de una curva. En este capítulo estudiaremos otros dos tipos de funciones con valores vectoriales: las que asignan un vector a *un punto del plano* o a *un punto del espacio*. Tales funciones se llaman **campos de vectores** (o **campos vectoriales**) y resultan muy útiles para representar diversas clases de **campos de fuerzas** y **campos de velocidades**.

DEFINICIÓN DE UN CAMPO DE VECTORES

Sean M y N funciones de dos variables x, y , definidas en una región R del plano. Se llama **campo de vectores en R** a cualquier función F definida por

$$F(x, y) = Mi + Nj \quad \text{Plano}$$

Sean M, N y P funciones de tres variables x, y, z , definidas en una región Q del espacio. Se llama **campo de vectores en Q** a cualquier función F definida por

$$F(x, y, z) = Mi + Nj + Pk \quad \text{Espacio}$$

A la vista de esta definición resulta evidente que el gradiente es un campo de vectores. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

el gradiente de f

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \end{aligned}$$

Campo de vectores en el plano

Nota. Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, basta dibujar unos cuantos vectores representativos $F(x, y)$ con puntos iniciales (x, y) para obtener una idea aproximada de la estructura del campo.

es un campo vectorial en el plano. Por lo visto en el Capítulo 11, su interpretación gráfica es una colección de vectores, cada uno de ellos apuntando en la dirección de máximo crecimiento sobre la superficie $z = f(x, y)$. Para esta función particular, la superficie es un paraboloides y el gradiente nos informa de que la dirección de máximo crecimiento sobre ella viene dada por el rayo que va del origen al punto (x, y) .

Análogamente, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Campo de vectores en el espacio

es un campo vectorial en el espacio.

Ejemplos comunes de campos vectoriales en Física son los **campos de velocidades**, los **campos gravitatorios** y los **campos de fuerza eléctrica**.

Campo de velocidades

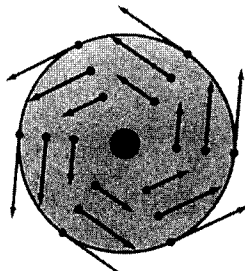


FIGURA 14.1
Rueda giratoria.

1. Un *campo de velocidades* describe el movimiento de un sistema de partículas en el plano o en el espacio. Por ejemplo, la Figura 14.1 indica el campo de vectores definido por una rueda que gira alrededor de un eje. Los vectores velocidad quedan determinados por la localización de sus puntos iniciales: cuanto más lejos del eje está el punto, mayor es su velocidad. Asimismo, el flujo de un líquido en un recipiente o las corrientes de aire en las proximidades de un móvil determinan campos de vectores (Figura 14.2).
2. Los *campos gravitatorios* se definen mediante la **ley de la gravitación de Newton**, según la cual la fuerza de atracción ejercida sobre una partícula de masa m_1 localizada en (x, y, z) por una partícula de masa m_2 situada en $(0, 0, 0)$ viene dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{u}$$

donde G es la constante de la gravitación y \mathbf{u} el vector unidad en la dirección que va del origen a (x, y, z) . En la Figura 14.3 vemos cómo el campo gravitatorio \mathbf{F} tiene las propiedades de que todo vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen y su magnitud es la misma en todos los puntos equidistantes del origen. Un campo de vectores con esas dos propiedades se llama un **campo de fuerzas central**. Asignando el vector posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

al punto (x, y, z) podemos expresar el campo gravitatorio \mathbf{F} como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) \\ &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}\end{aligned}$$



FIGURA 14.2
Campo vectorial del viento.

3. Los *campos de fuerzas eléctricas* se definen por la **ley de Coulomb**, la cual establece que la fuerza ejercida sobre una partícula de carga eléctrica q_1 situada en (x, y, z) por una partícula de carga eléctrica q_2 situada en $(0, 0, 0)$ viene dada por

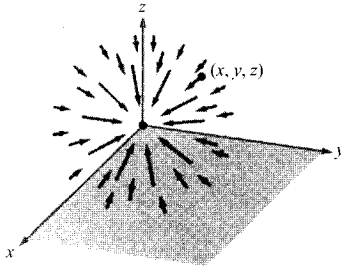
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, y c es una constante que depende de la elección de unidades para $\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2 .

Nótese que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio, a saber,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

Un campo de fuerzas de esta clase se llama un **campo cuadrático inverso**.



m_1 está situada en (x, y, z)
 m_2 está situada en $(0, 0, 0)$

FIGURA 14.3
 Campo de fuerzas gravitatorio.

DEFINICIÓN DE CAMPOS CUADRÁTICOS INVERSOS

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ el vector posición. El campo vectorial \mathbf{F} es un **campo cuadrático inverso** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

donde k es un número real y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} .

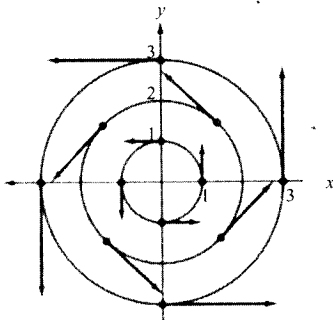
No es posible dibujar por completo un campo vectorial, ya que consta de infinitos vectores. En lugar de eso, lo que se hace es dibujar unos cuantos vectores representativos que ayuden a visualizar el campo.

EJEMPLO 1 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Solución: Podríamos optar por dibujar unos cuantos vectores en posiciones al azar, pero es mucho más esclarecedor dibujar varios vectores de la misma longitud. Esto corresponde a la búsqueda de curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, los vectores de igual longitud están en círculos centrados en el origen



Campo vectorial:
 $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

FIGURA 14.4

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\| &= c && \text{Vectores de longitud } c \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= c \\ x^2 + y^2 &= c^2 && \text{Ecuación del círculo} \end{aligned}$$

Para empezar el esbozo, elegimos un valor de c y dibujamos varios vectores sobre el círculo resultante. Por ejemplo, los siguientes vectores están sobre el círculo unidad.

<u>Punto</u>	<u>Vector</u>
(1, 0)	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
(0, 1)	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
(-1, 0)	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
(0, -1)	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

Éstos y varios otros vectores del campo se pueden ver en la Figura 14.4. Observemos que este campo vectorial es similar al de la rueda giratoria de la Figura 14.1. □

EJEMPLO 2 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Solución: Para este campo vectorial, los vectores de la misma longitud se sitúan sobre las elipses de ecuaciones

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2x)^2 + (y)^2} = c$$

lo cual implica que

$$4x^2 + y^2 = c^2$$

Para $c = 1$ dibujamos varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de longitud 1 en puntos de la elipse

$$4x^2 + y^2 = 1$$

Para $c = 2$ dibujamos varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de longitud 2 en puntos de la elipse

$$4x^2 + y^2 = 4$$

La Figura 14.5 muestra algunos de esos vectores. □

EJEMPLO 3 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

con $x^2 + y^2 \leq 16$.

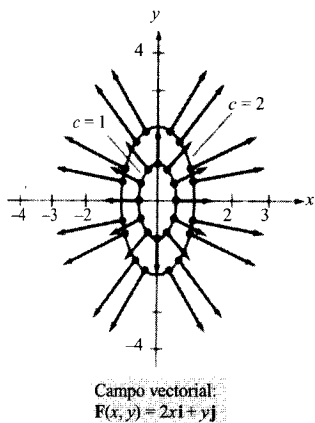


FIGURA 14.5

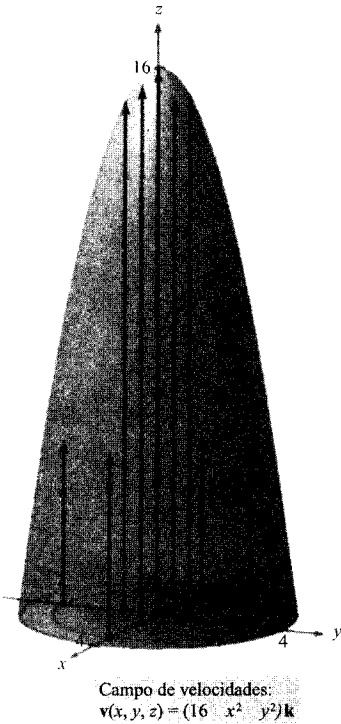


FIGURA 14.6

Solución: Podemos imaginar que \mathbf{v} describe la velocidad de las partículas de un fluido por un tubo de radio 4. Los vectores próximos al eje z son más largos que los cercanos al borde. Así, en el punto $(0, 0, 0)$ el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 0, 0) = 16\mathbf{k}$, mientras que en el punto $(0, 3, 0)$ el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 3, 0) = 7\mathbf{k}$. En la Figura 14.6 pueden verse éstos y otros vectores del campo. En ella se constata que la velocidad del fluido es mayor en la zona central del tubo que en sus bordes. \square

Campos vectoriales conservativos

En la Figura 14.5 todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Puesto que esto es una propiedad de los gradientes, cabe preguntarse si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el *gradiente* de alguna función diferenciable f . La respuesta es que ciertos campos vectoriales, a los que se denomina **conservativos**, pueden representarse como gradientes de funciones diferenciables y otros no.

DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial \mathbf{F} se dice que es **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial del campo \mathbf{F}** .

EJEMPLO 4 Campos vectoriales conservativos

- a) El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, basta tomar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Al ser

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se sigue que \mathbf{F} es conservativo.

- b) Todo campo cuadrático inverso es conservativo. En efecto, sean

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u} \quad \text{y} \quad f(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Como

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u} \end{aligned}$$

concluimos que \mathbf{F} es conservativo. \square

Como pone de manifiesto el Ejemplo 4b, muchos campos vectoriales importantes, como los campos gravitatorios, magnéticos y eléctricos, son conservativos. En gran parte, la terminología introducida en este capítulo proviene de la Física. Así, el término «conservativo» tiene su origen en la ley de conservación de la energía, según la cual la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. (La energía cinética de la partícula es la debida a su movimiento y la energía potencial a su posición en el campo de fuerzas.)

El importante teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.

TEOREMA 14.1 CRITERIO PARA CAMPOS CONSERVATIVOS EN EL PLANO

Sean M y N dos funciones con derivadas parciales continuas en el disco abierto R . El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Demostración: Para probar que la condición es necesaria para que \mathbf{F} sea conservativo, supongamos que existe una función potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$$

En tales circunstancias,

$$f_x(x, y) = M \implies f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \implies f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por la igualdad de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} , concluimos que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R . La suficiencia de la condición se demuestra en la Sección 14.4. \square

| Nota. El Teorema 14.1 exige que el dominio de \mathbf{F} sea un disco abierto. Si R es simplemente una región abierta, la condición del teorema es necesaria pero, en general, no suficiente para producir un campo de vectores conservativo.

EJEMPLO 5 Investigación de campos conservativos en el plano

a) El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ *no* es conservativo, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^2y] = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [xy] = y$$

b) El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ *sí* es conservativo, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [2x] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [y] = 0 \quad \square$$

El Teorema 14.1 enseña cuándo un campo vectorial es conservativo. Lo que no dice es cómo hallar una función potencial para \mathbf{F} . La situación es análoga a la que encontramos en la integración indefinida. En ocasiones es fácil hallar una función potencial por simple inspección. Así, en el Ejemplo 4 salta a la vista que

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

tiene la propiedad de que $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 Cálculo de una función potencial para $\mathbf{F}(x, y)$

Hallar una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

Solución: Del Teorema 14.1 se sigue que \mathbf{F} es conservativo ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} [2xy] = 2x \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - y] = 2x$$

Si f es una función cuyo gradiente es igual a $\mathbf{F}(x, y)$, entonces

$$\nabla f(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

lo cual implica que

$$f_x(x, y) = 2xy$$

y

$$f_y(x, y) = x^2 - y$$

Para reconstruir f a partir de sus derivadas parciales, integramos $f_x(x, y)$ respecto de x y $f_y(x, y)$ respecto de y .

$$f(x, y) = \int f_x(x, y) dx = \int 2xy dx = x^2y + g(y)$$

$$f(x, y) = \int f_y(x, y) dy = \int (x^2 - y) dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x)$$

Nótese que $g(y)$ es constante respecto de x y $h(x)$ es constante respecto de y . Con el fin de hallar una única expresión para $f(x, y)$, tomamos $g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + K$ y $h(x) = K$. Con ello, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + g(y) \\ &= x^2y - \frac{y^2}{2} + K \end{aligned}$$

Es fácil verificar este resultado sin más que calcular el gradiente de f y ver que coincide con la función original \mathbf{F} . \square

| Nota. La solución del Ejemplo 6 es comparable a la de una integral indefinida. Es decir, la solución representa una familia de funciones potencial, dos de las cuales difieren por una constante. Si se desea una solución única, hay que fijar alguna condición inicial que deba satisfacer la función potencial en cuestión.

Rotacional de un campo vectorial

El análogo del Teorema 14.1 en el espacio requiere introducir la noción de **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El **rotacional** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ se define como

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

Nota. Si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, diremos que \mathbf{F} es un **campo irrotacional**.

La notación de producto vectorial utilizada para el rotacional proviene de mirar el gradiente ∇f como resultado de la actuación del **operador diferencial** ∇ sobre la función f . En este contexto se puede usar la siguiente forma de determinante como ayuda para memorizar la fórmula del rotacional:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Rotacional de un campo vectorial

Calcular $\text{rot } \mathbf{F}$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2zy\mathbf{k}$$

Solución: El rotacional de \mathbf{F} viene dado por

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2zy \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2zy \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2zy \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (2z - 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Más adelante, en este mismo capítulo, asignaremos una interpretación física al rotacional de un campo vectorial. Pero por el momento nos centraremos en su aplicación para analizar, por el próximo criterio, si un campo de vectores dado en el espacio es conservativo o no. El criterio establece que para un campo vectorial cuyo dominio sea todo el espacio tridimensional (o una bola abierta), el rotacional es el vector $\mathbf{0}$ en todo punto del dominio si y sólo si \mathbf{F} es conservativo. La demostración es parecida a la del Teorema 14.1.

TEOREMA 14.2

CRITERIO PARA CAMPOS CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Supongamos que M , N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una bola abierta Q del espacio. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$$

En otras palabras, \mathbf{F} es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Según este teorema, el campo vectorial del Ejemplo 7 es conservativo, ya que $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Compruebe que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ no es conservativo, demostrando que $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2x^3yz)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

Para aquellos campos vectoriales en el espacio que superen el criterio anterior, podemos hallar una función potencial siguiendo el mismo procedimiento que en el plano (como ilustra el Ejemplo 6).

EJEMPLO 8 Cálculo de una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z)$

Hallar una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2zy\mathbf{k}$.

Solución: Por el Ejemplo 7 sabemos que el campo vectorial \mathbf{F} es conservativo. Si f es una función tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, entonces

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 2zy$$

e integrando con respecto a x , y , z por separado obtenemos

$$f(x, y, z) = \int M dx = \int 2xy dx = x^2y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N dy = \int (x^2 + z^2) dy = x^2y + z^2y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P dz = \int 2zy dz = z^2y + k(x, y)$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$ deducimos que

$$g(y, z) = z^2y + K, \quad h(x, z) = K \quad \text{y} \quad k(x, y) = x^2y + K$$

Por tanto,

$$f(x, y, z) = x^2y + z^2y + K$$

□

| Nota. Los Ejemplos 6 y 8 consisten en la *reconstrucción de una función a partir de su gradiente*. En el curso de ecuaciones diferenciales estudiará otros métodos de resolución de este tipo de problemas. Un método muy utilizado se apoya en una adecuada interacción entre «integraciones parciales» sucesivas y derivaciones parciales.

Divergencia de un campo vectorial

| Nota. La divergencia puede verse como una especie de derivada de \mathbf{F} que, para campos de velocidades, mide la tasa de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos) un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En electromagnetismo, se llama **solenoidal** a un campo de divergencia nula.

Hemos visto que el rotacional de un campo vectorial es a su vez un campo vectorial. Otra importante función definida sobre un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

DEFINICIÓN DE LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{Plano}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{Espacio}$$

Si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ se dice que \mathbf{F} es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar utilizada para la divergencia proviene de considerar a ∇ como un **operador diferencial** en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Divergencia de un campo vectorial

Hallar la divergencia en el punto $(2, 1, -1)$ del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$

Solución: La divergencia de \mathbf{F} es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} [x^3y^2z] + \frac{\partial}{\partial y} [x^2z] + \frac{\partial}{\partial z} [x^2y] = 3x^2y^2z$$

En particular, en el punto $(2, 1, -1)$,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(2, 1, -1) = 3(2^2)(1^2)(-1) = -12 \quad \square$$

La divergencia y el rotacional poseen muchas propiedades interesantes (véase Ejercicios 65-71). El Teorema 14.3 establece una de muy frecuente aplicación. En el Ejercicio 72 se pide demostrar este resultado.

TEOREMA 14.3

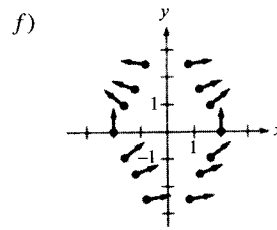
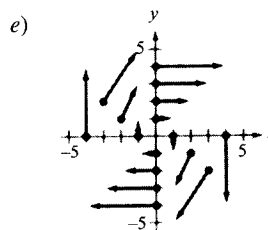
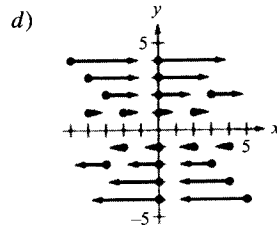
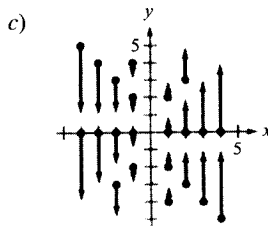
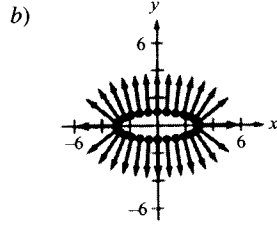
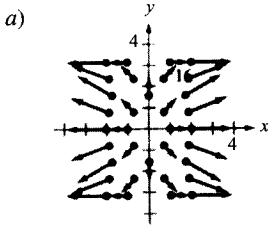
RELACIÓN ENTRE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial y M, N, P tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$$

Ejercicios de la Sección 14.1

En los Ejercicios 1-6, asociar cada campo vectorial con su gráfica.



1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, \sin y \rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2 \rangle$

En los Ejercicios 7-16, dibujar varios vectores representativos del campo vectorial.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i}$
9. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{j}$
12. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}$
13. $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
14. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los Ejercicios 17-20, representar en una calculadora varios vectores representativos del campo vectorial.

17. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{8}(2xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})$
18. $\mathbf{F}(x, y) = (2y - 3x)\mathbf{i} + (2y + 3x)\mathbf{j}$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los Ejercicios 21-26, hallar el campo vectorial gradiente de la función escalar propuesta. (Es decir, hallar el campo vectorial conservativo para esa función.)

21. $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + 10y^2$
22. $f(x, y) = \sin 3x \cos 4y$
23. $f(x, y, z) = z - ye^{xz}$
24. $f(x, y, z) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{xz}{y}$
25. $g(x, y, z) = xy \ln(x + y)$
26. $g(x, y, z) = x \arcsen yz$

En los Ejercicios 27-34, averiguar si el campo de vectores es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

27. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
28. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y^2}(y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j})$
29. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{-x^2y}(2y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
30. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2x^2\mathbf{j}$
31. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
32. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2y}{x}\mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$
33. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\cos y\mathbf{i} + \sin y\mathbf{j})$
34. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

En los Ejercicios 35-38, calcular el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} en el punto indicado.

<u>Campo vectorial</u>	<u>Punto</u>
35. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	(1, 2, 1)
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	(2, -1, 3)
37. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j}$	(0, 0, 3)
38. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	(3, 2, 0)

En los Ejercicios 39-42, representar el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} con ayuda de calculadora.

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctg \frac{x}{y}\mathbf{i} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
40. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{y-z}\mathbf{i} + \frac{xz}{x-z}\mathbf{j} + \frac{xy}{x-y}\mathbf{k}$
41. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin(x-y)\mathbf{i} + \sin(y-z)\mathbf{j} + \sin(z-x)\mathbf{k}$
42. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los Ejercicios 43-48, determinar si el campo \mathbf{F} es conservativo. En caso afirmativo, hallar una función potencial.

43. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin y \mathbf{i} - x \cos y \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 44. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(\mathbf{y}\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$
 45. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(\mathbf{y}\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$
 46. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y^2z\mathbf{i} + 2x^3yz\mathbf{j} + x^3y^2\mathbf{k}$
 47. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j} + (2z - 1)\mathbf{k}$
 48. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los Ejercicios 49 y 50, calcular $\mathbf{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

49. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$
 $\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 50. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
 $\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.

51. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 52. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los Ejercicios 53-56, calcular la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} .

53. $\mathbf{F}(x, y, z) = 6x^2\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$
 54. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j}$
 55. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 56. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2 + z^2)\mathbf{k}$

En los Ejercicios 57-60, calcular la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} en el punto indicado.

<u>Campo vectorial</u>	<u>Punto</u>
57. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	(1, 2, 1)
58. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	(2, -1, 3)
59. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j}$	(0, 0, 3)
60. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	(3, 2, 0)

En los Ejercicios 61 y 62, calcular $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$
 $\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 62. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
 $\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los Ejercicios 63 y 64, hallar $\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

63. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 64. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los Ejercicios 65-71, demostrar la propiedad para los campos vectoriales \mathbf{F} , \mathbf{G} y la función escalar f . (Se supone que las derivadas parciales requeridas son continuas.)

65. $\mathbf{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathbf{rot} \mathbf{F} + \mathbf{rot} \mathbf{G}$
 66. $\mathbf{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$
 67. $\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div} \mathbf{F} + \text{div} \mathbf{G}$
 68. $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{G})$
 69. $\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times \mathbf{F})] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$
 70. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
 71. $\text{div}(f\mathbf{F}) = f \text{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$
 72. Demostrar el Teorema 14.3.

En los Ejercicios 73-76, consideremos $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

73. Probar que $\nabla(\ln f) = \frac{\mathbf{F}}{f^2}$.
 74. Probar que $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathbf{F}}{f^3}$.
 75. Probar que $\nabla f^n = nf^{n-2}\mathbf{F}$.
 76. Se llama **laplaciano** al operador diferencial

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y **ecuación de Laplace** a la ecuación

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Las funciones que satisfacen esta ecuación se llaman funciones **armónicas**. Probar que la función $1/r$ es armónica.

77. **Campo magnético** Una sección del campo magnético terrestre puede ser representada por un campo vectorial con el centro de la Tierra situada en el origen y con el semieje y positivo apuntando en la dirección del Polo Norte. La ecuación para ese campo es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) &= M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \\ &= \frac{m}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [3xy\mathbf{i} + (2y^2 - x^2)\mathbf{j}] \end{aligned}$$

donde m es el momento magnético de la Tierra. Demostrar que este campo vectorial es conservativo.

CONTENIDO

- Curvas suaves a trozos
- Integrales de línea
- Integrales de línea de campos vectoriales
- Integrales de línea en forma diferencial



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903)

A la teoría y aplicaciones descritas en este capítulo contribuyeron numerosos matemáticos y físicos: Newton, Gauss, Laplace, Hamilton, Maxwell y otros muchos. No obstante, la descripción de estos resultados en términos del análisis vectorial se atribuye especialmente al físico matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs.

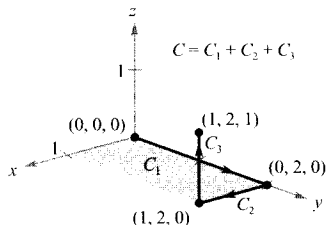


FIGURA 14.7

14.2

Integrales de línea

Curvas suaves a trozos

Una propiedad clásica del campo gravitatorio es que, bajo ciertas restricciones, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve de un punto a otro es independiente del camino que siga el objeto. Una de las restricciones es que el **camino** sea una curva suave. Recordemos que una curva plana c dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si dx/dt y dy/dt son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente nulas en (a, b) . Análogamente, una curva C en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si dx/dt , dy/dt y dz/dt son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente nulas en (a, b) . Una curva C es **suave a trozos** si se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales C es suave.

EJEMPLO 1 Una parametrización suave a trozos

Hallar una parametrización suave a trozos para la gráfica C de la Figura 14.7.

Solución: Como C consta de tres segmentos rectos, C_1 , C_2 y C_3 , podemos construir una parametrización suave para cada segmento y reunirlos después haciendo que el último valor de t en C_i coincida con el primer valor de t para C_{i+1} , como sigue:

$$C_1: x(t) = 0, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: x(t) = t - 1, \quad y(t) = 2, \quad z(t) = 0, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$C_3: x(t) = 1, \quad y(t) = 2, \quad z(t) = t - 2, \quad 2 \leq t \leq 3$$

Por tanto, C viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & 1 \leq t \leq 2 \\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Puesto que C_1 , C_2 y C_3 son suaves, C es suave a trozos. □

Recordemos que una parametrización de una curva induce sobre ésta una **orientación**. Así, en el Ejemplo 1 la curva está orientada de manera tal que la dirección positiva va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 1)$ siguiendo la curva. Intente obtener una parametrización que produzca la orientación inversa.

Integrales de línea

Hasta este momento hemos definido varias clases de integrales. En las integrales simples

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Integral sobre el intervalo } [a, b]$$

se integraba sobre un intervalo $[a, b]$. En las integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{Integral sobre una región } R$$

se integraba sobre una región R del plano. En esta sección definiremos un nuevo tipo de integral, llamada **integral de línea**,

$$\int_C f(x, y) ds \quad \text{Integral sobre una curva } C$$

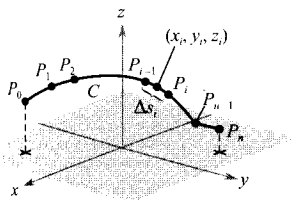


FIGURA 14.8
Partición de la curva C .

en la que se integra sobre una curva C suave a trozos. (La terminología es desafortunada en ocasiones. Sería más lógico llamarlas «integrales de curva». De hecho se utiliza con frecuencia la denominación de **integrales curvilíneas**.)

Con el propósito de introducir el concepto de integral de línea, consideremos la masa de un cable de longitud finita, descrito por una curva C en el espacio. Supongamos que la densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto (x, y, z) viene dada por $f(x, y, z)$. Dividimos la curva C mediante los puntos P_0, P_1, \dots, P_n , en n subarcos, como muestra la Figura 14.8. Sea Δs_i la longitud del i -ésimo subarco. A continuación, elegimos en cada subarco un punto (x_i, y_i, z_i) . Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede aproximarse por la suma

$$\text{Masa del cable} \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

Si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más grande y hacemos tender $\|\Delta\|$ a cero, parece razonable esperar que el límite de esta suma tienda a la longitud del cable. Eso sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA

Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, la **integral de línea de f sobre C** se define como

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad \text{Plano}$$

o por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad \text{Espacio}$$

siempre que el límite exista.

Al igual que ocurría con las integrales del Capítulo 13, la evaluación de una integral de línea es conveniente efectuarla pasando a una integral definida. Se puede demostrar que si f es *continua* el límite anterior existe y tiene el mismo valor para todas las parametrizaciones suaves de C .

Para calcular una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, utilizamos

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Una fórmula similar es válida para una curva en el espacio, como indica el próximo teorema.

TEOREMA 14.4 CÁLCULO DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA

Sea f continua en una región que contiene a la curva suave C . Si C viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, con $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Si C viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, con $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Nótese que si $f(x, y, z) = 1$, la integral de línea da la longitud de arco de la curva C , tal como fue definida en la Sección 11.5, a saber

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \text{longitud de arco de la curva } C$$

| Nota. El valor de la integral de línea del Ejemplo 2 no depende de la parametrización elegida para el segmento recto C . Cualquier parametrización produciría el mismo valor. Para convencerse de ello, ensaye con otras parametrizaciones, por ejemplo $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 1 + 2t$, $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$ o $x = -t$, $y = -2t$, $z = -t$, $-1 \leq t \leq 0$.

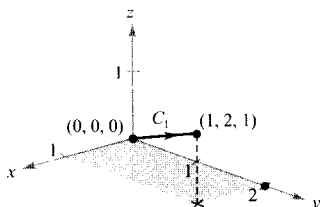


FIGURA 14.9

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral de línea

Evaluar

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds$$

donde C es el segmento de recta que se muestra en la Figura 14.9.

Solución: Comenzamos escribiendo la recta en forma paramétrica:

$$x = t, \quad y = 2t \quad y \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Por tanto, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2$ y $z'(t) = 1$, lo cual implica que

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Así pues, la integral de línea adopta la forma

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y + 3z) ds &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{6} dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt \\ &= \sqrt{6} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

□

Supongamos que C es un camino compuesto por varias curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n . Se puede demostrar que, si f es continua sobre C ,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

En el Ejemplo 3 aprovecharemos esta propiedad.

EJEMPLO 3 Cálculo de una integral de línea sobre un camino

Calcular $\int_C x dx$, donde C es la curva suave a trozos de la Figura 14.10.

Solución: Para empezar, integraremos sobre el tramo recto, hacia arriba, tomando como parametrización de la recta $y = x$ la siguiente:

$$C_1: x = t, y = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

En esta curva, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, lo cual implica que $x'(t) = 1$ y que $y'(t) = 1$. Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

de modo que

$$\int_{C_1} x ds = \int_0^1 t\sqrt{2} dt = \left. \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A continuación, integramos hacia abajo sobre la parábola $y = x^2$, tomando la parametrización

$$C_2: x = 1 - t, y = (1 - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para esta curva, $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$, luego $x'(t) = -1$ e $y'(t) = -2(1 - t)$. Así pues,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

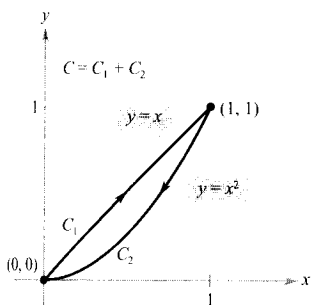


FIGURA 14.10

y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_{C_2} x \, ds &= \int_0^1 (1-t)\sqrt{1+4(1-t)^2} \, dt \\ &= -\frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} [1+4(1-t)^2]^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \approx 1,56 \quad \square$$

Para parametrizaciones dadas por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, es útil recordar la expresión de ds así:

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$$

En el Ejemplo 4 recurrimos a esta expresión.

EJEMPLO 4 Cálculo de una integral de línea

Calcular $\int_C (x+2) \, ds$, donde C denota la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

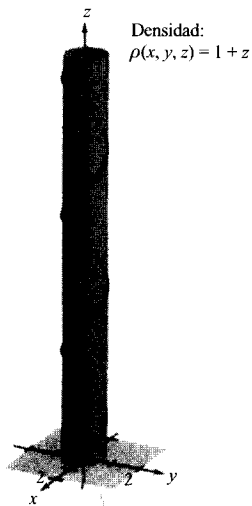
Solución: Puesto que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1+4t+t^2}$$

es fácil ver que

$$\begin{aligned}\int_C (x+2) \, ds &= \int_0^2 (t+2)\sqrt{1+4t+t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 2(t+2)(1+4t+t^2)^{1/2} \, dt \\ &= \frac{1}{3} \left[(1+4t+t^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} (13\sqrt{13} - 1) \\ &\approx 15,29 \quad \square\end{aligned}$$

El próximo ejemplo enseña cómo utilizar una integral de línea para hallar la masa de un muelle de densidad variable. En concreto, la Figura 14.11 indica que la densidad aumenta conforme la espiral asciende por el eje z .



Densidad:
 $\rho(x, y, z) = 1 + z$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k})$$

FIGURA 14.11

La masa del muelle es aproximadamente 144,47.

EJEMPLO 5 Masa de un muelle

Calcular la masa de un muelle que tiene la forma de la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

si el material de que está hecho tiene una densidad $\rho(x, y, z) = 1 + z$ (Figura 14.11).

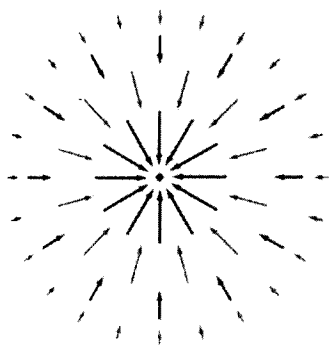
Solución: Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

la masa del muelle es

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_C (1 + z) \, ds = \int_0^{6\pi} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &\approx 144,47 \end{aligned}$$

□



Campo de fuerzas cuadrático inverso \mathbf{F}

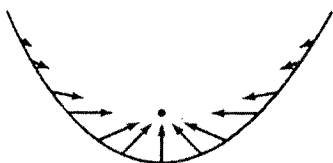


FIGURA 14.12

Vectores a lo largo de un camino parabólico en el campo de fuerzas \mathbf{F} .

Integrales de línea de campos vectoriales

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea consiste en hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la Figura 14.12 muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. La magnitud de la fuerza a lo largo de un camino circular en torno al centro es constante, mientras que a lo largo de un camino parabólico esa magnitud varía de un punto a otro.

Para ver cómo una integral de línea sirve para calcular el trabajo realizado en un campo de fuerzas \mathbf{F} , consideremos un objeto que se mueve por una curva C (Figura 14.13). Para hallar el trabajo efectuado por la fuerza basta tener en cuenta la parte de la fuerza que actúa en la misma dirección en que se mueve el objeto (o en la opuesta). Eso significa que en cada punto de C hemos de considerar la proyección $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ del vector fuerza \mathbf{F} sobre el vector tangente unitario \mathbf{T} . Sobre un pequeño subarco de longitud Δs_i el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia}) \\ &\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)] \Delta s_i \end{aligned}$$

donde (x_i, y_i, z_i) es un punto de ese subarco. Por tanto, el trabajo total viene dado por la integral

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds$$

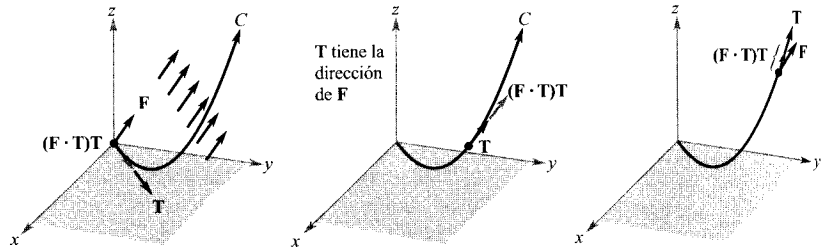


FIGURA 14.13

En cada punto de C , la fuerza en la dirección del movimiento es $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}$.

Esta integral de línea aparece en otros contextos y está en la base de la siguiente definición de **integral de línea de un campo vectorial**. En la definición, nótese que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$. La **integral de línea de \mathbf{F} sobre C** se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por una fuerza

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \quad \text{Campo de fuerzas } \mathbf{F}$$

sobre una partícula que se mueve por la hélice de ecuación

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad \text{Curva } C \text{ en el espacio}$$

desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(-1, 0, 3\pi)$, como muestra la Figura 14.14.

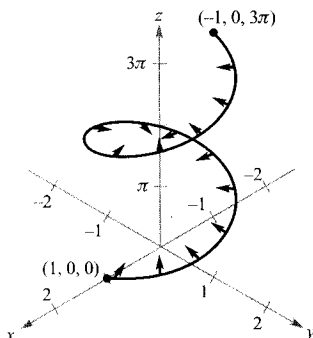


FIGURA 14.14

Solución: Al ser

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

se sigue que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ y $z(t) = t$. Así pues, el campo de fuerzas puede escribirse

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

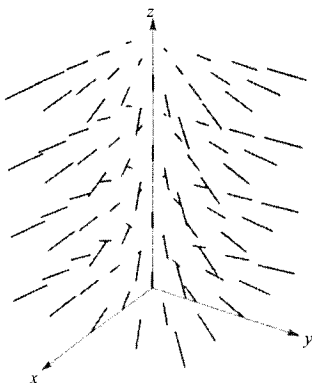
Para calcular el trabajo realizado por el campo sobre la partícula cuando ésta se mueve a lo largo de C , usamos

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

de modo que

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \right) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t \cos t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{4} \right) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt \\ &= \frac{1}{4} t \Big|_0^{3\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

□



Creada con Mathematica

FIGURA 14.15

| Nota. En el Ejemplo 6 las componentes x y del campo de fuerzas no contribuyen en nada al trabajo total. Eso se debe a que *en este ejemplo particular* la componente z del campo de fuerzas es la única parte de la fuerza que actúa en la misma dirección (o en la opuesta) del movimiento de la partícula (véase Figura 14.15).



La gráfica, generada por ordenador, del campo de fuerzas del Ejemplo 6 que muestra la Figura 14.15, indica que todos los vectores del campo de fuerzas apuntan hacia el eje z .

La orientación de la curva C es importante en las integrales de línea de funciones vectoriales. Si se invierte la orientación, el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ cambia a $-\mathbf{T}(t)$, de modo que resulta ser

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

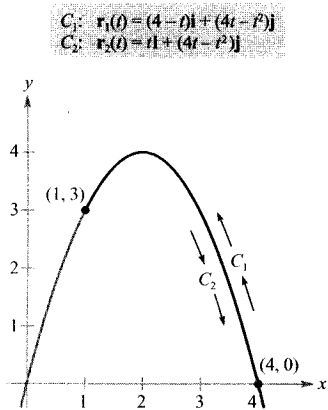


FIGURA 14.16

EJEMPLO 7 Orientación y parametrización de una curva

Tomando $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cada una de las curvas parabólicas siguientes (véase Figura 14.16).

- a) $C_1: \mathbf{r}_1(t) = (4-t)\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
 b) $C_2: \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 4$

Solución:

- a) Como $\mathbf{r}'_1(t) = -\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 [(4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_0^3 (-4t + t^2 + 64 - 64t + 20t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t \right]_0^3 \\ &= \frac{69}{2} \end{aligned}$$

- b) Como $\mathbf{r}'_2(t) = \mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^4 [(4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_1^4 (4t-t^2+4t^2-2t^3) dt \\ &= \int_1^4 (-2t^3+3t^2+4t) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + t^3 + 2t^2 \right]_1^4 \\ &= -\frac{69}{2} \end{aligned}$$

| Nota. El valor de la integral de línea del Ejemplo 7 depende de la orientación, pero no de la parametrización de C . En efecto, sea C_3 la curva definida por

$$\mathbf{r}_3 = (t+2)\mathbf{i} + (4-t^2)\mathbf{j}$$

con $-1 \leq t \leq 2$. Su gráfica es el mismo segmento parabólico que se muestra en la Figura 14.16. ¿Coincide el valor de la integral sobre C_3 con los calculados sobre C_1 y C_2 ? ¿Por qué sí o por qué no?

La respuesta del apartado b) es la negativa de la del apartado a) porque C_1 y C_2 representan orientaciones opuestas de un mismo segmento parabólico. \square

Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma de las integrales de línea frecuentemente utilizada proviene de la notación de campos vectoriales introducida en la sección precedente. Si \mathbf{F} es un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y C viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se escribe a menudo como $M dx + N dy$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_C (M dx + N dy) \end{aligned}$$

Esta forma diferencial admite generalización a tres variables. Los paréntesis suelen omitirse y se escribe

$$\int_C M dx + N dy \quad \text{y} \quad \int_C M dx + N dy + P dz$$

En el Ejemplo 8 se emplea esta notación.

EJEMPLO 8 Cálculo de una integral de línea en forma diferencial

Dado el círculo C de radio 3 de ecuación

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

calcular la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

(Véase Figura 14.17.)

Solución: De $x = 3 \cos t$ e $y = 3 \operatorname{sen} t$, se siguen $dx = -3 \operatorname{sen} t dt$, $dy = 3 \cos t dt$. Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(27 \operatorname{sen}^3 t)(-3 \operatorname{sen} t) + (27 \cos^3 t + 81 \cos t \operatorname{sen}^2 t)(3 \cos t)] dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t + 3 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 2t \right) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left[\cos 2t + \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} \right) \right] dt \\ &= 81 \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{3}{8} t - \frac{3 \operatorname{sen} 4t}{32} \right]_0^{2\pi} = \frac{243\pi}{4} \end{aligned}$$

□

Nota. La orientación de C afecta al valor de la forma diferencial de una integral de línea. En concreto, si $-C$ tiene la orientación inversa de la de C , entonces

$$\int_{-C} M dx + N dy = - \int_C M dx + N dy$$

Así pues, de las tres formas presentadas en esta sección para las integrales de línea, la orientación no afecta a la forma $\int_C f(x, y) ds$, pero sí a las formas vectorial y diferencial.

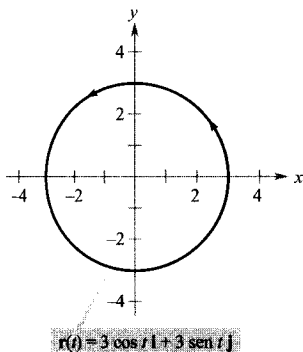


FIGURA 14.17

Para curvas expresadas como $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, se puede hacer $x = t$ para obtener la forma paramétrica

$$x = t \quad \text{e} \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

Al ser $dx = dt$, podemos optar por evaluar la integral en la variable x o en la t , como ocurre en el Ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Cálculo de una integral de línea en forma diferencial

Calcular

$$\int_C y \, dx + x^2 \, dy$$

donde C es el arco parabólico $y = 4x - x^2$ de $(4, 0)$ a $(1, 3)$ (véase Figura 14.18).

Solución: En lugar de pasar al parámetro t , podemos simplemente retener la variable x y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \implies \quad dy = (4 - 2x) \, dx$$

Con ello, en la dirección que va de $(4, 0)$ a $(1, 3)$ la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + x^2 \, dy &= \int_4^1 [(4x - x^2) \, dx + x^2(4 - 2x) \, dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3) \, dx \\ &= \left[2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_4^1 \\ &= \frac{69}{2} \end{aligned}$$

(Véase Ejemplo 7.) □

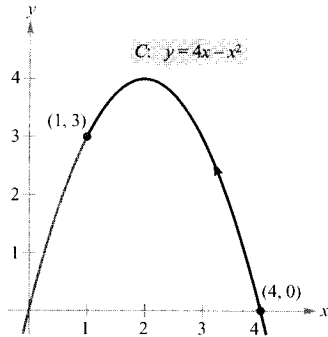


FIGURA 14.18

La integral de línea sobre C de $(4, 0)$ a $(1, 3)$ es $69/2$.

EXPLORACIÓN

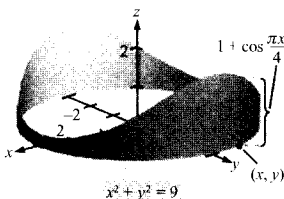
Cálculo del área de la superficie lateral La figura muestra una pieza de hojalata cortada de un cilindro circular cuya base admite el modelo

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Base circular}$$

En cualquier punto (x, y) de la base, la altura de la pieza viene dada por

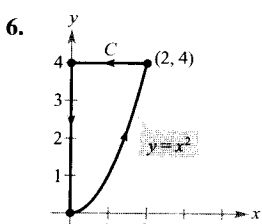
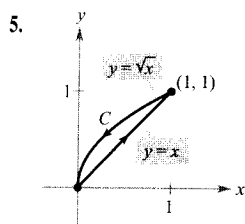
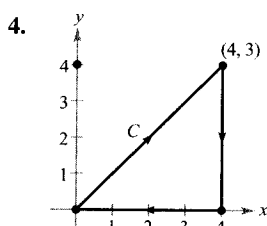
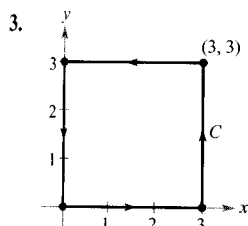
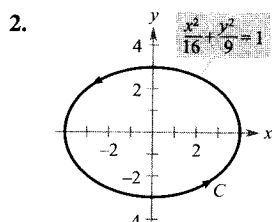
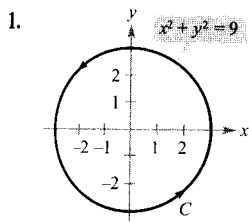
$$f(x, y) = 1 + \cos \frac{\pi x}{4}$$

Explicar cómo se puede calcular el área de esa pieza mediante una integral de línea.



Ejercicios de la Sección 14.2

En los Ejercicios 1-6, hallar una parametrización suave a trozos del camino C .



En los Ejercicios 7-10, calcular la integral de línea sobre el camino especificado.

7. $\int_C (x - y) ds$

$C: \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
 $0 \leq t \leq 2$

8. $\int_C 4xy ds$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$
 $0 \leq t \leq 1$

9. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$

$C: \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k}$
 $0 \leq t \leq \pi/2$

10. $\int_C 8xyz ds$

$C: \mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$
 $0 \leq t \leq 2$

En los Ejercicios 11-14, calcular

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

a lo largo del camino que se indica.

11. C : el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 3$
 12. C : el eje y desde $y = 1$ hasta $y = 10$
 13. C : el círculo $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$, recorrido en sentido antihorario (el contrario al de las agujas de un reloj)
 14. C : el círculo $x^2 + y^2 = 4$ desde $(2, 0)$ hasta $(0, 2)$, recorrido en sentido antihorario

En los Ejercicios 15-18, calcular

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) ds$$

a lo largo de la curva dada.

15. C : recta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$
 16. C : recta de $(0, 0)$ a $(3, 9)$
 17. C : el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido antihorario
 18. C : el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, recorrido en sentido antihorario

Masa En los Ejercicios 19 y 20, hallar la masa total de dos vueltas de un muelle de densidad ρ que tiene la forma de la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

19. $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

20. $\rho(x, y, z) = 2$

En los Ejercicios 21-26, calcular

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C viene determinada por $\mathbf{r}(t)$.

21. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

22. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

23. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

24. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{j}, \quad -2 \leq t \leq 2$

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

En los Ejercicios 27 y 28, usar integración simbólica para calcular la integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

siendo C la curva definida por $\mathbf{r}(t)$.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 3$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$

Trabajo En los Ejercicios 29-34, calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} al mover un objeto a lo largo de la trayectoria que se especifica.

29. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

C: $y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$

30. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$

C: $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

31. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$, en sentido antihorario

32. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C: el semicírculo recorrido en sentido antihorario desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

C: segmento recto de $(0, 0, 0)$ a $(5, 3, 2)$.

35. **Trabajo** Calcular el trabajo realizado por una persona, que pesa 150 libras, al recorrer una vuelta de una escalera en forma de hélice circular de radio 3 pies, si la persona asciende 10 pies.

36. **Trabajo** Una partícula se mueve, a lo largo del camino $y = x^2$, desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$. Se mide el campo de fuerzas \mathbf{F} en cinco puntos de la trayectoria con los resultados recogidos en la tabla. Aproximar, con ayuda de la regla de Simpson o de una calculadora, el trabajo realizado por el campo de fuerzas.

(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$	$(1, 1)$
$\mathbf{F}(x, y)$	$\langle 5, 0 \rangle$	$\langle 3.5, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 1.5, 3 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$

En los Ejercicios 37-40, comprobar el hecho de que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

independientemente del punto inicial y final de C , si el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal al campo de fuerzas \mathbf{F} .

37. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

38. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$

39. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2x^2)\mathbf{i} + \left(x - \frac{y}{2}\right)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

40. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 3 \sin t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}$

41. **Investigación** Determinar el valor de c para el cual el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = 15[(4 - x^2)\mathbf{i} - xy\mathbf{j}]$$

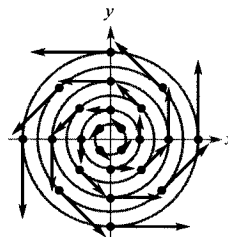
sobre un objeto que se mueve por la parábola $y = c(1 - x^2)$, desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$, es mínimo. Comparar el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto por un camino rectilíneo que conecte esos dos puntos.

42. **Para pensar** Determinar, para los datos siguientes, si el trabajo realizado al mover un objeto desde el primer punto hasta el segundo, en el campo de fuerzas de la figura, es positivo, negativo o cero. Explicar la respuesta.

a) De $(-3, -3)$ a $(3, 3)$

b) De $(-3, 0)$ a $(0, 3)$

c) De $(5, 0)$ a $(0, 3)$



En los Ejercicios 43-46, calcular la integral de línea sobre el camino C de ecuaciones $x = 2t$, $y = 10t$, con $0 \leq t \leq 1$.

$$43. \int_C (x + 3y^2) dy \qquad 44. \int_C (x + 3y^2) dx$$

$$45. \int_C xy dx + y dy \qquad 46. \int_C (y - 3x) dx + x^2 dy$$

En los Ejercicios 47-52, calcular la integral

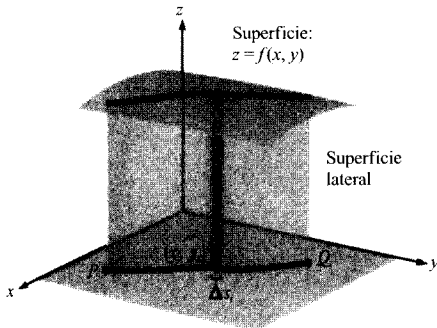
$$\int_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$$

a lo largo de la curva dada.

47. C : el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 5$
 48. C : el eje y desde $y = 0$ hasta $y = 2$
 49. C : segmentos rectos de $(0, 0)$ a $(3, 0)$ y de $(3, 0)$ a $(3, 3)$
 50. C : segmentos rectos de $(0, 0)$ a $(0, -3)$ y de $(0, -3)$ a $(2, -3)$
 51. C : arco parabólico $x = t$, $y = 2t^2$, desde $(0, 0)$ hasta $(2, 8)$.
 52. C : camino elíptico $x = 4 \sin t$, $y = 3 \cos t$, desde $(0, 3)$ hasta $(4, 0)$.

Área de una superficie lateral En los Ejercicios 53-60, hallar el área de la superficie lateral de la figura sobre la curva C del plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$, donde

$$\text{Área lateral} = \int_C f(x, y) ds$$



C : Curva en el plano xy

53. $f(x, y) = h$, C : recta de $(0, 0)$ a $(3, 4)$
 54. $f(x, y) = y$, C : recta de $(0, 0)$ a $(4, 4)$
 55. $f(x, y) = xy$, C : $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$
 56. $f(x, y) = x + y$, C : $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$
 57. $f(x, y) = h$, C : $y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

58. $f(x, y) = y + 1$, C : $1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

59. $f(x, y) = xy$, C : $y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

60. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$, C : $x^2 + y^2 = 4$

61. **Diseño de motores** Una pieza de acero del motor de un tractor tiene su base circular modelada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$ y su altura por $z = 1 + y^2$. Todas las medidas de la pieza se dan en centímetros.

- a) Calcular el área lateral de esa pieza.
 b) Si la pieza tiene la forma de una capa de 0,2 cm de grosor, usar el resultado del apartado a) para estimar la cantidad de acero empleada en su fabricación.
 c) Dibujar un esbozo de la pieza.

62. **Diseño de edificios** La altura sobre el suelo del techo de un edificio viene dada por $z = 20 + \frac{1}{4}x$, y una de las paredes sigue el modelo $y = x^{3/2}$. Calcular el área lateral de esa pared si $0 \leq x \leq 40$. (Todas las medidas están en pies.)

63. **Para pensar** Ordenar las superficies de acuerdo con el valor del área lateral bajo ellas y sobre la curva $y = \sqrt{x}$, desde $(0, 0)$ hasta $(4, 2)$ en el plano xy . Explicar el orden sin efectuar cálculos.

- a) $z_1 = 2 + x$ b) $z_2 = 5 + x$
 c) $z_3 = 2$ d) $z_4 = 10 + x + 2y$

Aproximación En los Ejercicios 64 y 65, averiguar qué valor aproxima mejor el área lateral sobre la curva C del plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$. (Elegir a la vista de un esbozo de la superficie, sin efectuar cálculo alguno.)

64. $f(x, y) = y$, C : $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(2, 4)$

- a) 2 b) 4 c) 8 d) 16

65. $f(x, y) = e^{xy}$, C : recta de $(0, 0)$ a $(2, 2)$

- a) 54 b) 25 c) -250 d) 75 e) 100

66. **Investigación** El techo de un sólido, con paredes verticales y apoyado en el plano xy , tiene la forma determinada por el modelo

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + (1 + \sin^2 2t) \mathbf{k}$$

donde todas las medidas se dan en centímetros. La intersección del plano $y = b$ ($-3 < b < 3$) con ese techo es una recta horizontal.

- a) Representar el sólido en una calculadora.
 b) Estimar su área lateral con ayuda de la calculadora.
 c) Hallar (si ello es posible) el volumen del sólido.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 67-70, averiguar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

67. Si C viene dada por $x(t) = t, y(t) = t, 0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_C xy \, ds = \int_0^1 t^2 \, dt$$

68. Si $C_2 = -C_1$, entonces $\int_{C_1} f(x, y) \, ds + \int_{C_2} f(x, y) \, ds = 0$.

69. Las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$, y $\mathbf{r}_2 = (1-t)\mathbf{i} + (1-t)^2\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$, definen la misma curva.

70. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = 0$, entonces \mathbf{F} y \mathbf{T} son ortogonales.



14.3

Campos vectoriales conservativos e independencia del camino

- CONTENIDO ■
 Teorema fundamental de las integrales de línea ■
 Independencia del camino ■
 Conservación de la energía ■

Teorema fundamental de las integrales de línea

En la sección precedente hemos comentado que el trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre un objeto que se mueve entre dos puntos es independiente del camino seguido. En esta sección estudiaremos una importante generalización de ese hecho, el **teorema fundamental de las integrales de línea**.

Para empezar, veamos un ejemplo en el que la integral de línea de un campo vectorial conservativo se calcula por tres caminos diferentes.

EJEMPLO 1 Integral de línea de un campo vectorial conservativo

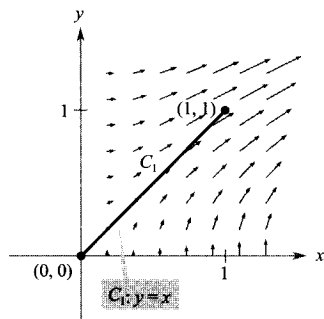
Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$$

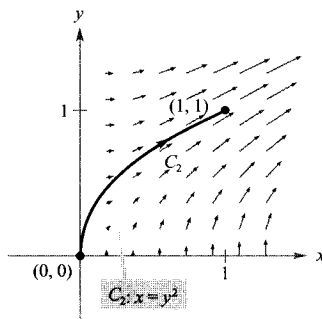
sobre una partícula que se mueve desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de cada uno de los caminos siguientes.

a) $C_1: y = x$ b) $C_2: x = y^2$ c) $C_3: y = x^3$

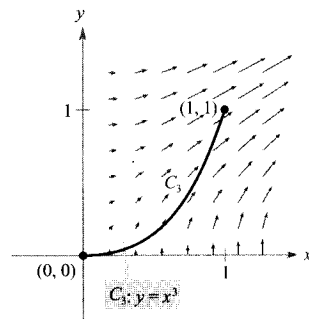
Solución: (Véase Figura 14.19.)



a)



b)



c)

FIGURA 14.19

El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo es el mismo para todos los caminos.

a) Para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, con $0 \leq t \leq 1$, es

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{i} + \frac{1}{4} t^2 \mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left[\frac{3}{4} t^2 dt = \frac{1}{4} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

b) Para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$, con $0 \leq t \leq 1$, es

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbf{j} \right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2} t^{3/2} \mathbf{i} + \frac{1}{4} t^2 \mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left[\frac{5}{8} t^{3/2} dt = \frac{1}{4} t^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

c) Para $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} t\mathbf{i} + \frac{1}{8} t^3 \mathbf{j}$, con $0 \leq t \leq 2$, es

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{8} t^2 \mathbf{j} \right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{32} t^4 \mathbf{i} + \frac{1}{16} t^2 \mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \left[\frac{5}{128} t^4 dt = \frac{1}{128} t^5 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \quad \square$$

El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2} xy\mathbf{i} + \frac{1}{4} x^2\mathbf{j}$ del Ejemplo 1 era conservativo porque $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, donde $f(x, y) = \frac{1}{4} x^2 y$. En tales casos, el próximo teorema afirma que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ viene dado por

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

| Nota. Nótese que el teorema fundamental de las integrales de línea es análogo al teorema fundamental del Cálculo (página 315), el cual afirma que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

con $F'(x) = f(x)$.

TEOREMA 14.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea C una curva suave a trozos, contenida en una región abierta R , dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R , y además M y N son continuas en R , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función potencial de \mathbf{F} , es decir, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Demostración: Lo demostraremos sólo para curvas suaves. Para las curvas suaves a trozos se procede análogamente en cada fragmento suave. Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$, se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \left[f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

y por la regla de la cadena (Teorema 12.6),

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Este último paso es una aplicación del teorema fundamental del Cálculo. \square

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la siguiente forma. Sea C una curva suave a trozos, contenida en una región abierta Q , dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo y además M, N y P son continuas, entonces

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial \mathbf{F} es conservativo, la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial* f en esos puntos.

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea

Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos desde $(-1, 4)$ hasta $(1, 2)$ y

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

(Véase Figura 14.20.)

Solución: Vimos en el Ejemplo 6 de la Sección 14.1 que \mathbf{F} es el gradiente de

$$f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2 + K$$

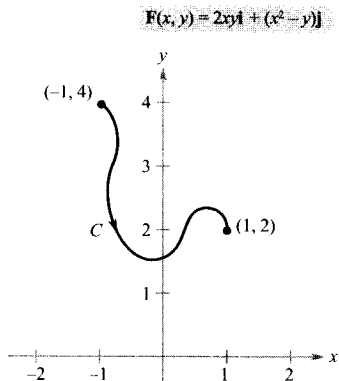


FIGURA 14.20

Aplicando el teorema fundamental de las integrales de línea resulta $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4$.

Por tanto, \mathbf{F} es conservativo, así que del teorema fundamental de las integrales de línea deducimos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(1, 2) - f(-1, 4) \\ &= \left[1^2(2) - \frac{1}{2}(2^2) \right] - \left[(-1)^2(4) - \frac{1}{2}(4^2) \right] \\ &= 4 \end{aligned}$$

Nótese que es innecesario incluir una constante K como parte de f , ya que se cancelaría en la resta. □

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea

Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos de $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, 3)$ y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2zy\mathbf{k}$$

(Véase Figura 14.21.)

Solución: Por el Ejemplo 8 de la Sección 14.1 sabemos que \mathbf{F} es el gradiente de $f(x, y, z) = x^2y + z^2y + K$. En consecuencia, \mathbf{F} es conservativo y del teorema fundamental de las integrales de línea se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0) \\ &= [(0)^2(2) + (3^2)(2)] - [1^2(1) + (0^2)(1)] \\ &= 17 \end{aligned}$$

| Nota. Es importante darse cuenta de que en los Ejemplos 2 y 3 el valor de la integral de línea es el mismo para cualquier curva suave a trozos C con puntos inicial y final dados. Así, en el Ejemplo 3, si calcula la integral de línea para la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

debe obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (30t^2 + 16t - 1) dt \\ &= 17 \end{aligned}$$

Independencia del camino

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si \mathbf{F} es continuo y conservativo en una región abierta R , el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para toda curva suave a trozos C que vaya de un punto fijo de R a otro punto fijo de R . Este resultado se enuncia diciendo que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente del camino** en la región R .

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2zy\mathbf{k}$$

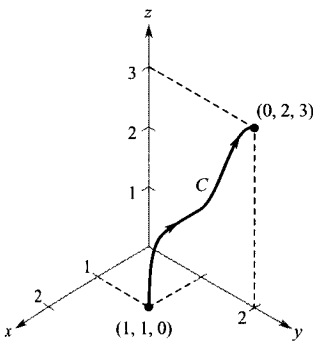


FIGURA 14.21

Aplicando el teorema fundamental de las integrales de línea resulta $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 17$.

Una región del plano (o del espacio) se dice que es **conexa** si todo par de puntos en ella pueden ser unidos por una curva suave a trozos contenida por completo en la región, como en la Figura 14.22. En regiones abiertas y *conexas*, la independencia del camino de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ equivale a que \mathbf{F} sea conservativo.

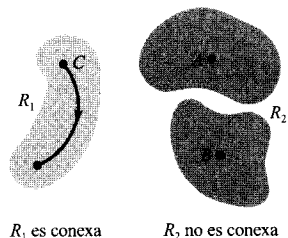


FIGURA 14.22

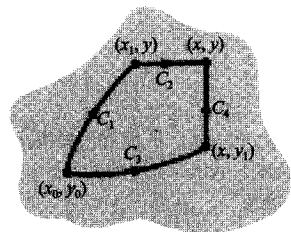


FIGURA 14.23

TEOREMA 14.6 INDEPENDENCIA DEL CAMINO Y CAMPOS CONSERVATIVOS

Si \mathbf{F} es continuo en una región abierta y conexa, la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente del camino si y sólo si \mathbf{F} es conservativo.

Demostración: Si \mathbf{F} es conservativo, el teorema fundamental de las integrales de línea asegura que la integral de línea es independiente del camino. Demostraremos el recíproco para una región del plano. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y consideremos un punto fijado (x_0, y_0) en R . Si (x, y) es un punto arbitrario de R , elegimos una curva suave a trozos C que vaya de (x_0, y_0) a (x, y) y definimos

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy$$

La existencia de una tal C en R viene garantizada por el carácter conexo de R . Se puede probar que f es función potencial de \mathbf{F} sin más que considerar dos caminos diferentes entre (x_0, y_0) y (x, y) . Para el primero, escogemos un punto (x_1, y_1) en R con $x \neq x_1$ (posible por ser R abierta) y tomamos C_1 y C_2 como indica la Figura 14.23. De la independencia del camino se sigue que

$$f(x, y) = \int_C M dx + N dy = \int_{C_1} M dx + N dy + \int_{C_2} M dx + N dy$$

Como la primera integral no depende de x y en la segunda es $dy = 0$, concluimos que

$$f(x, y) = g(y) + \int_{C_2} M dx$$

de modo que la derivada parcial de f respecto de x es $f'_x(x, y) = M$. Para el segundo camino, tomamos un punto (x, y_1) . Por razonamientos similares a los de antes llegamos a la conclusión de que $f'_y(x, y) = N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

luego \mathbf{F} es conservativo. □

EJEMPLO 4 Cálculo del trabajo en un campo conservativo

Para el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino y calcular el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva C de $(0, \pi/2, 1)$ a $(1, \pi, 3)$.

Solución: Expresando el campo de fuerzas como $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, con $M = e^x \cos y$, $N = -e^x \sin y$, y $P = 2$, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Por tanto, \mathbf{F} es conservativo. Si f es una función potencial de \mathbf{F} ,

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y$$

$$f_y(x, y, z) = -e^x \sin y$$

$$f_z(x, y, z) = 2$$

Integrando con respecto a x, y, z por separado, vemos que

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z) dx = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_y(x, y, z) dy = \int -e^x \sin y dy = e^x \cos y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_z(x, y, z) dz = \int 2 dz = 2z + k(x, y)$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$ deducimos que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K$$

En consecuencia, el trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de *cualquier* curva de $(0, \pi/2, 1)$ a $(1, \pi, 3)$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left[e^x \cos y + 2z \right]_{(0, \pi/2, 1)}^{(1, \pi, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e \end{aligned}$$

□

¿Cuánto trabajo se realizaría para mover el objeto del Ejemplo 4 de $(0, \pi/2, 1)$ a $(1, \pi, 3)$ y después volver hasta el punto $(0, \pi/2, 1)$? El teorema fundamental de las integrales de línea afirma que ese trabajo sería cero. Recordemos que, por definición, el trabajo puede ser negativo. De hecho, en ese trayecto de ida y vuelta, la cantidad de trabajo que cuente como positiva se cancela con la parte que se registra como negativa.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Según el teorema fundamental de las integrales de línea, si \mathbf{F} es continuo y conservativo en una región abierta R , la integral de línea sobre cualquier curva cerrada es 0.

Nota. El Teorema 14.7 ofrece varias opciones a la hora de calcular una integral de línea relativa a un campo conservativo. Podemos usar una función potencial o cambiar el camino propuesto por otro especialmente simple, un segmento recto por ejemplo.

TEOREMA 14.7 CONDICIONES EQUIVALENTES

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ tiene primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa R , y C es una curva suave a trozos en R , las siguientes condiciones son equivalentes.

1. \mathbf{F} es conservativo. Esto es, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f .
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva *cerrada* C en R .

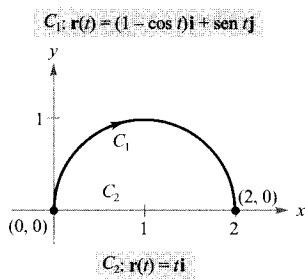


FIGURA 14.24

EJEMPLO 5 Cálculo de una integral de línea

Evaluar $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j}$$

y C_1 es el camino semicircular que va de $(0, 0)$ a $(2, 0)$, como muestra la Figura 14.24.

Solución: Tenemos tres opciones.

- a) Podemos usar el método expuesto en la sección precedente para evaluar la integral de línea a lo largo de *cualquier* curva. A tal fin, adoptamos la parametrización $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j}$, con $0 \leq t \leq \pi$. En ella, se tiene $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) dt$, y

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (\text{sen } t + \text{sen}^4 t + \cos t + 3 \text{sen}^2 t \cos t - 3 \cos^2 t \text{sen}^2 t) dt$$

Pero el aspecto de esta integral deja maltrecho nuestro entusiasmo por este método.

- b) Podemos intentar hallar una *función potencial* y evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Copiando el proceso del Ejemplo 4, se encuentra la función potencial $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$, así que, por el teorema fundamental,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2$$

- c) Al ser \mathbf{F} conservativo, disponemos de una tercera opción. Como el valor de la integral de línea es independiente del camino, podemos sustituir el camino semicircular por *otro más simple*. Supongamos que tomamos el camino recto C_2 que va de $(0, 0)$ a $(2, 0)$. En tal caso, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, con $0 \leq t \leq 2$. Así pues, $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dt$ y $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, de manera que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 1 dt = t \Big|_0^2 = 2$$

De las tres opciones, la tercera es sin duda la más conveniente. \square

Conservación de la energía



MICHAEL FARADAY (1791-1867)

Algunos filósofos de la Ciencia consideran la ley de conservación de la energía de Faraday como la más excelsa generalización concebida jamás por el género humano. Al conocimiento de su significado han contribuido muchos físicos, entre los cuales destacan por su influencia temprana James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894).

En 1840, el físico inglés Michael Faraday escribió «En ninguna parte hay creación o producción de energía sin un consumo correspondiente de algo que la aporte». Esta afirmación constituye la primera formulación de una de las leyes más importantes de la Física, la **ley de conservación de la energía**. En terminología moderna, la ley se enuncia así: *En un campo de fuerzas conservativo, la suma de las energías cinética y potencial de un objeto se mantiene constante*.

Esta ley se puede deducir haciendo uso del teorema fundamental de las integrales de línea. En Física se llama **energía cinética** de una partícula de masa m y velocidad v a $k = \frac{1}{2} mv^2$. Y la **energía potencial** p de una partícula en un punto (x, y, z) en un campo vectorial conservativo \mathbf{F} se define como $p(x, y, z) = -f(x, y, z)$, donde f denota una función potencial de \mathbf{F} . Por tanto, el trabajo realizado por el campo \mathbf{F} a lo largo de una curva suave C desde A hasta B es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y, z) \Big|_A^B = -p(x, y, z) \Big|_A^B = p(A) - p(B)$$

como indica la Figura 14.25. En otras palabras, el trabajo W es la diferencia entre las energías potenciales en A y B . Ahora bien, supongamos que $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una partícula que se mueve por C desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$. En cualquier instante t , la velocidad, aceleración y rapidez de esa partícula son $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ y $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. Así pues, por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m(\mathbf{v}'(t))$, y el trabajo realizado por \mathbf{F} es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_a^b [m\mathbf{v}'(t)] \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_a^b m[\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \end{aligned}$$

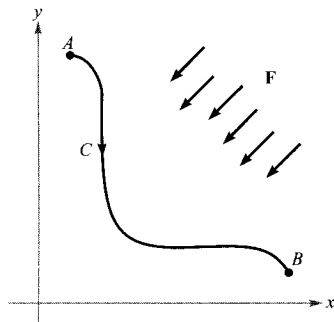


FIGURA 14.25

El trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de C es:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = p(A) - p(B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}(t)\|^2] dt \\ &= \frac{m}{2} \left[\|\mathbf{v}(t)\|^2 \right]_a^b \\ &= \frac{m}{2} \left[[v(t)]^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} m[v(b)]^2 - \frac{1}{2} m[v(a)]^2 \\ &= k(B) - k(A) \end{aligned}$$

Al igualar esos dos valores de W obtenemos

$$p(A) - p(B) = k(B) - k(A)$$

$$p(A) + k(A) = p(B) + k(B)$$

lo cual implica que la suma de las energías cinética y potencial permanece constante.

Ejercicios de la Sección 14.3

En los Ejercicios 1-4, comprobar que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para las dos parametrizaciones de C .

- $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}_2(\theta) = \sin \theta\mathbf{i} + \sin^2 \theta\mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$
- $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 4$
 - $\mathbf{r}_2(w) = w^2\mathbf{i} + w\mathbf{j}, \quad 0 \leq w \leq 2$
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(\theta) = \sec \theta\mathbf{i} + \tan \theta\mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3$
 - $\mathbf{r}_2(t) = \sqrt{t+1}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = (2+t)\mathbf{i} + (3-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
 - $\mathbf{r}_2(w) = (2 + \ln w)\mathbf{i} + (3 - \ln w)\mathbf{j}, \quad 1 \leq w \leq e^3$

En los Ejercicios 5-10, averiguar si el campo vectorial es conservativo.

- $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\sin y\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j})$
- $\mathbf{F}(x, y) = 15x^2y^2\mathbf{i} + 10x^3y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

$$8. \quad \mathbf{F}(x, y, z) = y \ln z\mathbf{i} - x \ln z\mathbf{j} + \frac{xy}{z}\mathbf{k}$$

$$9. \quad \mathbf{F}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$$

$$10. \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \sin yz\mathbf{i} + xz \cos yz\mathbf{j} + xy \sin yz\mathbf{k}$$

En los Ejercicios 11-24, calcular el valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(Ayuda: Si \mathbf{F} es conservativo, la integración puede resultar más fácil por un camino alternativo.)

$$11. \quad \mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$$

$$a) \quad \mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b) \quad \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$12. \quad \mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$$

$$a) \quad \mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} - \frac{3}{2}(t-2)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \quad \text{segmentos rectos de } (0, 3) \text{ a } (0, 0) \text{ y de } (0, 0) \text{ a } (2, 0).$$

$$13. \quad \mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

$$a) \quad \mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b) \quad \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

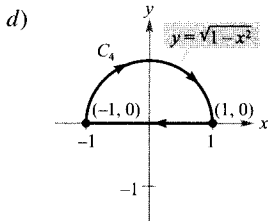
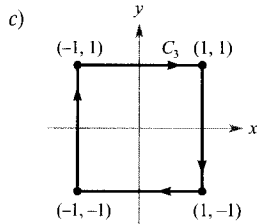
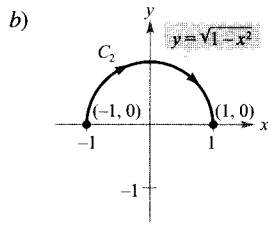
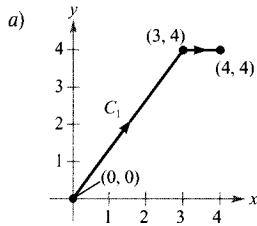
$$c) \quad \mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

14. $\mathbf{F}(x, y) = xy^3\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$

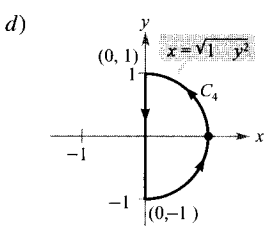
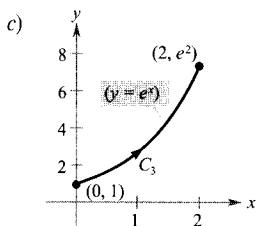
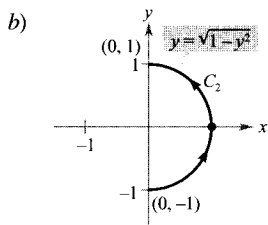
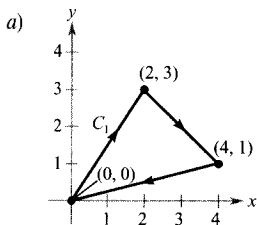
a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (t+1)\mathbf{i} - \frac{1}{3}(t-3)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

15. $\int_C y^2 dx + 2xy dy$



16. $\int_C (2x - 3y + 1) dx - (3x + y - 5) dy$



17. $\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

a) C : elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ de $(5, 0)$ a $(0, 4)$

b) C : parábola $y = 4 - x^2$ de $(2, 0)$ a $(0, 4)$

18. $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1-2t)\mathbf{i} + \pi^2 t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + x)\mathbf{i} + (x^2 - z)\mathbf{j} + (2y - 4z)\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t-1)^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1-2t)\mathbf{i} + \pi t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

a) $\mathbf{r}_1(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (4-8t)\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \sin z\mathbf{i} + x \sin z\mathbf{j} + xy \cos z\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

En los Ejercicios 25-34, evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Verificar los resultados con ayuda de una calculadora.

25. $\int_C (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$

C : curva suave de $(0, 0)$ a $(3, 8)$

26. $\int_C [2(x+y)\mathbf{i} + 2(x+y)\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r}$

C : curva suave de $(-1, 1)$ a $(3, 2)$

27. $\int_C \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy$

C : curva suave de $(0, -\pi)$ a $(3\pi/2, \pi/2)$

28. $\int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$

C : curva suave de $(1, 1)$ a $(2\sqrt{3}, 2)$

29. $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$

C : cicloide $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ de $(0, 0)$ a $(2\pi, 0)$

30. $\int_C \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$

C : círculo $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ en sentido de las manecillas de un reloj de $(7, 5)$ a $(1, 5)$

31. $\int_C (z + 2y) dx + (2x - z) dy + (x - y) dz$
 a) C : segmento recto de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$
 b) C : segmentos rectos de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$ y de este a $(1, 1, 1)$
 c) C : segmentos rectos de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$ y de este a $(1, 1, 1)$

32. Repetir el Ejercicio 31 para la integral

$$\int_C zy dx + xz dy + xy dz$$

33. $\int_C -\sin x dx + z dy + y dz$
 C : curva suave de $(0, 0, 0)$ a $(\pi/2, 3, 4)$
34. $\int_C 6x dx - 4z dy - (4y - 20z) dz$
 C : curva suave de $(0, 0, 0)$ a $(3, 4, 0)$

Trabajo En los Ejercicios 35 y 36, calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} al mover el objeto desde P hasta Q .

35. $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y^2\mathbf{i} + (6x^3y - 1)\mathbf{j}$
 $P(0, 0), Q(5, 9)$

36. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2x}{y}\mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$
 $P(-1, 1), Q(3, 2)$

37. **Trabajo** Una piedra de 1 libra, atada al extremo de una cuerda de 2 pies, se hace girar horizontalmente, con el otro extremo fijo. Da una vuelta por segundo. Calcular el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} que mantiene la piedra en su movimiento circular. [Ayuda: Fuerza = (masa)(aceleración centrípeta).]

38. **Trabajo** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas constante, probar que el trabajo realizado al mover una partícula desde P hasta Q , a lo largo de cualquier camino, es

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

39. **Energías cinética y potencial** La energía cinética de un objeto que se mueve en un campo de fuerzas conservativo decrece a razón de 10 unidades por minuto. ¿A qué ritmo está cambiando su energía potencial?

40. **Trabajo** Con el fin de permitir una vía de escape a los trabajadores en una arriesgada tarea a 50 metros de altura sobre el suelo, se ha instalado un tobogán de cable que va desde su posición hasta un punto en el suelo que dista horizontalmente 50 metros. Probar que el trabajo realizado por el campo gravitatorio para que un hombre de 150 libras recorra ese cable es el mismo para estos dos caminos:

a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (50 - t)\mathbf{j}$ b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{50}(50 - t)^2\mathbf{j}$

41. **Trabajo** ¿Hay algún camino para el que el trabajo realizado por el campo gravitatorio en el Ejercicio 40 sea distinto del obtenido para los dos caminos allí propuestos? Razonar la respuesta.

42. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

a) Probar que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{donde} \quad M = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad N = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

b) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq \pi$, calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

c) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq \pi$, calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

d) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ¿Por qué no es contradictorio esto con el Teorema 14.7?

e) Probar que

$$\nabla \left(\arctg \frac{x}{y} \right) = \mathbf{F}$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 43-46, averiguar si el enunciado es verdadero o no lo es. En caso de que no sea cierto, explicar por qué o exhibir un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

43. Si C_1, C_2 y C_3 tienen los mismos puntos inicial y final, y además $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$, entonces $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3$.

44. Si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y C viene dada por $\mathbf{r}(t) = (4 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}$, con $0 \leq t \leq \pi$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

45. Si \mathbf{F} es conservativo en una región R acotada por una curva cerrada simple y C está contenida en R , el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino.

46. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$, \mathbf{F} es conservativo.

47. Se dice que f es armónica si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Demostrar que si f es armónica, entonces

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$$

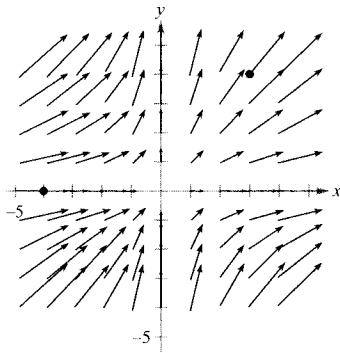
donde C es una curva suave cerrada en el plano.

48. **Redacción** Consideremos el campo de fuerzas de la figura.

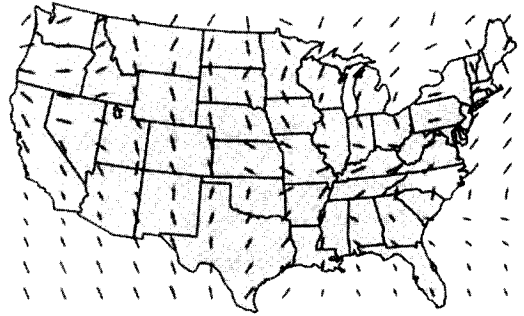
a) Exponer en unas líneas un argumento justificando que ese campo no es conservativo porque se pueden encontrar dos caminos que requieren cantidades de trabajo distintas para mover un objeto de $(-4, 0)$ a $(3, 4)$. Identificar dos caminos y decir cuál de ellos requiere un trabajo mayor.

- b) Explicar que ese campo de fuerzas no es conservativo porque se puede encontrar una curva cerrada C tal que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$



49. **Redacción** El mapa muestra los vectores velocidad del viento a una altitud de 5.000 pies sobre los EE.UU. el 1 de agosto de 1996. Al volar de Dallas a Chicago en un pequeño avión a esa altitud, la cantidad de combustible ¿es independiente de la trayectoria elegida? ¿Es conservativo ese campo vectorial? Explicar las respuestas.



14.4

Teorema de Green

- CONTENIDO ■
- Teorema de Green ■
- Formas alternativas del teorema de Green ■

Teorema de Green

En esta sección estudiaremos el **teorema de Green**, así llamado en honor del matemático inglés George Green (1793-1841), según el cual el valor de una integral doble sobre una región del plano *simplemente conexa* R queda determinado por el valor de una integral de línea a lo largo del contorno (o borde) de R .

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, con $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta consigo misma, esto es, si $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para cualesquiera c y d , distintos entre sí, en el intervalo abierto (a, b) . Una región plana R se dice que es **simplemente conexa** si su contorno es *una* curva cerrada simple, como en la Figura 14.26.

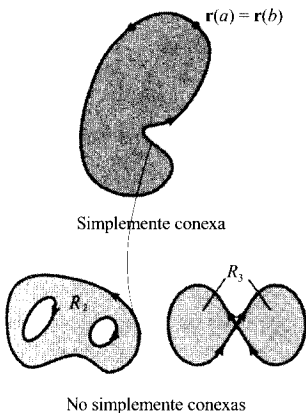


FIGURA 14.26

TEOREMA 14.8 TEOREMA DE GREEN

Sea R una región del plano simplemente conexa cuyo borde es una curva C suave a trozos y orientada en sentido antihorario (es decir, se recorre *una vez* de manera tal que la región R se vea en todo momento a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R , entonces

$$\int_C M dx + N dy = \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

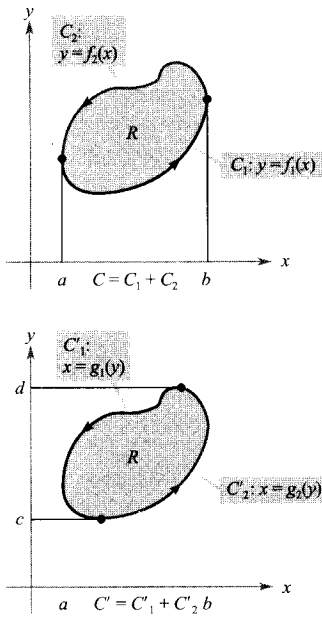


FIGURA 14.27
R es horizontalmente simple.

Demostración: Lo probaremos sólo para regiones vertical y horizontalmente simples (Figura 14.27).

$$\begin{aligned} \int_C M \, dx &= \int_{C_1} M \, dx + \int_{C_2} M \, dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) \, dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) \, dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] \, dx \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} \, dA &= \int_b^a \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} \, dy \, dx \\ &= \int_a^b M(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} \, dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] \, dx \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_C M \, dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} \, dA$$

Análogamente, se pueden usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N \, dy = \iint_R \partial N / \partial x \, dA$. Sumando las integrales $\int_C M \, dx$ y $\int_C N \, dy$, llegamos a la conclusión anunciada en el teorema. \square

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Green

Usar el teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\int_C y^3 \, dx + (x^3 + 3xy^2) \, dy$$

donde el camino C va de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ (Figura 14.28).

Solución: Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, se tiene

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$$

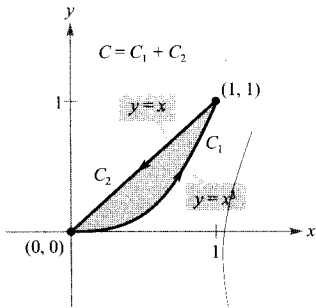


FIGURA 14.28
C es cerrada y simple, y la región R queda siempre a la izquierda de C.

Aplicando el teorema de Green concluimos que

$$\begin{aligned}
 \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\
 &= \int_0^1 \int_{x^3}^x [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx \\
 &= \int_0^1 3x^2 y \Big|_{x^3}^x dx \\
 &= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx \\
 &= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

□

GEORGE GREEN (1793-1841)

Green, hijo de un molinero y autodidacta, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en un ensayo sobre electromagnetismo en 1828. En ese tiempo la base matemática de los fenómenos eléctricos era casi nula. «Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, en la mayor medida posible, de efectuar cálculos sobre ella,... me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen.»

El teorema de Green no es aplicable a todas las integrales de línea. Entre otras restricciones especificadas en el Teorema 14.8, la curva C ha de ser cerrada y simple. Eso sí, cuando es aplicable, el teorema de Green ahorra tiempo. Para convencerse de ello, intente aplicar las técnicas de la Sección 14.2 a la integral del Ejemplo 1. A tal fin, es preciso escribir la integral de línea como

$$\begin{aligned}
 \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \\
 &= \int_{C_1} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy + \int_{C_2} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy
 \end{aligned}$$

donde C_1 es el camino cúbico dado por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$, y C_2 el segmento recto dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

EJEMPLO 2 Cálculo del trabajo usando el teorema de Green

Estando sometida a un campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

una partícula da una vuelta completa a un círculo de radio 3 (Figura 14.29). Aplicar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por el campo \mathbf{F} .

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3 \mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2) \mathbf{j}$$

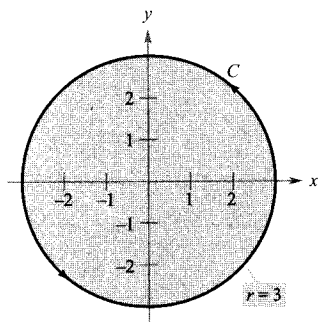


FIGURA 14.29

El trabajo realizado por \mathbf{F} cuando una partícula da una vuelta al círculo es $\frac{243\pi}{4}$.

Solución: Por el Ejemplo 1 sabemos que del teorema de Green se sigue

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R 3x^2 dA$$

En coordenadas polares, donde $x = r \cos \theta$ y $dA = r dr d\theta$, el trabajo se calcula así:

$$\begin{aligned} W &= \iint_R 3x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 3(r \cos \theta)^2 r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^3 d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{243}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{243}{8} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4} \end{aligned}$$

□

Al calcular integrales de línea sobre curvas cerradas hay que tener presente que el valor de la integral es 0 para todo campo vectorial conservativo (o sea, que satisface $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$). Este hecho es fácil de ver en el propio enunciado del teorema de Green.

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0$$

EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos conservativos

Calcular la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy$$

donde C es el camino de la Figura 14.30.

Solución: En esta integral de línea, $M = y^3$ y $N = 3xy^2$, así que $\partial N/\partial x = 3y^2$ y $\partial M/\partial y = 3y^2$, luego el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo. Por tanto, al ser C cerrada, concluimos que

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$$

□

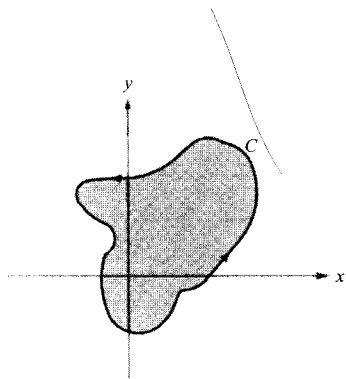


FIGURA 14.30

C es cerrada.

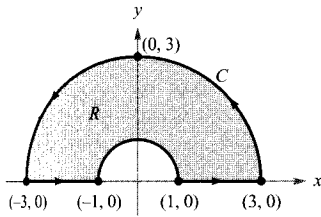


FIGURA 14.31
C es suave a trozos.

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema de Green sobre una curva suave a trozos

Calcular

$$\int_C (\arctg x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy$$

donde C es el camino que encierra la región anular de la Figura 14.31.

Solución: En coordenadas polares, R viene descrita por $1 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Además,

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2(r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta)$$

Así pues, según el teorema de Green,

$$\begin{aligned} \int_C (\arctg x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy &= \int_R \int -2(x + y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_1^3 -2r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi -2(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{52}{3} \right) (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= -\frac{52}{3} \left[\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \right]_0^\pi \\ &= -\frac{104}{3} \quad \square \end{aligned}$$

En los Ejemplos 1, 2 y 4, hemos utilizado el teorema de Green para calcular integrales de línea como integrales dobles. También admite la aplicación a la inversa. Un caso interesante ocurre cuando $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int 1 dA \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ &= \text{área de la región } R \end{aligned}$$

Entre las muchas elecciones posibles de M y N que satisfacen la condición requerida, la elección $M = -y/2$, $N = x/2$ produce la siguiente integral de línea para el área de la región R .

TEOREMA 14.9 UNA INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA

Si R es una región del plano acotada por una curva simple C , cerrada y suave a trozos, orientada en sentido antihorario, el área de R viene dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

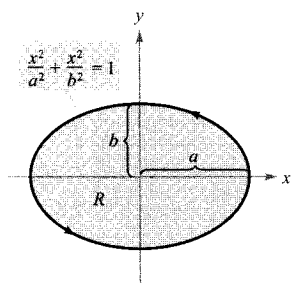


FIGURA 14.32
El área de la elipse es πab .

EJEMPLO 5 Cálculo del área mediante una integral de línea

Hallar, expresándola como integral de línea, el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución: En la Figura 14.32 es fácil ver que una orientación antihoraria de la elipse se consigue haciendo

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Por consiguiente, el área es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) dt - (b \sin t)(-a \sin t) dt] \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[t \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

□

El teorema de Green se puede extender a algunas regiones que no son simplemente conexas, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 6 El teorema de Green aplicado a una región con un agujero

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Calcular la integral de línea

$$\int_C 2xy dx + (x^2 + 2x) dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es el contorno de R (Figura 14.33).

Solución: Para empezar, trazamos los segmentos rectos C_3 y C_4 que indica la Figura 14.33. Nótese que como esos dos segmentos rectos tienen orientaciones

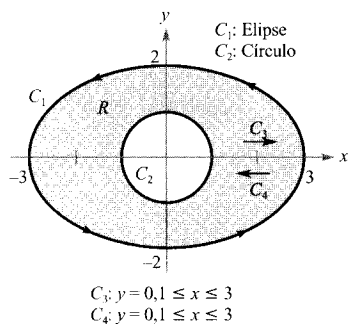


FIGURA 14.33

puestas, las integrales sobre ellos se cancelan entre sí. Ya podemos aplicar el teorema de Green a la región R tomando el contorno $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$ con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx + (x^2 + 2x) \, dy &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int (2x + 2 - 2x) \, dA \\ &= 2 \int_R \int dA = 2(\text{área de } R) \\ &= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\ &= 10\pi \quad \square \end{aligned}$$

En la Sección 14.1 establecimos una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea conservativo, pero sólo demostramos una de las dos direcciones. Ahora esbozaremos la otra mitad de la demostración, gracias al teorema de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ definido en un disco abierto R . Queremos probar que si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces \mathbf{F} es conservativo. Sea C una curva que constituye el borde de una región conexa contenida en R . En tal caso, debido a que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, podemos aplicar el teorema de Green para concluir que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M \, dx + N \, dy \\ &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a decir que \mathbf{F} es conservativo (recordar el Teorema 14.7).

Formas alternativas del teorema de Green

Finalizamos esta sección deduciendo dos formulaciones vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La generalización de estas formas vectoriales a tres dimensiones queda como objetivo central del resto del capítulo. Si \mathbf{F} es un campo de vectores en el plano, podemos expresarlo como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

de modo que su rotacional (Sección 14.1) es

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial N}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \left[-\frac{\partial N}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\end{aligned}$$

Bajo condiciones apropiadas sobre \mathbf{F} , C y R , podemos escribir el teorema de Green en la forma vectorial

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA\end{aligned}$$

Primera forma alternativa

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio dará lugar al **teorema de Stokes** (Sección 14.8).

En cuanto a la segunda forma vectorial del teorema de Green, supongamos las mismas condiciones sobre \mathbf{F} , C y R . Denotando por s la longitud de arco de C , se tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por tanto, un vector unitario tangente a la curva C viene dado por

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$$

En la Figura 14.34 vemos que el vector unitario normal \mathbf{N} que apunta hacia el exterior es

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}$$

En consecuencia, podemos aplicar al campo $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ el teorema de Green, del cual se deduce que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}) ds \\ &= \int_a^b \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \int_C M dy - N dx \\ &= \int_C -N dx + M dy \\ &= \int_R \int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} dA\end{aligned}$$

Teorema de Green

Por tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} dA$$

Segunda forma alternativa

La generalización de esta forma a tres dimensiones es el **teorema de la divergencia**, que será discutido en la Sección 14.7. Las interpretaciones físicas de la divergencia y del rotacional se analizarán en las Secciones 14.7 y 14.8.

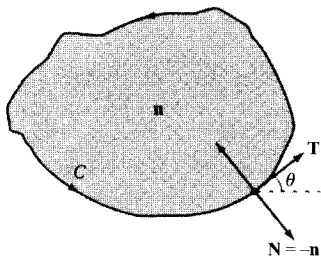


FIGURA 14.34

$$\mathbf{T} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j}$$

$$= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}$$

Ejercicios de la Sección 14.4

En los Ejercicios 1-4, comprobar el teorema de Green calculando ambas integrales

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

para el camino indicado.

1. C : cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ y $(0, 4)$
2. C : triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(4, 4)$
3. C : borde de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = x^2/4$
4. C : círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$

En los Ejercicios 5 y 6, verificar el teorema de Green usando integración simbólica en una calculadora para evaluar las dos integrales involucradas

$$\int_C xe^y dx + e^x dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

sobre el camino que se especifica.

5. C : círculo $x^2 + y^2 = 4$
6. C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = x^3$

En los Ejercicios 7-10, usar el teorema de Green para calcular la integral

$$\int_C (y - x) dx + (2x - y) dy$$

sobre el camino que se indica.

7. C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = x^2 - x$
8. C : $x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$
9. C : borde de la región interior al rectángulo limitado por $x = -5$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 3$, y exterior al cuadrado acotado por $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.
10. C : contorno de la región interior al círculo $x^2 + y^2 = 16$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En los Ejercicios 11-20, calcular el valor de la integral de línea utilizando el teorema de Green.

$$11. \int_C 2xy dx + (x + y) dy$$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$ e $y = 4 - x^2$

$$12. \int_C y^2 dx + xy dy$$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ e $x = 4$

$$13. \int_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$$

C : $x^2 + y^2 = a^2$

$$14. \int_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$$

C : $r = 1 + \cos \theta$

$$15. \int_C 2 \arctg \frac{y}{x} dx + \ln(x^2 + y^2) dy$$

C : $x = 4 + 2 \cos \theta$, $y = 4 + \sin \theta$

$$16. \int_C e^x \sin 2y dx + 2e^x \cos 2y dy$$

C : $x^2 + y^2 = a^2$

$$17. \int_C \sin x \cos y dx + (xy + \cos x \sin y) dy$$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = \sqrt{x}$

$$18. \int_C (e^{-x^2/2} - y) dx + (e^{-y^2/2} + x) dy$$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas del círculo $x = 5 \cos \theta$, $y = 5 \sin \theta$, y la elipse $x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$.

$$19. \int_C xy dx + (x + y) dy$$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

$$20. \int_C 3x^2 e^y dx + e^y dy$$

C : contorno de la región comprendida entre los cuadrados de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ y $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$

Trabajo En los Ejercicios 21-24, usar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} sobre una partícula que se mueve, en sentido contrario a las agujas de un reloj, por el camino cerrado C .

21. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

$C: x^2 + y^2 = 4$

22. $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - 3y)\mathbf{i} + (e^y + 6x)\mathbf{j}$

$C: r = 2 \cos \theta$

23. $\mathbf{F}(x, y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$

C : contorno del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + 4xy^2\mathbf{j}$

C : contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$

Área En los Ejercicios 25-28, usar una integral de línea para hallar el área de la región R .

25. R : la región acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$

26. R : el triángulo limitado por las gráficas de $x = 0$, $2x - 3y = 0$ y $x + 3y = 9$

27. R : la región acotada por las gráficas de $y = 2x + 1$ e $y = 4 - x^2$

28. R : la región interior al lazo del *folium* de Descartes

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

En los Ejercicios 29 y 30, verificar las fórmulas propuestas mediante el teorema de Green.

29. El centroide de una región de área A acotada por una curva cerrada simple C es

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx$$

30. El área de una región del plano acotada por un camino cerrado simple C dado en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta$$

Centroide En los Ejercicios 31-34, hallar el centroide de la región usando integración simbólica y el resultado del Ejercicio 29.

31. R : la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$ e $y = 4 - x^2$

32. R : la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = 0$

33. R : la región comprendida entre las gráficas de $y = x^3$ e $y = x$, en $0 \leq x \leq 1$

34. R : el triángulo de vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) , con $-a \leq b \leq a$.

Área En los Ejercicios 35-38, usar integración simbólica y el resultado del Ejercicio 30 para hallar el área de la región acotada por las gráficas de la ecuación polar.

35. $r = a(1 - \cos \theta)$

36. $r = a \cos 3\theta$

37. $r = 1 + 2 \cos \theta$ (bucle interior)

38. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$

39. **Para pensar** Sea

$$I = \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es un círculo orientado en sentido contrario al de las agujas de un reloj. Probar que $I = 0$ si C no encierra al origen. ¿Cuál es el valor de I si C encierra al origen?

40. a) Sea C el segmento recto que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Probar que

$$\int_C -y dx + x dy = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

b) Sean (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) los vértices de un polígono. Demostrar que el área encerrada es

$$\frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

Área En los Ejercicios 41 y 42, calcular el área encerrada por el polígono cuyos vértices se especifican.

41. Pentágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(-1, 1)$

42. Hexágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(0, 3)$, $(-1, 1)$

43. **Investigación** Consideremos la integral

$$\int_C y^n dx + x^n dy$$

donde C es el contorno de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) e $y = 0$.

- Usando integración simbólica, verificar el teorema de Green para n entero impar entre 1 y 7.
- Usando integración simbólica, verificar el teorema de Green para n entero par entre 2 y 8.
- Formular una conjetura acerca del valor de la integral para un entero impar n arbitrario.

En los Ejercicios 44 y 45, demostrar la identidad, siendo R una región simplemente conexa con borde C . Se supone que las derivadas parciales de f y g involucradas son continuas. Las expresiones $D_N f$ y $D_N g$ son las derivadas en la dirección del vector normal N de C , que apunta hacia fuera, a saber

$$D_N f = \nabla f \cdot N, \quad D_N g = \nabla g \cdot N$$

44. Primera identidad de Green:

$$\int_R \int (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dA = \int_C f D_{NG} ds$$

[Ayuda: Usar la forma alternativa del teorema de Green y la propiedad $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div} \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

45. Segunda identidad de Green:

$$\int_R \int (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dA = \int_C (f D_{NG} - g D_N f) ds$$

(Ayuda: Usar dos veces el Ejercicio 44.)

46. Probar, mediante el teorema de Green, que

$$\int_C f(x) dx + g(y) dy = 0$$

si f y g son funciones derivables y C una curva cerrada simple, suave a trozos.

47. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R . Demostrar que si C es cerrada, simple y suave, y además $N_x = M_y$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

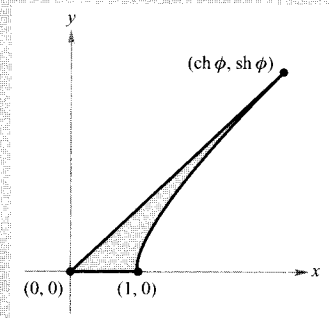
PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Funciones hiperbólicas y trigonométricas

- Dibuje un esbozo de la curva plana definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \text{ch } t \mathbf{i} + \text{sh } t \mathbf{j}$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$. Pruebe que su ecuación rectangular es la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Compruebe el esbozo representando esta hipérbola en una calculadora.
- Sea $P = (\text{ch } \phi, \text{sh } \phi)$ el punto de la hipérbola correspondiente a $\mathbf{r}(\phi)$, con $\phi > 0$. Use la fórmula del área

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

para demostrar que el área de la región indicada en la figura es $\frac{1}{2} \phi$.



- Demuestre que el área de la región indicada viene asimismo dada por la integral

$$A = \int_0^{\text{sh } \phi} (\sqrt{1 + y^2} - (\text{cth } \phi)y) dy$$

Confirme su respuesta del apartado b) aproximando numéricamente esta integral para $\phi = 1, 2, 4$ y 10 .

- Si θ denota el ángulo entre el eje x y el vector posición de un punto (x, y) del círculo $x^2 + y^2 = 1$, el área del sector correspondiente es $\frac{1}{2} \theta$. Es decir, las funciones trigonométricas $f(\theta) = \cos \theta$ y $g(\theta) = \sin \theta$ se pueden definir como las coordenadas del punto $(\cos \theta, \sin \theta)$ del círculo unidad que determina un sector circular de área $\frac{1}{2} \theta$. Escribir unas líneas explicando cómo definir por analogía las funciones hiperbólicas en relación con la «hipérbola unitaria» $x^2 - y^2 = 1$.

- CONTENIDO
- Superficies paramétricas
 - Ecuaciones paramétricas para las superficies
 - Vectores normales y planos tangentes
 - Área de una superficie paramétrica

14.5

Superficies paramétricas

Superficies paramétricas

Ya sabemos cómo representar una curva en el plano o en el espacio por medio de una ecuación paramétrica, o sea, por una función vectorial.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Curva en el plano}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{Curva en el espacio}$$

En esta sección aprenderemos a representar una superficie en el espacio por ecuaciones paramétricas, esto es, por una función vectorial. En el caso de las curvas, la función vectorial \mathbf{r} depende de *una sola* parámetro t . Para las superficies, la función vectorial va a depender de *dos* parámetros u y v .



Algunos programas informáticos son capaces de dibujar superficies definidas en forma paramétrica. Si dispone de uno de ellos, dibuje las superficies que aparecen en los ejemplos y ejercicios de esta sección.

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sean x , y , z funciones de u y v , continuas en un dominio D del plano uv . Se llama **superficie paramétrica** al conjunto de puntos (x, y, z) dados por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

Las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{y} \quad z = z(u, v)$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de la superficie.

Si S es una superficie paramétrica determinada por la función vectorial \mathbf{r} , conforme el punto (u, v) se mueve por el dominio D , el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ traza la superficie S , tal como sugiere la Figura 14.35.

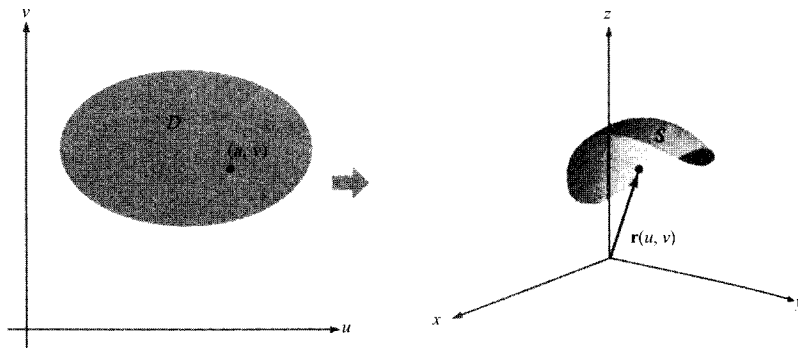


FIGURA 14.35

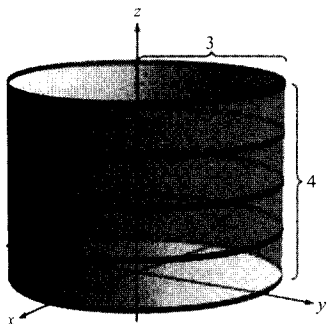


FIGURA 14.36

EJEMPLO 1 Gráfica de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos u \mathbf{i} + 3 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 4$.

Solución: Al ser $x = 3 \cos u$, $y = 3 \sin u$ para todo punto (x, y, z) de la superficie, x e y están relacionadas por la ecuación $x^2 + y^2 = 3^2$. En otras palabras, cada sección de la superficie S , paralela al plano xy , es un círculo de radio 3 centrado en el eje z . Puesto que $z = v$, con $0 \leq v \leq 4$, vemos que la superficie es un cilindro circular recto de altura 4. Su radio es 3 y su eje es el eje z , como se muestra en la Figura 14.36. \square

Al igual que sucedía con las representaciones paramétricas de las curvas, las de las superficies tampoco son únicas. Por ejemplo, hay muchos otros conjuntos de ecuaciones paramétricas admisibles para la superficie de la Figura 14.36.

EJEMPLO 2 Gráfica de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \sin u \cos v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución: Para identificarla recurrimos a identidades trigonométricas con el fin de eliminar los parámetros. Tras algunos ensayos se llega a descubrir que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\sin u \cos v)^2 + (\sin u \sin v)^2 + (\cos u)^2 \\ &= \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así pues, todo punto de S está en la esfera unidad, centrada en el origen (Figura 14.37). Con $u = d_i$ fijado, $\mathbf{r}(u, v)$ traza círculos de latitud

$$x^2 + y^2 = \sin^2 d_i, \quad 0 \leq d_i \leq \pi$$

paralelos al plano xy , y con $v = c_i$ fijado, traza círculos de longitud (meridianos). \square

| Nota. Para convencerse de que la función vectorial del Ejemplo 2 describe toda la esfera unidad, recuerde que las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad y \quad z = \rho \cos \phi$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, describe la conversión de coordenadas rectangulares a esféricas, según vimos en la Sección 10.7.

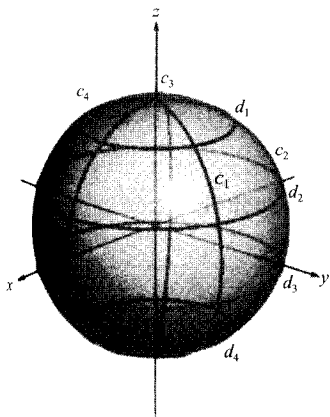


FIGURA 14.37

Ecuaciones paramétricas para las superficies

En los Ejemplos 1 y 2 se pedía identificar la superficie descrita mediante ecuaciones paramétricas. El problema inverso, encontrar ecuaciones paramétricas adecuadas para una superficie dada es, en general, más difícil. Sin embargo, la solución es sencilla en el caso de superficies de la forma $z = f(x, y)$. En efecto, éstas se pueden parametrizar tomando

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

EJEMPLO 3 Representación paramétrica de una superficie

Encontrar ecuaciones paramétricas para el cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que se muestra en la Figura 14.38.

Solución: Puesto que se da la superficie en la forma $z = f(x, y)$, podemos tomar x e y como parámetros, con lo que el cono queda representado por la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$$

donde (x, y) varía por todo el plano. □

Otra clase de superficie fácil de representar paraméricamente la constituyen las superficies de revolución. Por ejemplo, la superficie generada al hacer girar la gráfica de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x se puede parametrizar tomando

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v \quad y \quad z = f(u) \sin v$$

con $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

EJEMPLO 4 Representación paramétrica de una superficie de revolución

Hallar ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución generada al girar

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 10$$

en torno al eje x .

Solución: Tomando u y v como se acaba de decir, se obtiene

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v = \frac{1}{u} \cos v \quad y \quad z = f(u) \sin v = \frac{1}{u} \sin v$$

con $1 \leq u \leq 10$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. La superficie resultante es una porción de la *trompeta de Gabriel* (Figura 14.39). □

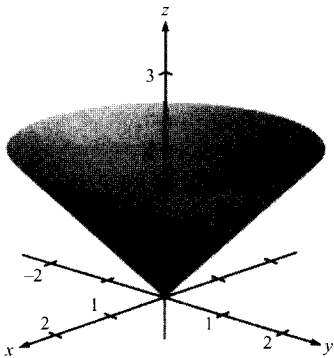


FIGURA 14.38

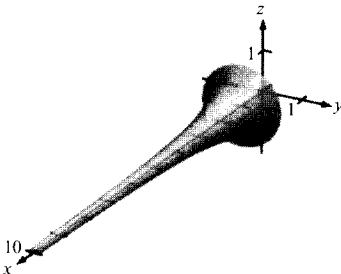


FIGURA 14.39

La superficie de revolución del Ejemplo 4 estaba generada girando la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje x . Otras superficies de revolución admiten parametrizaciones similares. Así, la superficie generada al hacer girar la gráfica de $x = f(z)$ en torno al eje z se puede parametrizar tomando

$$z = u, \quad x = f(u) \cos v \quad y \quad y = f(u) \sin v$$

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

en una región abierta D , y supongamos que x, y, z tienen derivadas parciales continuas sobre D . Las **derivadas parciales de \mathbf{r}** con respecto a u y v se definen como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}$$

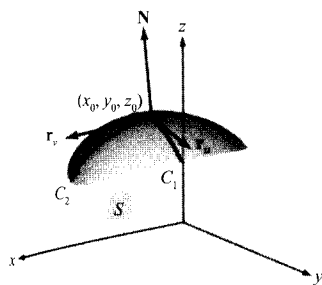


FIGURA 14.40

Cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial interpretable en términos de vectores tangentes. Por ejemplo, si mantenemos $v = v_0$ constante, $\mathbf{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_1 contenida en la superficie S . El vector tangente a C_1 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ viene dado por

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

como se muestra en la Figura 14.40. Análogamente, si mantenemos $u = u_0$ constante, $\mathbf{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un solo parámetro que define una curva C_2 contenida en la superficie S . El vector tangente a C_2 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ es

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

Si el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es no nulo en todos los puntos (u, v) de D , se dice que la superficie S es **suave** y, en tales circunstancias, tiene plano tangente. En términos coloquiales, una superficie es suave si carece de puntos angulosos o cúspides. Así, las esferas, los elipsoides y los paraboloides son suaves, mientras que el cono del Ejemplo 3 no es suave.

VECTOR NORMAL A UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA SUAVE

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D del plano uv y sea (u_0, v_0) un punto en D .
Un vector normal a S en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

viene dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

| Nota. La Figura 14.40 muestra el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El vector $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$, que también es normal a S , apunta en la dirección opuesta.

EJEMPLO 5 Plano tangente a una superficie paramétrica

Hallar una ecuación del plano tangente al paraboloide dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

en el punto $(1, 2, 5)$.

Solución: El punto del plano uv que corresponde al punto $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ es $(u, v) = (1, 2)$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

El vector normal viene dado por

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo cual quiere decir que el vector normal en $(1, 2, 5)$ es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto, la ecuación del plano tangente en $(1, 2, 5)$ es

$$\begin{aligned} -2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) &= 0 \\ -2x - 4y + z &= -5 \end{aligned}$$

La Figura 14.41 muestra este plano tangente. □

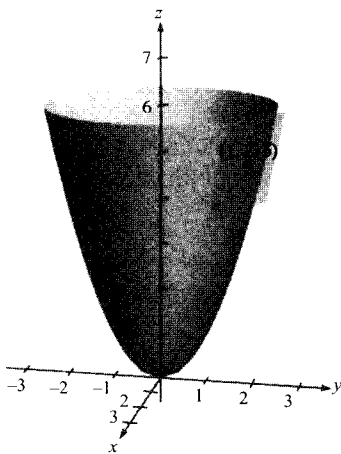


FIGURA 14.41

Área de una superficie paramétrica

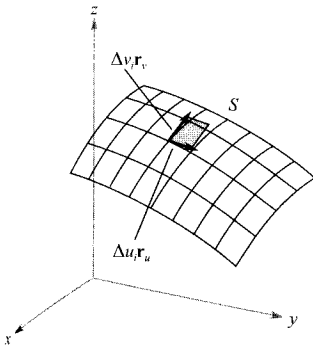
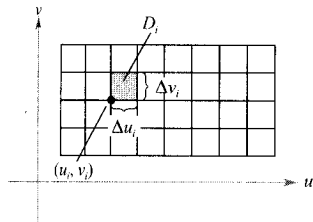


FIGURA 14.42

La definición del área de una superficie paramétrica es similar a la expuesta en la Sección 13.5. Comenzamos construyendo una partición interior de D en n rectángulos, donde el área del i -ésimo rectángulo D_i es $\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_i$ (Figura 14.42). En cada D_i , sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ de la superficie S construimos el plano tangente T_i . El área de la porción de S que corresponde a D_i , ΔT_i , se puede aproximar por un paralelogramo en el plano tangente. Esto es, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por consiguiente, el área de S viene dada por $\Sigma \Delta S_i \approx \Sigma \Delta T_i$. El área del paralelogramo en el plano tangente es

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u_i \Delta v_i$$

lo que conduce a la siguiente definición.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D del plano uv . Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D , el **área de la superficie S** se define como

$$\text{Área de la superficie} = \int_S dS = \int_D \int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

donde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

Para una superficie S dada en la forma $z = f(x, y)$, esta fórmula para el área se reduce a la de la Sección 13.5. En efecto, podemos parametrizar esa superficie tomando la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

definida sobre la región R del plano xy . Al ser

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

vemos que

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$. Esto implica que el área de la superficie S es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \int_R \int \| \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y \| dA \\ &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Área de una superficie

| Nota. La superficie del Ejemplo 6 no satisface la hipótesis de que cada punto suyo corresponda a exactamente uno de D . En esta superficie es $\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}(u, 2\pi)$ para cualquier valor de u . A pesar de ello, como el solapamiento se reduce a un semicírculo (que no tiene área) es válido aplicarle la fórmula que da el área de una superficie paramétrica.

Calcular el área de la esfera unidad dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \text{sen } u \cos v \mathbf{i} + \text{sen } u \text{sen } v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

donde el dominio D viene determinado por $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución: Para empezar, calculamos \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v

$$\mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \text{sen } v \mathbf{j} - \text{sen } u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -\text{sen } u \text{sen } v \mathbf{i} + \text{sen } u \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \text{sen } v & -\text{sen } u \\ -\text{sen } u \text{sen } v & \text{sen } u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \text{sen}^2 u \cos v \mathbf{i} + \text{sen}^2 u \text{sen } v \mathbf{j} + \text{sen } u \cos u \mathbf{k} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\text{sen}^2 u \cos v)^2 + (\text{sen}^2 u \text{sen } v)^2 + (\text{sen } u \cos u)^2} \\ &= \sqrt{\text{sen}^4 u + \text{sen}^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\text{sen}^2 u} \\ &= \text{sen } u \quad \text{sen } u > 0 \text{ para } 0 \leq u \leq \pi \end{aligned}$$

Finalmente, el área de la superficie de la esfera es

$$\begin{aligned} A &= \int_D \int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen } u \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dv = 4\pi \end{aligned}$$

□

EXPLORACIÓN

Para el toro del Ejemplo 7, describa la función $\mathbf{r}(u, v)$ con u fijo. Ídem con v fijo.

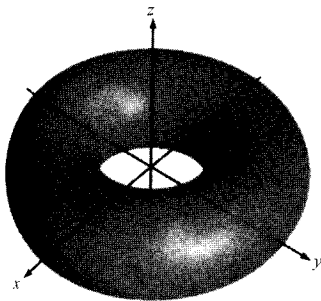


FIGURA 14.43

EJEMPLO 7 Área de una superficie

Calcular el área del toro dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 + \cos u) \cos v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}$$

donde el dominio D viene determinado por $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (Véase Figura 14.43.)

Solución: Empezamos por hallar \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v

$$\mathbf{r}_u = -\sin u \cos v \mathbf{i} - \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u) \sin v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -(2 + \cos u) \sin v & (2 + \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \cos u)(\cos v \cos u \mathbf{i} + \sin v \cos u \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u) \sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\sin v \cos u)^2 + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \\ &= 2 + \cos u \end{aligned}$$

Finalmente, el área de la superficie del toro resulta ser

$$\begin{aligned} A &= \int_D \int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi \, dv = 8\pi^2 \quad \square \end{aligned}$$

Si S es una superficie de revolución, se puede demostrar que la fórmula de la Sección 6.4 es equivalente a la de esta sección. Por ejemplo, supongamos que f es una función no negativa con f' continua en el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución generada al hacer girar la gráfica de f , para $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . Por la Sección 6.4 sabemos que su área es

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Para representar S en forma paramétrica tomamos $x = u$, $y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \sin v$, con $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sin v \mathbf{k}$$

Intente probar que la fórmula

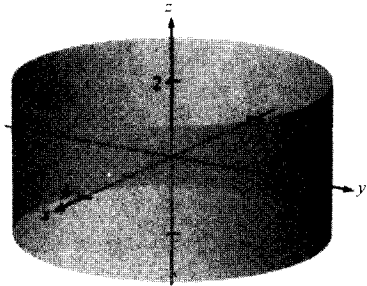
$$\text{Área de la superficie} = \int_D \int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA$$

es equivalente a la fórmula de aquí arriba.

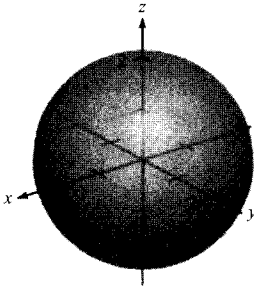
Ejercicios de la Sección 14.5

En los Ejercicios 1-4, asociar cada función vectorial con su gráfica.

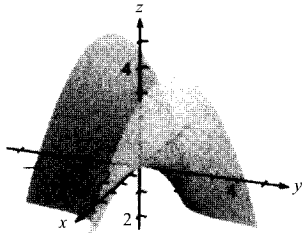
a)



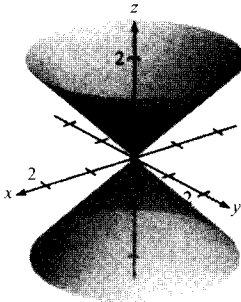
b)



c)



d)

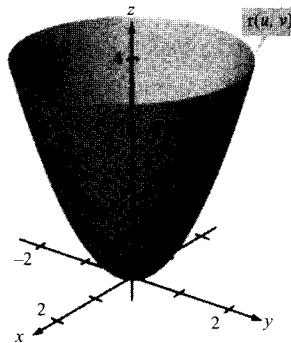


1. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u \mathbf{i} + 2 \cos v \sin u \mathbf{j} + 2 \sin v \mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u \mathbf{i} + 4 \sin u \mathbf{j} + v\mathbf{k}$


En los Ejercicios 5-8, hallar la ecuación rectangular de la superficie eliminando los parámetros de la función vectorial. Identificar la superficie y esbozar su gráfica.

5. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \frac{v}{2}\mathbf{k}$
6. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
7. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(u, v) = 5 \cos v \cos u \mathbf{i} + 5 \cos v \sin u \mathbf{j} + 5 \sin v \mathbf{k}$

Para pensar En los Ejercicios 9-12, explicar en qué difiere la gráfica de la superficie $s(u, v)$ de la gráfica de $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (véase figura), donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (No es necesario dibujar s .)



9. $s(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} - u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
10. $s(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u \sin v \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
11. $s(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
12. $s(u, v) = 4u \cos v \mathbf{i} + 4u \sin v \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

 En los Ejercicios 13-18, representar en una calculadora la superficie dada por la función vectorial.

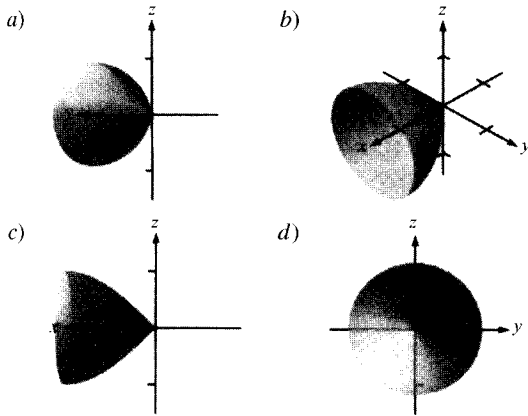
13. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v \mathbf{i} + 2u \sin v \mathbf{j} + u^4\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
14. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u \mathbf{i} + 4 \cos v \sin u \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{sh} u \cos v \mathbf{i} + \operatorname{sh} u \sin v \mathbf{j} + \operatorname{ch} u \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

16. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v \mathbf{i} + 2u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3\pi$
17. $\mathbf{r}(u, v) = (u - \sin u) \cos v \mathbf{i} + (1 - \cos u) \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
18. $\mathbf{r}(u, v) = \cos^3 u \cos v \mathbf{i} + \sin^3 u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
19. **Para pensar** Las cuatro figuras son gráficas de la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin u \sin v \mathbf{k}$$

$$0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

Asociar cada una de ellas con el punto del espacio desde el que está contemplada. Los cuatro puntos, desordenados, son $(10, 0, 0)$, $(-10, 10, 0)$, $(0, 10, 0)$ y $(10, 10, 10)$



20. Dibujar en una calculadora las tres perspectivas de la gráfica de la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k},$$

$$0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

que se ven desde los puntos $(10, 0, 0)$, $(0, 0, 10)$ y $(10, 10, 10)$.

21. **Investigación** Representar en una calculadora el toro

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \mathbf{j} + b \sin v \mathbf{k}$$

para cada conjunto de valores de a y b que se especifica, para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. A la vista de las gráficas resultantes, explicar el efecto de a y b sobre la forma del toro.

- a) $a = 4, b = 1$ b) $a = 4, b = 2$
 c) $a = 8, b = 1$ d) $a = 8, b = 3$

22. **Investigación** Consideremos la función del Ejercicio 16.
- Dibujar su gráfica cuando se fija $u = 1$. Identificar la gráfica obtenida.
 - Dibujar la función manteniendo ahora $v = 2\pi/3$ fijo e identificar la gráfica resultante.
 - Supongamos una superficie representada por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$. ¿Qué conjetura se le ocurre acerca de la gráfica de la función cuando uno de los parámetros se mantiene fijo?

En los Ejercicios 23-30, hallar una función vectorial cuya gráfica produzca la superficie propuesta.

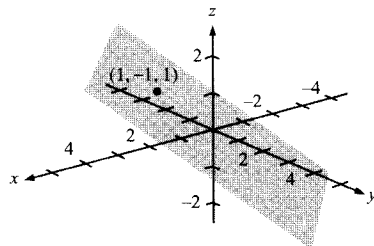
23. El plano $z = y$
24. El plano $x + y + z = 6$
25. El cilindro $x^2 + y^2 = 16$
26. El cilindro $x^2 + 4y^2 = 16$
27. El cilindro $z = x^2$
28. El elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$
29. La parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$
30. La porción del paraboloides $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Superficie de revolución En los Ejercicios 31-34, escribir ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución generada por la gráfica de la función al girar en torno al eje que se especifica.

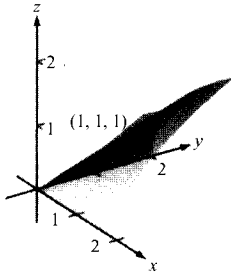
<u>Función</u>	<u>Eje de revolución</u>
31. $y = \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 6$	Eje x
32. $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$	Eje x
33. $y = \sin z, 0 \leq z \leq \pi$	Eje z
34. $y = 4 - y^2, 0 \leq y \leq 2$	Eje y

Plano tangente En los Ejercicios 35-38, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la función vectorial en el punto indicado.

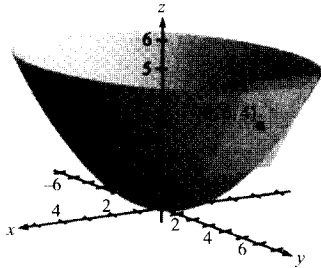
35. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, (1, -1, 1)$



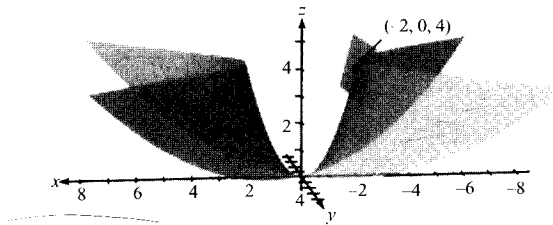
36. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{uv}\mathbf{k}, (1, 1, 1)$



37. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 3u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, (0, 6, 4)$



38. $\mathbf{r}(u, v) = u \cosh v\mathbf{i} + u \sinh v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, (-2, 0, 4)$



Área En los Ejercicios 39-46, calcular el área de la superficie sobre la región indicada y verificar los resultados utilizando integración simbólica en una calculadora.

39. La parte del plano

$$\mathbf{r}(u, v) = 2u\mathbf{i} - \frac{v}{2}\mathbf{j} + \frac{v}{2}\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq \Gamma$

40. La porción del paraboloide

$$\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

41. La parte del cilindro

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\mathbf{i} + a \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq b$

42. La esfera

$$\mathbf{r}(u, v) = a \sin u \cos v\mathbf{i} + a \sin u \sin v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

43. La parte del cono

$$\mathbf{r}(u, v) = au \cos v\mathbf{i} + au \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

44. El toro $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u\mathbf{j} + b \sin v\mathbf{k}$, con $a > b$, $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

45. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v\mathbf{i} + \sqrt{u} \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, con $0 \leq u \leq 4$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

46. La superficie de revolución

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \sin u \cos v\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

47. La superficie de la cúpula de un museo viene dada por $\mathbf{r}(u, v) = 20 \sin u \cos v\mathbf{i} + 20 \sin u \sin v\mathbf{j} + 20 \cos u\mathbf{k}$ con $0 \leq u \leq \pi/3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$ y \mathbf{r} está expresado en metros. Calcular el área de la cúpula.

48. Hallar una función vectorial para el hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y calcular el plano tangente en $(1, 0, 0)$.

49. Representar y calcular el área de la rampa espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

50. Sea f una función no negativa tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$. Sea la superficie de revolución generada al hacer girar la gráfica de f , en $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . Sean $x = u, y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \sin v$, con $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces S se expresa paraméricamente como

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u) \cos v\mathbf{j} + f(u) \sin v\mathbf{k}$$

Probar que las fórmulas siguientes son equivalentes.

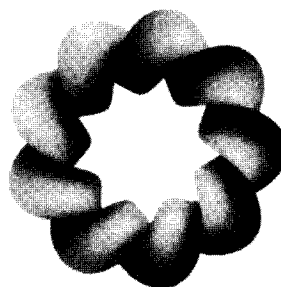
$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Área de la superficie} = \int_D \int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

51. **Proyecto abierto** Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 3 + \operatorname{sen} u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)] \\ y &= 3 + \operatorname{cos} u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)] \\ z &= \operatorname{sen}(3u - 2v) + 2 \operatorname{sen}(3u + v) \end{aligned}$$

donde $-\pi \leq u \leq \pi$ y $-\pi \leq v \leq \pi$, representan la superficie de la figura. Intente crear su propia superficie paramétrica utilizando cálculo simbólico.



14.6
Integrales de superficie

- CONTENIDO ▪
- Integrales de superficie ▪
- Superficies paramétricas e integrales de superficie ▪
- Orientación de una superficie ▪
- Integrales de flujo ▪

Integrales de superficie

El resto de este capítulo estudia básicamente las **integrales de superficie**. Comenzaremos considerando superficies dadas por $z = g(x, y)$ para pasar, más adelante, a superficies dadas en forma paramétrica.

Sean S la superficie de ecuación $z = g(x, y)$ y R su proyección sobre el plano xy (Figura 14.44). Suponemos que g, g_x, g_y son continuas en todos los puntos de R y que f está definida sobre S . Copiando el proceso seguido en la Sección 13.5 para calcular el área de una superficie, evaluamos f en (x_i, y_i, z_i) y formamos la suma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

donde $\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i$. Si existe límite cuando $\|\Delta\|$ se hace tender a 0, la **integral de superficie de f sobre S** se define como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

Esta integral se puede calcular como una integral doble.

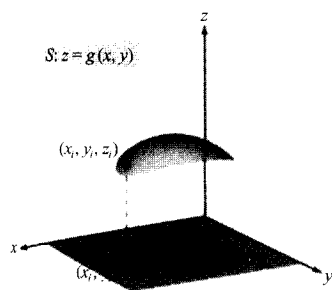


FIGURA 14.44
La función escalar f asigna un número a cada punto de S .

TEOREMA 14.10

CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sean S una superficie de ecuación $z = g(x, y)$ y R su proyección sobre el plano xy . Si g, g_x, g_y son continuas en R y f es continua en S , la integral de superficie de f sobre S viene dada por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA$$

Para superficies descritas por funciones de x, z (o de y, z) deben efectuarse los siguientes ajustes en el Teorema 14.10. Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R su proyección sobre el plano xz , entonces

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \int_R \int f(x, g(x, z), z) \sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2} dA$$

Y si S es la gráfica de $x = g(y, z)$ y R su proyección sobre el plano yz , entonces

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \int_R \int f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} dA$$

| Nota. Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie S . Por ejemplo, supongamos que S es el plano $z = x$, con $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. El área de esa superficie es $\sqrt{2}$ unidades cuadradas. Intente comprobar que $\int_S \int f(x, y, z) dS = \sqrt{2}$.

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral de superficie

Calcular la integral de superficie

$$\int_S \int (y^2 + 2yz) dS$$

donde S es la porción del primer octante del plano $2x + y + 2z = 6$.

Solución: Para empezar, escribimos S como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

Utilizando las derivadas parciales $g_x(x, y) = -1$ y $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$, vemos que

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

A la vista de la Figura 14.45 y del Teorema 14.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_S \int (y^2 + 2yz) dS &= \int_R \int f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA \\ &= \int_R \int \left[y^2 + 2y \left(\frac{1}{2} \right) (6 - 2x - y) \right] \left(\frac{3}{2} \right) dA \\ &= 3 \int_0^3 \int_0^{2(3-x)} y(3-x) dy dx \\ &= 6 \int_0^3 (3-x)^3 dx \\ &= -\frac{3}{2} (3-x)^4 \Big|_0^3 \\ &= \frac{243}{2} \end{aligned}$$

□

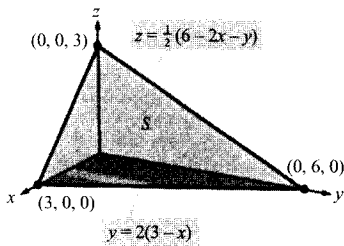


FIGURA 14.45

Una solución alternativa del Ejemplo 1 consistiría en proyectar S sobre el plano yz , como indica la Figura 14.46, con lo que se tendría $x = \frac{1}{2}(6 - y - 2z)$, y

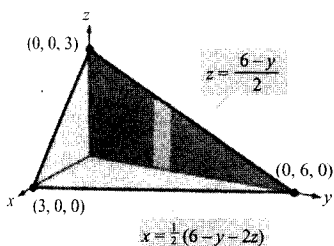


FIGURA 14.46

$$\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned} \int_S \int (y^2 + 2yz) \, dS &= \int_R \int f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} \, dA \\ &= \int_0^6 \int_0^{(6-y)/2} (y^2 + 2yz) \left(\frac{3}{2}\right) \, dz \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_0^6 (36y - y^3) \, dy \\ &= \frac{243}{2} \end{aligned}$$

Como ejercicio, resuelva el Ejemplo 1 proyectando S sobre el plano xz .

En el Ejemplo 1 podríamos haber proyectado la superficie S sobre cualquiera de los tres planos de coordenadas. En el Ejemplo 2, la superficie S es parte de un cilindro centrado en el eje x , y se puede elegir entre proyectarla sobre el plano xz o sobre el plano xy .

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral de superficie

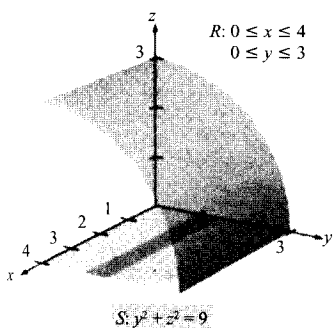


FIGURA 14.47

Calcular la integral de superficie

$$\int_S \int (x + z) \, dS$$

donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$ (Figura 14.47).

Solución: Proyectamos S sobre el plano xy , de manera que $z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \end{aligned}$$

El Teorema 14.10 no es aplicable porque g_y no es continua para $y = 3$. No obstante, lo podemos aplicar para $0 \leq b < 3$ y a continuación hacer tender b a 3, como sigue.

$$\begin{aligned}
 \int_S \int (x+z) \, dS &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \int_0^b \int_0^4 (x + \sqrt{9-y^2}) \frac{3}{\sqrt{9-y^2}} \, dx \, dy \\
 &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9-y^2}} + 1 \right) \, dx \, dy \\
 &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left[\frac{x^2}{2\sqrt{9-y^2}} + x \right]_0^4 \, dy \\
 &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9-y^2}} + 4 \right) \, dy \\
 &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left[4y + 8 \arcsen \frac{y}{3} \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left(4b + 8 \arcsen \frac{b}{3} \right) \\
 &= 36 + 24 \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 36 + 12\pi
 \end{aligned}$$

□



Algunos programas de integración simbólica son capaces de calcular integrales impropias. Si tiene acceso a uno de ellos, calcule con su ayuda la integral impropia

$$\int_0^3 \int_0^4 (x + \sqrt{9-y^2}) \frac{3}{\sqrt{9-y^2}} \, dx \, dy$$

¿Coincide el resultado con el obtenido en el Ejemplo 2?

Ya hemos dicho que si la función f definida sobre la superficie S es simplemente $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie da el *área de la superficie* S .

$$\text{Área de la superficie} = \int_S \int 1 \, dS$$

Por otra parte, si S es una lámina de densidad variable y $\rho(x, y, z)$ es su densidad en el punto (x, y, z) , la masa de la lámina viene dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \int_S \int \rho(x, y, z) \, dS$$

EJEMPLO 3 Masa de una lámina bidimensional

La Figura 14.48 muestra una lámina bidimensional S con la forma del cono

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4$$

En cada punto de S la densidad es proporcional a su distancia al eje z . Hallar la masa de esa lámina.

Solución: La proyección de S sobre el plano xy da

$$S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y), \quad 0 \leq z \leq 4$$

$$R: x^2 + y^2 \leq 4$$

con densidad $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando una integral de superficie, la masa se calcula así:

$$\begin{aligned} m &= \int_S \int \rho(x, y, z) \, dS \\ &= k \int_S \int k\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= k \int_S \int \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}} \, dA \\ &= \int_S \int \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{5}r) r \, dr \, d\theta \quad \text{Coordenadas polares} \\ &= \frac{\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} r^3 \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3} \end{aligned}$$

□

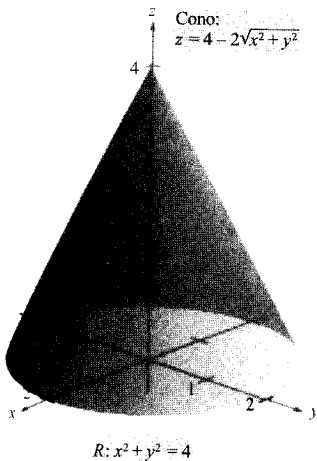
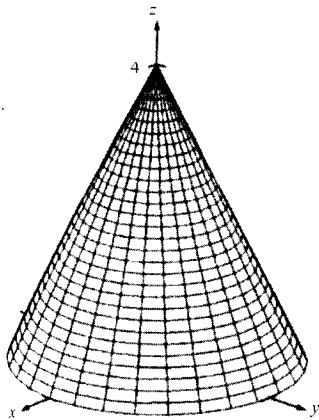


FIGURA 14.48
Densidad: $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.



Confirme el resultado del Ejemplo 3 utilizando integración simbólica en una calculadora. Con *Derive*, por ejemplo, se obtiene

$$k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

Para una superficie S determinada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

definida sobre una región D del plano uv , se puede demostrar que la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre S viene dada por

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \int_D \int f(x(u, v), y(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dA$$

Conviene observar la analogía con una integral de línea sobre una curva espacial C .

$$\int_C f(x, y, z) dS = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad \text{Integral de línea}$$

| Nota. Nótese que ds y dS se pueden expresar como $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ y $dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dA$.

EJEMPLO 4 Cálculo de una integral de superficie

En el Ejemplo 2 se calculó la integral de superficie

$$\int_S \int (x + z) dS$$

donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$ (Figura 14.49). Calcular esa misma integral en forma paramétrica.

Solución: En forma paramétrica la superficie se expresa

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3 \cos \theta \mathbf{j} + 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para calcular esa integral en forma paramétrica, necesitamos calcular previamente lo siguiente.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -3 \sin \theta \mathbf{j} + 3 \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin \theta & 3 \cos \theta \end{vmatrix} = -3 \cos \theta \mathbf{j} - 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{9 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} = 3$$

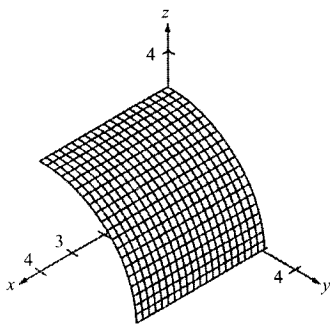


FIGURA 14.49

Por consiguiente, el cálculo de la integral de superficie procede así:

$$\begin{aligned} \int_D \int (x + 3 \operatorname{sen} \theta) 3 \, dA &= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (3x + 9 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \, dx \\ &= \int_0^4 \left[3x\theta - 9 \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2} x + 9 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4} x^2 + 9x \right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36 \end{aligned}$$

□

Orientación de una superficie

Con el fin de inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores normales unitarios. Una superficie se dice que es **orientable** si se puede definir en cada uno de sus puntos un vector normal unitario \mathbf{N} , de manera tal que estos vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S .

Una superficie orientable tiene dos caras distintas. Al orientarla, estaremos eligiendo uno de los dos vectores normales unitarios que hay en cada punto. Si S es una superficie cerrada, una esfera pongamos por caso, se suele elegir el vector normal que apunta hacia fuera.

La mayoría de las superficies familiares, esferas, paraboloides, elipses y planos, son orientables. (En el Ejercicio 37 se da un ejemplo de superficie no orientable.) Además, en una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una vía conveniente para hallar un vector normal unitario. En efecto, dada una superficie orientable S de ecuación

$$z = g(x, y) \quad \text{Superficie orientable}$$

hagamos

$$G(x, y, z) = z - g(x, y)$$

Entonces, S se puede orientar mediante cualquiera de los vectores normales unitarios

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \quad \text{Normal unitario hacia fuera} \\ \mathbf{N} &= \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \quad \text{Normal unitario hacia dentro} \end{aligned}$$

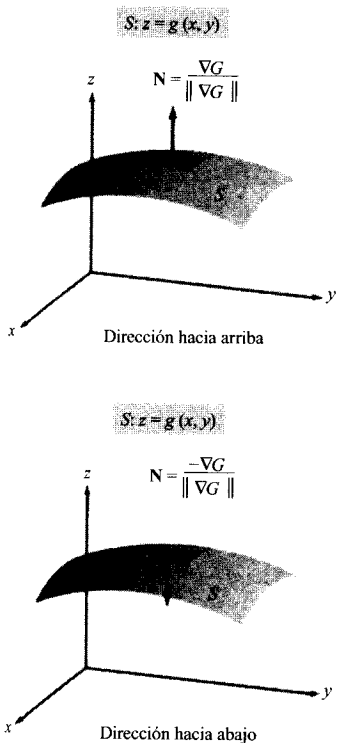


FIGURA 14.50

como muestra la Figura 14.50. Si la superficie orientable suave S viene dada en forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

los vectores normales unitarios son

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}$$

| Nota. Si la superficie orientable viene dada como $y = g(x, z)$ o $x = g(y, z)$, se puede orientar la superficie usando el vector gradiente

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = y - g(x, z)$$

o bien

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = x - g(y, z)$$

Integrales de flujo

Una de las principales aplicaciones de la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S . Sea S una superficie orientada sumergida en un fluido cuyo campo de velocidades \mathbf{F} es continuo. Sea ΔS el área de una pequeña porción de S sobre la cual \mathbf{F} es prácticamente constante. En tales circunstancias, la cantidad de flujo que atraviesa esa región por unidad de tiempo puede aproximarse por el volumen de la columna de altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$, que se ilustra en la Figura 14.51. Esto es,

$$\Delta V = (\text{altura})(\text{área de la base}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \Delta S$$

En consecuencia, el volumen de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (lo que se conoce como **el flujo de \mathbf{F} a través de S**) viene dado por la integral de superficie de la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE FLUJO

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M , N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S , orientada por un vector normal unitario \mathbf{N} . La **integral de flujo de \mathbf{F} a través de S** se define como

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

Geoméricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la componente normal de \mathbf{F} . Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z) , la integral de flujo

$$\int_S \int \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

representa la *masa* del fluido que atraviesa S por unidad de tiempo.

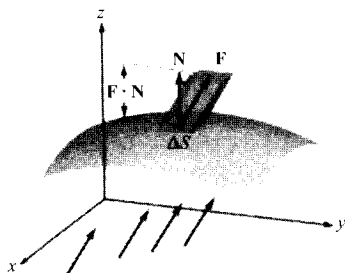


FIGURA 14.51

El campo de velocidades \mathbf{F} indica la dirección del flujo de fluido.

Para calcular una integral de flujo relativa a una superficie de ecuación $z = g(x, y)$, denotemos $G(x, y, z) = z - g(x, y)$. Entonces, $\mathbf{N} dS$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{N} dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} dA \\ &= \nabla G(x, y, z) dA\end{aligned}$$

TEOREMA 14.11 CÁLCULO DE INTEGRALES DE FLUJO

Sea S una superficie orientada de ecuación $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dA && \text{Orientada hacia arriba} \\ \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}] dA && \text{Orientada hacia abajo}\end{aligned}$$

Para la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba y para la segunda, hacia abajo.

EJEMPLO 5 Cálculo del flujo de masa mediante una integral de flujo

Sea S la porción del paraboloido

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

situada por encima del plano xy , orientada por un vector normal unitario dirigido hacia arriba (Figura 14.52). El flujo de un fluido de densidad constante ρ a través de la superficie S viene descrito por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Hallar el ritmo de flujo de masa a través de S .

Solución: Para empezar, calculamos las derivadas parciales de g

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

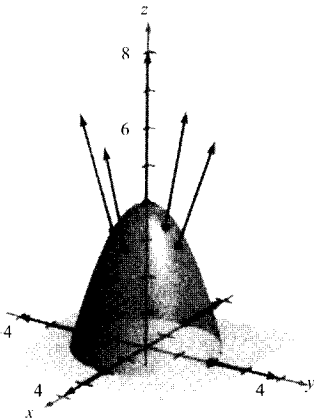


FIGURA 14.52

El ritmo de flujo de masa a través de la superficie S es

$$\begin{aligned}
 \int_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \rho \int_R \int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dS \\
 &= \rho \int_R \int [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}] \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dS \\
 &= \rho \int_R \int [2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)] \, dA \\
 &= \rho \int_R \int (4 + x^2 + y^2) \, dA \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2)r \, dr \, d\theta \quad \text{Coordenadas polares} \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} 12 \, d\theta \\
 &= 24\pi\rho
 \end{aligned}$$

□

Para una superficie orientada S definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

definida sobre una región D del plano uv , se puede definir la integral de flujo de \mathbf{F} a través de S como

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_D \int \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \\
 &= \int_D \int \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA
 \end{aligned}$$

Nótese el parecido de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

En la página 1360 se ofrece un resumen de fórmulas relativas a las integrales de línea y de superficie.

EJEMPLO 6 Flujo de un campo cuadrático inverso

Calcular el flujo a través de la esfera S de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{Esfera } S$$

donde \mathbf{F} es el campo cuadrático inverso dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{q}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{q\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad \text{Campo cuadrático inverso } \mathbf{F}$$

y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Suponemos S orientada hacia arriba, como en la Figura 14.53.

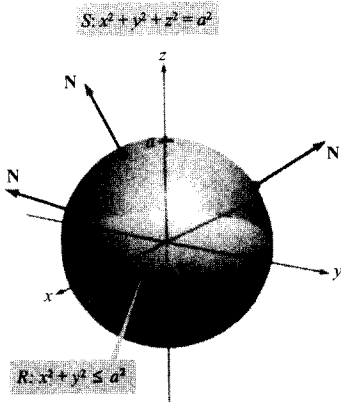


FIGURA 14.53

Solución: La esfera viene dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \\ &= a \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}\end{aligned}$$

con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \operatorname{sen} v \mathbf{j} - a \operatorname{sen} u \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{j}$$

lo cual implica que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u \\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v \mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u \mathbf{k})\end{aligned}$$

Ahora, recordando que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{q\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \\ &= q \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3} \\ &= \frac{q}{a^3} (a \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k})\end{aligned}$$

podemos deducir que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \frac{q}{a^3} [(a \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}) \cdot \\ &\quad \cdot a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v \mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u \mathbf{k})] \\ &= q(\operatorname{sen}^3 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen} u \cos^2 u) \\ &= q \operatorname{sen} u\end{aligned}$$

Finalmente, el flujo a través de la esfera S resulta ser

$$\begin{aligned}\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_D \int (q \operatorname{sen} u) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q \operatorname{sen} u \, du \, dv \\ &= 4\pi q\end{aligned}$$

□

El resultado del Ejemplo 6 muestra que el flujo que atraviesa la esfera S en un campo cuadrático inverso es independiente del radio de S . En particular, si \mathbf{E} es un campo eléctrico, el resultado del Ejemplo 6, junto con la ley de Coulomb, dan lugar a una de las leyes fundamentales de la electrostática, la **ley de Gauss**:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} \, dS = 4\pi q \quad \text{Ley de Gauss}$$

donde q es una carga puntual situada en el centro de la esfera. La ley de Gauss es válida para superficies cerradas generales que contengan en su interior al origen y establece una relación entre el flujo que sale a través de la superficie con la carga total que hay en su interior.

Finalizamos esta sección con un resumen de las diversas formas que adoptan las integrales de línea y las integrales de superficie.

Resumen de integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$$

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \, ds \quad \text{Forma escalar}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \quad \text{Forma vectorial}$$

Integrales de superficie [$z = g(x, y)$]:

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA$$

$$\int_S \int f(x, y, z) \, dS = \int_R \int f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \quad \text{Forma escalar}$$

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_R \int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \quad \text{Forma vectorial (normal hacia arriba)}$$

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, dA$$

$$\int_S \int f(x, y, z) \, dS = \int_D \int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, dS \quad \text{Forma escalar}$$

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_D \int \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA \quad \text{Forma vectorial}$$

Ejercicios de la Sección 14.6

En los Ejercicios 1-4, calcular $\int_S \int (x - 2y + z) dS$.

1. $S: z = 4 - x, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$
2. $S: z = 10 - 2x + 2y, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$
3. $S: z = 10, x^2 + y^2 \leq 1$
4. $S: z = \frac{2}{3}x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$

En los Ejercicios 5 y 6, calcular $\int_S \int xy dS$.

5. $S: z = 6 - x - 2y$, primer octante
6. $S: z = h, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

En los Ejercicios 7 y 8, calcular, usando integración simbólica en una calculadora, $\int_S \int xy dS$.

7. $S: z = 9 - x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x$
8. $S: z = xy, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

En los Ejercicios 9 y 10, calcular, usando integración simbólica en una calculadora, $\int_S \int (x^2 - 2xy) dS$.

9. $S: z = 10 - x^2 - y^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
10. $S: z = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x$

En los Ejercicios 11-14, calcular $\int_S \int f(x, y) dS$.

11. $f(x, y) = y + 5$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \frac{v}{2}\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$
12. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2$
13. $f(x, y) = xy$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2$
14. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \pi$

En los Ejercicios 15-20, calcular $\int_S \int f(x, y, z) dS$.

15. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: z = x + 2, x^2 + y^2 \leq 1$
16. $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 $S: z = x^2 + y^2, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$
17. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 4$
18. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$
19. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 9$
20. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq x$

En los Ejercicios 21-26, hallar el flujo de \mathbf{F} a través de S , $\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$, donde \mathbf{N} es el vector unitario normal a S que apunta hacia arriba.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 $S: x + y + z = 1$, primer octante
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 $S: 2x + 3y + z = 6$, primer octante
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$, primer octante
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 $S: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

En los Ejercicios 27 y 28, hallar el flujo de \mathbf{F} a través de la superficie cerrada. (Tomar como \mathbf{N} el vector unitario normal a la superficie que apunta hacia fuera.)

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$
 S : cubo unidad acotado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$

Masa En los Ejercicios 29 y 30, calcular la masa de la lámina bidimensional S de densidad ρ .

29. $S: 2x + 3y + 6z = 12$, primer octante, $\rho = (x, y, z) = x^2 + y^2$

30. $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $\rho(x, y, z) = kz$

Momento de inercia En los Ejercicios 31 y 32, utilizar las siguientes fórmulas para los momentos de inercia, respecto de los ejes de coordenadas, de una lámina bidimensional de densidad ρ .

$$I_x = \int_S \int (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS$$

$$I_y = \int_S \int (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS$$

$$I_z = \int_S \int (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dS$$

31. Probar que el momento de inercia de una capa cónica respecto de su eje es $\frac{1}{2}ma^2$, donde m denota la masa y a el radio.

32. Demostrar que el momento de inercia de una capa esférica, de densidad uniforme, respecto de su diámetro es $\frac{3}{8}ma^2$, donde m denota la masa y a el radio.

Momento de inercia En los Ejercicios 33 y 34, calcular I_z para la lámina que se especifica con densidad uniforme igual a 1. Verificar los resultados mediante integración simbólica en una calculadora.

33. $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$

34. $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$

Ritmo de flujo En los Ejercicios 35 y 36, utilizar integración simbólica en una calculadora para hallar el ritmo de masa de fluido de densidad ρ que atraviesa la superficie S , orientada hacia arriba, si el campo de velocidades viene dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 0.5z\mathbf{k}$.

35. $S: z = 16 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$

36. $S: z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

37. **Investigación**

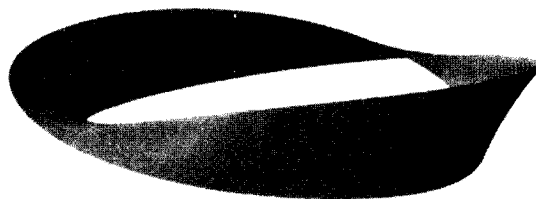
a) Representar, con ayuda de una calculadora, la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (4 - v \sin u) \cos(2u)\mathbf{i} + \\ &+ (4 - v \sin u) \sin(2u)\mathbf{j} + v \cos u\mathbf{k}, \\ 0 &\leq u \leq \pi, -1 \leq v \leq 1 \end{aligned}$$

Esta superficie se conoce como banda de Möbius.

- b) Explicar por qué no es orientable esa superficie.
 c) Representar en la calculadora la curva espacial definida por $\mathbf{r}(u, 0)$ e identificarla.
 d) Construir una banda de Möbius cortando una tira de papel (o usando un trozo de cinta de papel de una caja registradora), pegando a continuación sus extremos tras girar uno de ellos 180° .
 e) Cortar la banda de Möbius a lo largo de la curva espacial representada en el apartado c) y describir el resultado.

38. ¿Es orientable la superficie de la figura adjunta?



Doble giro

39. **Carga eléctrica** Sea $\mathbf{E} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ un campo electrostático. Averiguar, utilizando la ley de Gauss, la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy .

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Hiperboloide de una hoja Considere la superficie paramétrica definida por la función

$$\mathbf{r}(u, v) = a \operatorname{ch} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{ch} u \sin v\mathbf{j} + b \operatorname{sh} u\mathbf{k}$$

- a) Represente \mathbf{r} , en una calculadora, para varios valores de las constantes a y b . Describa el efecto de las constantes sobre la forma de la superficie.
 b) Pruebe que la superficie es el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

c) Fijando valores $u = u_0$, describa las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u_0, v) = a \operatorname{ch} u_0 \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{ch} u_0 \sin v\mathbf{j} + b \operatorname{sh} u_0\mathbf{k}$$

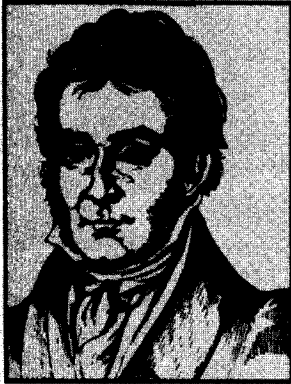
d) Fijando valores $v = v_0$, describa las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a \operatorname{ch} u \cos v_0\mathbf{i} + a \operatorname{ch} u \sin v_0\mathbf{j} + b \operatorname{sh} u\mathbf{k}$$

e) Hallar un vector normal a la superficie en $(u, v) = (0, 0)$.

CONTENIDO ■

- Teorema de la divergencia
- Flujo y el teorema de la divergencia



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

El teorema de la divergencia se llama también teorema de Gauss, en honor del famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Gauss, junto a Arquímedes y Newton, están considerados como los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos. Entre sus abundantes contribuciones demostró, a los 22 años y como parte de su trabajo de tesis doctoral, el *teorema fundamental del Álgebra*.

Nota. El teorema de la divergencia se llama indistintamente teorema de Gauss o también teorema de Ostrogradski, en honor del matemático ruso Michel Ostrogradski (1801-1861).



14.7

Teorema de la divergencia

Teorema de la divergencia

Recordemos de la Sección 14.4 que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \int_R \int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA\end{aligned}$$

Análogamente, el **teorema de la divergencia** relaciona una integral triple sobre una región sólida Q con una integral de superficie sobre la superficie de Q . En el enunciado del teorema, la superficie S es cerrada, en el sentido de ser el borde completo del sólido Q . Las regiones acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros o combinaciones de estas superficies, son ejemplos típicos de superficies cerradas. Supongamos que Q es una región sólida sobre la que se desea evaluar una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada con vectores normales unitarios que apuntan *hacia el exterior*, como indica la Figura 14.54. Bajo esas restricciones relativas a S y Q , es válido el siguiente teorema.

TEOREMA 14.12 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea Q una región sólida acotada por una superficie cerrada S , orientada por vectores normales unitarios dirigidos hacia el exterior de Q . Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q , entonces

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_Q \int \int \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Demostración: Escribiendo $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, el teorema afirma que

$$\begin{aligned}\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_S \int (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}) \, dS \\ &= \int_Q \int \int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV\end{aligned}$$

Puede demostrarse esta igualdad verificando que las tres ecuaciones siguientes son ciertas.

$$\begin{aligned}\int_S \int \mathbf{M}\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_Q \int \int \frac{\partial M}{\partial x} \, dV \\ \int_S \int N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_Q \int \int \frac{\partial N}{\partial y} \, dV \\ \int_S \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_Q \int \int \frac{\partial P}{\partial z} \, dV\end{aligned}$$

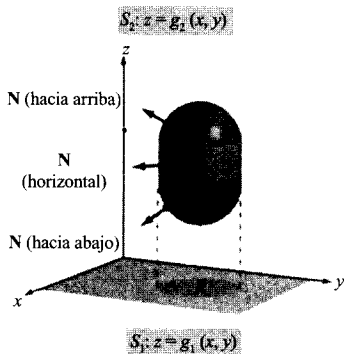


FIGURA 14.55

Como las tres comprobaciones son similares, vamos a detallar solamente la tercera. Restringimos la demostración a una **región sólida simple** con superficie superior

$$z = g_2(x, y) \quad \text{Superficie superior}$$

y superficie inferior

$$z = g_1(x, y) \quad \text{Superficie inferior}$$

cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y constituyen la región R . Si Q tiene una superficie lateral S_3 , como en la Figura 14.55, en ella un vector normal es horizontal, de manera que $P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0$. Por consiguiente,

$$\int_S \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_{S_1} \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + \int_{S_2} \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + 0$$

En la superficie superior S_2 , los vectores normales dirigidos hacia el exterior apuntan hacia arriba, mientras que en la superficie inferior S_1 apuntan hacia abajo. Por el Teorema 14.11, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_R \int P(x, y, g_1(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= - \int_R \int P(x, y, g_1(x, y)) \, dA \\ \int_{S_2} \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_R \int P(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= \int_R \int P(x, y, g_2(x, y)) \, dA\end{aligned}$$

Sumando estos resultados llegamos a la conclusión de que

$$\begin{aligned}\int_S \int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_R \int [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))] \, dA \\ &= \int_R \int \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right] dA \\ &= \int_Q \int \int \frac{\partial P}{\partial z} \, dV\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de la divergencia

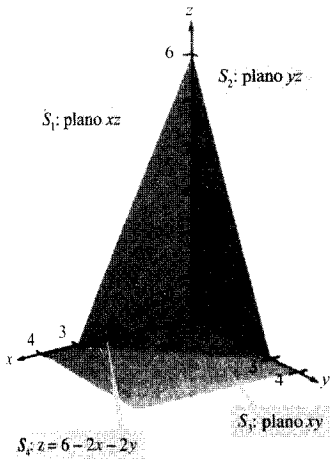


FIGURA 14.56

Sea Q la región sólida acotada por los planos de coordenadas y por el plano $2x + 2y + z = 6$, y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q .

Solución: En la Figura 14.56 vemos que Q está acotada por cuatro porciones de superficie. En consecuencia, serían necesarias cuatro integrales de superficie para calcular

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$


Sin embargo, el teorema de la divergencia permite llegar al resultado con sólo una integral triple. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= 1 + 2y + 1 \\ &= 2 + 2y \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_Q \int \int \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz) \Big|_0^{6-2x-2y} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2 \right]_0^{3-y} \, dy \\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) \, dy \\ &= \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{63}{2} \end{aligned}$$

□



Si dispone de una calculadora capaz de calcular integrales triples por integración simbólica, intente comprobar el resultado del Ejemplo 1. Observe que el primer paso de esa comprobación consiste en pasar la integral a una integral iterada, lo cual debe hacerse a mano. Con el fin de adquirir práctica en este importante paso, calcule los límites de integración de las siguientes integrales iteradas y use una calculadora para verificar que el valor coincide con el obtenido en el Ejemplo 1.

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dy \, dz \, dx,$$

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dx \, dy \, dz,$$

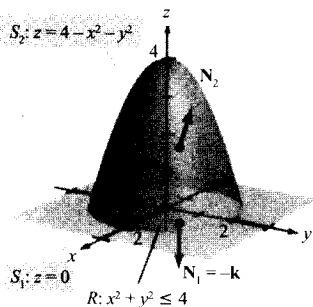


FIGURA 14.57

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida entre el paraboloides

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

y el plano xy . Verificar el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

Solución: En la Figura 14.57 vemos que el vector normal a la superficie S_1 que apunta hacia fuera es $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{k}$, mientras que el de la superficie S_2 es

$$\mathbf{N}_2 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Así pues, por el Teorema 14.11 sabemos que

$$\begin{aligned} \int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_{S_1} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \int_{S_2} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= \int_{S_1} \int \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS + \int_R \int \mathbf{F} \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_R \int -y^2 \, dA + \int_R \int (4xz + 2xy + y^2) \, dA \\ &= -\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2 \, dx \, dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy] \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 0 \, dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} [2z] + \frac{\partial}{\partial y} [x] + \frac{\partial}{\partial z} [y^2] = 0 + 0 + 0 = 0$$

podemos aplicar el teorema de la divergencia para obtener el resultado equivalente

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int \int \int_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int \int \int_Q 0 \, dV = 0 \quad \square$$

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q el sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ y el plano xy (Figura 14.58). Calcular

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S denota la superficie de Q y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}$$

Solución: La evaluación directa de esta integral sería ardua. Sin embargo, el teorema de la divergencia permite calcularla del siguiente modo.

$$\begin{aligned} \int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int \int \int_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int \int \int_Q (2x + x + 0) \, dV \\ &= \int \int \int_Q 3x \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r\cos\theta} (3r \cos \theta)r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (18r^2 \cos \theta - 3r^2 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (48 \cos \theta - 12 \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \left[48 \operatorname{sen} \theta - 6 \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -12\pi \end{aligned}$$

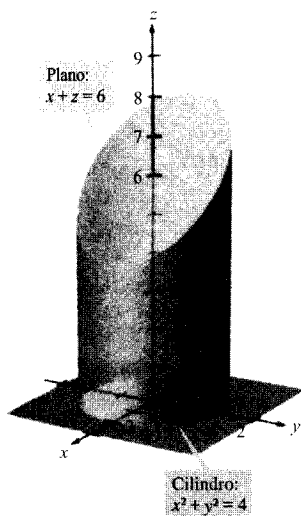


FIGURA 14.58

En el cálculo de la integral triple hemos utilizado coordenadas cilíndricas, con $x = r \cos \theta$ y $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$. \square

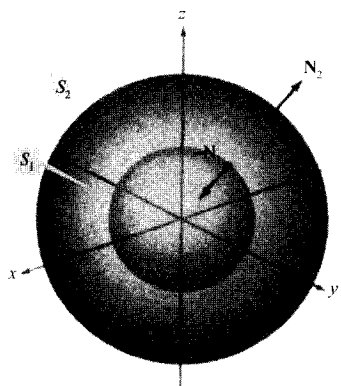


FIGURA 14.59

Aunque sólo hemos enunciado el teorema de la divergencia para una región sólida simple Q acotada por una superficie cerrada, el teorema es válido también para regiones que sean unión de regiones sólidas simples. Por ejemplo, sea Q el sólido acotado por las superficies cerradas S_1 y S_2 de la Figura 14.59. Para aplicar el teorema de la divergencia a este sólido, tomamos $S = S_1 \cup S_2$. El vector normal \mathbf{N} a S viene dado por $-\mathbf{N}_1$ sobre S_1 y por \mathbf{N}_2 sobre S_2 . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \end{aligned}$$

Flujo y el teorema de la divergencia

Con el fin de descifrar el significado del teorema de la divergencia, consideremos los dos miembros de la ecuación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

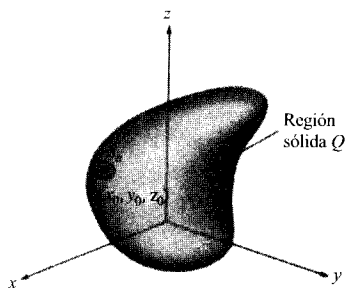


FIGURA 14.60

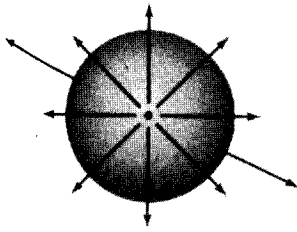
Por la Sección 14.6 sabemos que la integral de flujo de la izquierda determina el flujo total que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo. Esto puede aproximarse sumando el flujo que atraviesa pequeños fragmentos de la superficie. La integral triple de la derecha mide ese mismo flujo a través de S , pero desde una perspectiva distinta, a saber, calculando el flujo de fluido que entra en (o sale de) pequeños cubos de volumen ΔV_i . El flujo del i -ésimo cubo es aproximadamente

$$\text{Flujo del } i\text{-ésimo cubo} \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

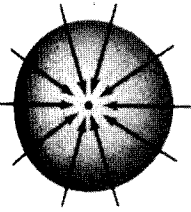
donde (x_i, y_i, z_i) denota algún punto del i -ésimo cubo. Nótese que para un cubo interior a Q la ganancia (o pérdida) a través de una de sus caras es compensada por la correspondiente pérdida (o ganancia) de una de las caras del cubo adyacente. Tras sumar sobre todos los cubos de Q , el único flujo que no se cancela por cubos adyacentes es el de las caras exteriores de los cubos del borde. Por tanto, la suma

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

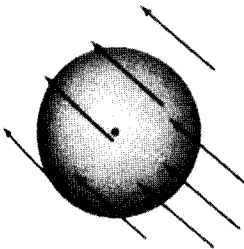
aproxima el flujo total que entra en (o sale de) Q y, en consecuencia, el flujo que atraviesa la superficie S .



a) Fuente: $\text{div } \mathbf{F} > 0$



b) Sumidero: $\text{div } \mathbf{F} < 0$



c) Incompresible: $\text{div } \mathbf{F} = 0$

FIGURA 14.61

Nota. En hidrodinámica, una *fente* es un punto por el que se está introduciendo fluido adicional en la región ocupada por el fluido. Un *sumidero* es un punto por el que escapa fluido.

Para entender qué significa la divergencia de \mathbf{F} en un punto, consideremos el volumen ΔV_α de una pequeña esfera S_α de radio α centrada en (x_0, y_0, z_0) , contenida en la región Q (Figura 14.60). Aplicando el teorema de la divergencia a S_α resulta

$$\begin{aligned} \text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha &= \iiint_{Q_\alpha} \text{div } \mathbf{F} \, dV \\ &\approx \text{div } \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \Delta V_\alpha \end{aligned}$$

donde Q_α denota el interior de S_α . Por consiguiente, tenemos

$$\text{div } \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

y tomando el límite para $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos la divergencia de \mathbf{F} en el punto (x_0, y_0, z_0) .

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha} \\ &= \text{flujo por unidad de volumen en } (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

El punto (x_0, y_0, z_0) se clasifica, en un campo vectorial, como fuente, sumidero o incompresible, de acuerdo con las siguientes definiciones:

1. **Fuente**, si $\text{div } \mathbf{F} > 0$ [Figura 14.61a].
2. **Sumidero**, si $\text{div } \mathbf{F} < 0$ [Figura 14.61b].
3. **Incompresible**, si $\text{div } \mathbf{F} = 0$ [Figura 14.61c].

EJEMPLO 4 Cálculo del flujo por el teorema de la divergencia

Sea Q la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$ que atraviesa la esfera hacia fuera.

Solución: Por el teorema de la divergencia sabemos que

$$\begin{aligned} \text{Flujo a través de } S &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \text{div } \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2) \, dV \\ &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho \quad \text{Coordenadas esféricas} \\ &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi 2\pi \rho^4 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \\ &= 12\pi \int_0^2 2\rho^4 \, d\rho \\ &= 24\pi \left(\frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{768\pi}{5} \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 14.7

En los Ejercicios 1-4, verificar el teorema de la divergencia calculando

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

como integral de superficie y como integral triple.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cubo acotado por los planos $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq h$

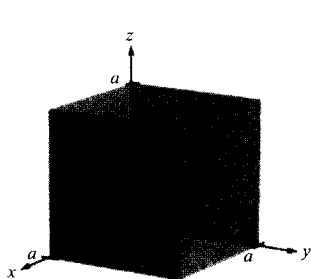


FIGURA E.1

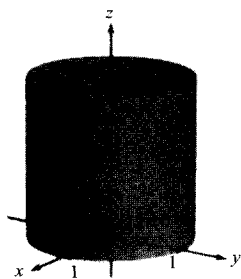


FIGURA E.2

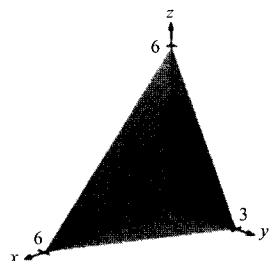


FIGURA E.3

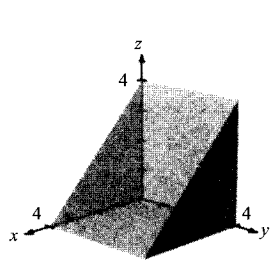


FIGURA E.4

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - (2y - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S : superficie limitada por el plano $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados.

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

S : superficie acotada por los planos $y=4$, $z=4-x$ y los planos coordenados.

En los Ejercicios 5-16, usar el teorema de la divergencia para calcular

$$\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

y hallar el flujo de \mathbf{F} hacia el exterior a través de la superficie del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones. Comprobar los resultados en una calculadora.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

S : $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

S : $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z=0$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$

S : $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z=0$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i}$

S : $x^2 + y^2 = 9$, $z=0$, $z=4$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

S : $x^2 + y^2 = 9$, $z=0$, $z=4$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2y + \sin z)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z=4$

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}$

S : $z=4-y$, $z=0$, $x=0$, $x=6$, $y=0$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

S : $z=4-y$, $z=0$, $x=0$, $x=6$, $y=0$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

S : $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z=0$

17. Demostrar, mediante el teorema de la divergencia, que el volumen del sólido acotado por una superficie S es

$$\iiint_S x \, dy \, dz = \iiint_S y \, dz \, dx = \iiint_S z \, dx \, dy$$

18. Verificar el resultado del Ejercicio 17 para el cubo acotado por $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$ y $z = a$.

En los Ejercicios 19 y 20, calcular

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie cerrada del sólido limitado por las gráficas de $x = 4$, $z = 9 - y^2$ y los planos de coordenadas.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
 20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \cos z \mathbf{i} + yz \sin x \mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
 21. Probar que

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

para cualquier superficie cerrada S .

22. Para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

demostrar que

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

donde V es el volumen del sólido acotado por la superficie cerrada S .

23. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 3V$$

donde V es el volumen del sólido acotado por la superficie cerrada S .

24. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

verificar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}\|} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{3}{\|\mathbf{F}\|} \int_Q \int \int dV$$

donde V es el volumen del sólido acotado por la superficie cerrada S .

En los Ejercicios 25 y 26, demostrar la identidad suponiendo que Q , S y \mathbf{N} satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las derivadas parciales necesarias de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_{\mathbf{N}}f$ y $D_{\mathbf{N}}g$ son las derivadas en la dirección del vector \mathbf{N} , que se definen como

$$D_{\mathbf{N}}f = \nabla f \cdot \mathbf{N}, \quad D_{\mathbf{N}}g = \nabla g \cdot \mathbf{N}$$

25.
$$\int_Q \int \int (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV = \int_S \int f D_{\mathbf{N}}g \, dS$$

[Ayuda: Usar $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div } \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

26.
$$\int_Q \int \int (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \int_S \int (f D_{\mathbf{N}}g - g D_{\mathbf{N}}f) \, dS$$

[Ayuda: Usar el Ejercicio 25 dos veces.]

- CONTENIDO ■
- El teorema de Stokes ■
- Interpretación física del rotacional ■



14.8 Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

Una segunda generalización a dimensiones altas del teorema de Green es el teorema de Stokes, llamado así en honor del físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses, conocido como la Escuela de Cambridge, que incluía a William Thomson (Lord Kelvin) y a James Clerk Maxwell. Aparte de sus contribuciones a la Física, Stokes trabajó en series y en ecuaciones diferenciales, así como en teoría de la integración, a la que pertenece el resultado presentado en esta sección.



GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903)

Stokes fue nombrado profesor de Matemáticas en Cambridge, ocupando la *Lucasian Chair*, en 1849. Cinco años más tarde publicó su teorema para optar a un premio de investigación en dicha universidad.

El teorema de Stokes establece la relación existente entre la integral de superficie sobre una superficie orientada S y la integral de línea sobre una curva espacial cerrada que constituye el borde de S (Figura 14.62). La dirección positiva a lo largo de C es antihoraria respecto del vector normal N . Es decir, si imagina que atrapa el vector normal N con su mano derecha, con su pulgar apuntando en la dirección de N , sus dedos apuntarán en la dirección positiva de C (Figura 14.63).

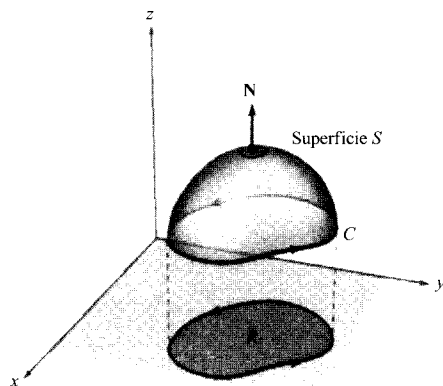


FIGURA 14.62

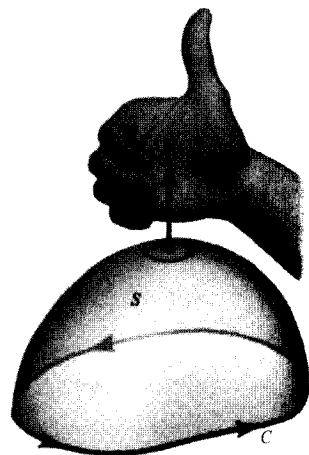


FIGURA 14.63

La dirección positiva de C tiene sentido antihorario respecto de N .

TEOREMA 14.13

TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector normal unitario N , acotada por una curva cerrada simple C , suave a trozos. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y C , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

| Nota. La integral de línea puede expresarse en forma diferencial como $\int_C M \, dx + N \, dy + P \, dz$ o en forma vectorial como $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Stokes

Sea C el triángulo orientado de la Figura 14.64, contenido en el plano $2x + 2y + z = 6$. Calcular

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

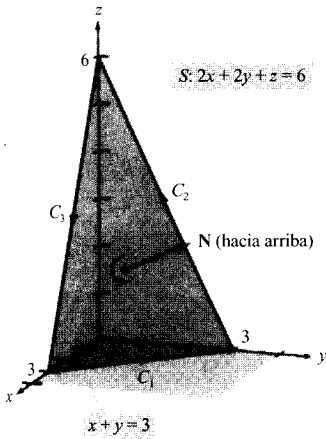


FIGURA 14.64

Solución: Con el fin de aplicar el teorema de Stokes empezamos por hallar el rotacional de \mathbf{F} .

$$\mathbf{rot F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Tomando $z = 6 - 2x - 2y = g(x, y)$, podemos aplicar el Teorema 14.11 con un vector normal hacia arriba, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\mathbf{rot F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) \, dy \\ &= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y \right]_0^3 \\ &= -9 \end{aligned}$$

□

Intente calcular la integral de línea del Ejemplo 1 directamente, *sin* hacer uso del teorema de Stokes. Puede hacerse, por ejemplo, considerando C como unión de C_1 , C_2 y C_3 como sigue:

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \leq t \leq 9$$

El valor de esta integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_1(t) \, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_2(t) \, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_3(t) \, dt \\ &= \int_0^3 t^2 \, dt + \int_3^6 (-2t + 6) \, dt + \int_6^9 (-2t + 12) \, dt \\ &= 9 - 9 - 9 \\ &= -9 \end{aligned}$$

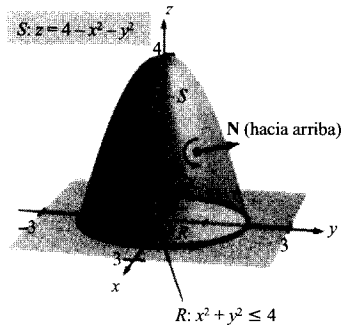


FIGURA 14.65

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de Stokes

Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, donde S es la superficie del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y C la traza de S en el plano xy (Figura 14.65).

Solución: Como *integral de superficie* tenemos $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Por el Teorema 14.11, con vector normal hacia arriba, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_R \int (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xy + 4y + 1) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[2x^2y + (4y + 1)x \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \, dy \\ &= \int_{-2}^2 2(4y + 1)\sqrt{4 - y^2} \, dy \\ &= \int_{-2}^2 (8y\sqrt{4 - y^2} + 2\sqrt{4 - y^2}) \, dy \\ &= \left[-\frac{8}{3}(4 - y^2)^{3/2} + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsen \frac{y}{2} \right]_{-2}^2 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Como *integral de línea*, parametrizamos C así:

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M \, dx + N \, dy + P \, dz \\ &= \int_C 2z \, dx + x \, dy + y^2 \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} [0 + 2 \cos t(2 \cos t) + 0] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \, dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

□

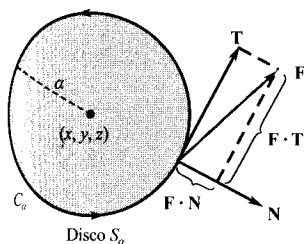


FIGURA 14.66

Interpretación física del rotacional

El teorema de Stokes ofrece una interesante interpretación física del rotacional. En un campo vectorial \mathbf{F} , sea S_α un pequeño disco circular de radio α , centrado en (x, y, z) y con borde C_α , como muestra la Figura 14.66. En cada punto del círculo C_α , \mathbf{F} tiene componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ y componente tangencial $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Cuanto más alineados están \mathbf{F} y \mathbf{T} , mayor es el valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Así pues, un fluido tiende a moverse a lo largo del círculo más bien que a atravesarlo. En consecuencia, decimos que la integral de línea sobre C_α mide la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C_α :

$$\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } C_\alpha$$

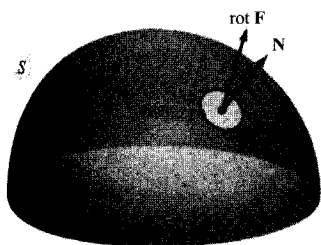


FIGURA 14.67

Consideremos ahora un pequeño disco de la superficie S_α , centrado en un punto (x, y, z) , como el de la Figura 14.67. Sobre ese disco, $\text{rot } \mathbf{F}$ es casi constante, ya que difiere muy poco de su valor en (x, y, z) . Además, $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ es asimismo casi constante sobre S_α , porque todos los vectores unitarios normales son prácticamente iguales. Por consiguiente, del teorema de Stokes se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_{S_\alpha} \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \int_{S_\alpha} \int dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} (\pi\alpha^2) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} &\approx \frac{\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds}{\pi\alpha^2} \\ &= \frac{\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ en torno a } C_\alpha}{\text{área del disco } S_\alpha} \\ &= \text{tasa de circulación} \end{aligned}$$

Supuesto que las circunstancias sean tales que la aproximación mejora para discos cada vez más pequeños ($\alpha \rightarrow 0$), concluimos que

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

que llamaremos la **rotación de \mathbf{F} respecto de \mathbf{N}** . Esto es,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{N} = \text{rotación de } \mathbf{F} \text{ respecto de } \mathbf{N} \text{ en } (x, y, z)$$

En este caso, la rotación de \mathbf{F} es máxima cuando $\mathbf{rot F}$ y \mathbf{N} tienen la misma dirección. Normalmente, esta tendencia a girar varía de un punto a otro de la superficie S y el teorema de Stokes

$$\underbrace{\int_S \int (\mathbf{rot F}) \cdot \mathbf{N} \, dS}_{\text{Integral de superficie}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Integral de línea}}$$

afirma que la medida colectiva, global, de esta tendencia *rotacional* considerada sobre toda la superficie S (integral de superficie) es igual a la tendencia del fluido a *circular* por el borde C (integral de línea).

EJEMPLO 3 Una aplicación del rotacional

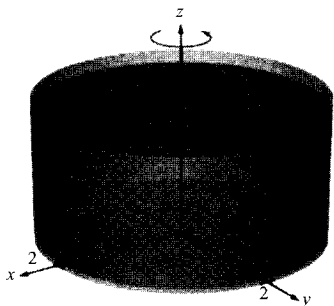


FIGURA 14.68

Un líquido está girando en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera tal que su movimiento viene descrito por el campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

como ilustra la Figura 14.68. Calcular

$$\int_S \int (\mathbf{rot F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S denota la superficie superior del recipiente cilíndrico.

Solución: El rotacional de \mathbf{F} es

$$\mathbf{rot F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} & x\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$$

Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, resulta

$$\begin{aligned} \int_S \int (\mathbf{rot F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_R \int 3\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r)r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^3 \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8 \, d\theta \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

[Nota. Si $\mathbf{rot F} = \mathbf{0}$ en una región Q , la rotación de \mathbf{F} respecto de cada vector normal \mathbf{N} es 0, es decir, \mathbf{F} es irrotacional. Por lo visto con anterioridad sabemos que ésta es una característica de los campos vectoriales conservativos.

□

Resumen de fórmulas de integraciónTeorema fundamental del Cálculo

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Green

$$\int_C M dx + N dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_R \int (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Teorema de la divergencia

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int_Q \int \int \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Teorema de Stokes

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \int (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

Ejercicios de la Sección 14.8

En los Ejercicios 1-6, calcular el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} - 4x^2\mathbf{j} + \arctg x\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - y \cos x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\mathbf{i} + e^{y^2+z^2}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arcsen} y\mathbf{i} + \sqrt{1-x^2}\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

En los Ejercicios 7-10, comprobar el teorema de Stokes calculando

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

como integral de línea y como integral doble.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
S: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
S: $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
S: $z = 3x + 4y + 2z = 12$, primer octante
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
S: $z = x^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$

En los Ejercicios 11-20, usar el teorema de Stokes para calcular

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Verificar los resultados con ayuda de una calculadora.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
C: triángulo de vértices (0, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1)
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctg \frac{x}{y}\mathbf{i} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
C: triángulo de vértices (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 2)
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
S: $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$
S: $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$
S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -\ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \arctg \frac{x}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
S: $z = 9 - 2x - 3y$ sobre un pétalo de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer octante

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (2 - 3y)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$
 S: la porción del primer octante de $x^2 + z^2 = 16$ sobre $x^2 + y^2 = 16$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 S: $z = x^2$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$
 N es el vector unitario normal a la superficie hacia abajo.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 S: la porción del primer octante de $z = x^2$ sobre $x^2 + y^2 = a^2$

Movimiento de un líquido En los Ejercicios 21 y 22, el movimiento de un líquido en un contenedor cilíndrico de radio 1 se describe mediante el campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y, z)$. Calcular

$$\int_S \int (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie superior del contenedor.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Ejercicios de repaso del Capítulo 14

En los Ejercicios 1 y 2, dibujar algunos vectores representativos del campo vectorial y comprobarlos usando una calculadora.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

En los Ejercicios 3 y 4, hallar un campo vectorial tridimensional cuya función potencial sea f .

3. $f(x, y, z) = 8x^2 + xy + z^2$ 4. $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$

En los Ejercicios 5-12, averiguar si \mathbf{F} es conservativo y hallar una función potencial en caso afirmativo.

5. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2}\mathbf{j}$
 6. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$
 7. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - 3x^2)\mathbf{i} + (6x^2y + 3y^2 - 7)\mathbf{j}$
 8. $\mathbf{F}(x, y) = (-2y^2 \sin 2x)\mathbf{i} + 3y^2(1 + \cos 2x)\mathbf{j}$
 9. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z)\mathbf{i} + (2x^2 + 6y)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
 10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
 11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{y^2z^2}$
 12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

23. Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas y supongamos que C y S satisfacen las condiciones del teorema de Stokes. Verificar las siguientes identidades.

$$a) \int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

$$b) \int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$c) \int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

24. Ilustrar el resultado del Ejercicio 23 con las funciones $f(x, y, z) = xyz$ y $g(x, y, z) = z$, y tomando como S el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

25. Sea \mathbf{C} un vector constante. Sea S una superficie orientada, con vector unitario normal \mathbf{N} , acotada por una curva suave C . Demostrar que

$$\int_S \int \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \, dr$$

En los Ejercicios 13-20, calcular a) la divergencia y b) el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} .

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{j} - zx^2\mathbf{k}$
 15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
 16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (z - 3x)\mathbf{k}$
 17. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arcsen x\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
 18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x + \sin^2 y)\mathbf{j}$
 19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{x}\mathbf{i} + \frac{z}{y}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los Ejercicios 21-26, calcular la integral de línea sobre los caminos indicados.

21. $\int_C (x^2 + y^2) \, ds$
 a) C : segmento recto de $(0, 0)$ a $(5, 4)$
 b) C : sentido antihorario a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 2)$.

22. $\int_C xy \, ds$
 a) C: segmento recto de (0, 0) a (2, -3)
 b) C: sentido antihorario a lo largo del círculo $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$.

23. $\int_C (x^2 + y^2) \, ds$
 C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$,
 $0 \leq t \leq 2\pi$

24. $\int_C x \, ds$
 C: $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

25. $\int_C (2x - y) \, dx + (x + 3y) \, dy$
 a) C: segmento recto de (0, 0) a (2, -3)
 b) C: sentido antihorario a lo largo del círculo $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$.

26. $\int_C (2x - y) \, dx + (x + 3y) \, dy$
 C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$,
 $0 \leq t \leq \pi/2$

En los Ejercicios 27 y 28, evaluar, utilizando integración simbólica en una calculadora, la integral de línea sobre el camino que se especifica.

27. $\int_C (2x + y) \, ds$
 $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$

28. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) \, ds$
 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 4$

En los Ejercicios 29 y 30, calcular el área de la superficie lateral sobre la curva C en el plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$.

29. $f(x, y) = 5 + \sin(x + y)$
 C: $y = 3x$ de (0, 0) a (2, 6)

30. $f(x, y) = 12 - x - y$
 C: $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4)

En los Ejercicios 31-36, calcular

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
 C: $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$
 C: $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 C: $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 C: curva intersección de $x^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 = 4$ de (2, 2, 0) a (0, 0, 2)

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 C: curva intersección de $z = x^2 + y^2$ y $x + y = 0$ de (-2, 2, 8) a (2, -2, 8)

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - z)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
 C: curva intersección de $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ de (0, -2, 0) a (0, 2, 0)

En los Ejercicios 37 y 38, usar integración simbólica en una calculadora para obtener el valor de la integral de línea propuesta.

37. $\int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$
 C: $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4) e $y = 2x$ de (2, 4) a (0, 0)

38. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
 $\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$
 C: $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t + 2t \sin t)\mathbf{i} + (2 \sin t - 2t \cos t)\mathbf{j}$,
 $0 \leq t \leq \pi$

39. **Trabajo** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - \sqrt{y}\mathbf{j}$ a lo largo del camino $y = x^{3/2}$, desde (0, 0) hasta (4, 8).

40. **Trabajo** Calcular el trabajo realizado por los motores de un avión de 20 toneladas que asciende 2.000 pies mientras describe un giro de 90° en un arco circular de 10 millas de radio.

En los Ejercicios 41 y 42, usar el teorema fundamental de las integrales de línea para evaluar la integral.

41. $\int_C 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$
 C: curva suave de (0, 0, 0) a (1, 4, 3)

42. $\int_C y \, dx + x \, dy + \frac{1}{z} \, dz$
 C: curva suave de (0, 0, 1) a (4, 4, 4)

43. Calcular la integral $\int_C y^2 \, dx + 2xy \, dy$
 a) C: $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
 b) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 4$
 c) Usar el teorema fundamental de las integrales de línea, siendo C una curva suave que va de (1, 1) a (4, 2).

44. **Área y centroide** Consideremos la región acotada por el eje x y un arco de la cicloide de ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \sin \theta)$ e $y = a(1 - \cos \theta)$. Calcular, utilizando integrales de línea, a) el área de la región y b) el centroide de la región.

En los Ejercicios 45-50, usar el teorema de Green para hallar el valor de la integral de línea.

45.
$$\int_C y \, dx + 2x \, dy$$

 C: contorno del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

46.
$$\int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

 C: contorno del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

47.
$$\int_C xy^2 \, dx + x^2y \, dy$$

 C: $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$

48.
$$\int_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

 C: $x^2 + y^2 = a^2$

49.
$$\int_C xy \, dx + x^2 \, dy$$

 C: borde de la región comprendida entre las gráficas de $y = x^2$ e $y = x$.

50.
$$\int_C y^2 \, dx + x^{2/3} \, dy$$

 C: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

En los Ejercicios 51 y 52, representar en una calculadora la superficie determinada por la función vectorial.

51.
$$\mathbf{r}(u, v) = \sec u \cos v \mathbf{i} + (1 + 2 \operatorname{tg} u) \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$$

 $0 \leq u \leq \pi/3$, $0 \leq v \leq 2\pi$

52.
$$\mathbf{r}(u, v) = e^{-u/4} \cos v \mathbf{i} + e^{-u/4} \sin v \mathbf{j} + \frac{u}{6} \mathbf{k}$$

 $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 2\pi$

53. **Investigación** Consideremos la superficie dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u \mathbf{i} + 3 \cos v \sin u \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$$

Utilizar una calculadora para efectuar lo que se indica a continuación.

- a) Dibujar la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$
 y $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$

- b) Dibujar la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$
 y $\pi/2 \leq v \leq \pi/2$
 c) Dibujar la superficie para $0 \leq u \leq \pi/4$
 y $0 \leq v \leq \pi/2$
 d) Representar e identificar la curva espacial para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $v = \pi/4$
 e) Aproximar el área de la superficie representada en el apartado b).
 f) Aproximar el área de la superficie representada en el apartado c).

54. Calcular la integral de superficie $\int_S \int z \, dS$ sobre la superficie S :

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq \pi$.

55. Usar una calculadora e integración simbólica para representar la superficie S y estimar la integral de superficie $\int_S \int (x + y) \, dS$, donde S es la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + (u - 1)(2 - u) \mathbf{k}$$

con $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

En los Ejercicios 56 y 57, verificar el teorema de la divergencia calculando $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$ como integral de superficie y como integral triple.

56. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q : región sólida acotada por los planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q : región sólida acotada por los planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

En los Ejercicios 58 y 59, comprobar el teorema de Stokes calculando $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ como integral de línea y como integral doble.

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

S : porción del primer octante del plano $3x + y + 2z = 12$

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
 S : porción de $z = y^2$ sobre el cuadrado del plano xy de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) y $(0, a)$

\mathbf{N} es el vector unitario normal a la superficie que apunta hacia arriba.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

El planímetro Ya conoce varios métodos para calcular el área de una región plana. Los ingenieros utilizan, para medir áreas, un instrumento llamado *planímetro*, basado en la fórmula para el área del Teorema 14.9 (página 1332). Como se ve en la figura, el planímetro está fijado a un punto O , aunque puede girar libremente, y tiene un gozne en A . El extremo del brazo AB se mueve, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, alrededor de la región R . En B hay una pequeña rueda, perpendicular a AB y marcada con una escala que mide cuánto rueda mientras B recorre el contorno de R . En este proyecto debe demostrar que el área de R viene dada por la longitud L del brazo AB multiplicada por la distancia D que ha rodado la ruedecilla de B .

Supongamos que el punto B recorre el contorno de R para $a \leq t \leq b$. El punto A avanza y retrocede por un arco circular, centrado en el origen O . Denotemos por $\theta(t)$ el ángulo que se indica en la figura y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de A .

a) Probar que el vector \overrightarrow{OB} viene dado por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) + L \cos \theta(t)]\mathbf{i} + [y(t) + L \sin \theta(t)]\mathbf{j}$$

b) Demostrar que las dos integrales siguientes son cero.

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{2} L^2 \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$I_2 = \int_a^b \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

c) Usando la integral $\int_a^b [x(t) \sin \theta(t) - y(t) \cos \theta(t)]' dt$, demostrar que las dos integrales siguientes son iguales

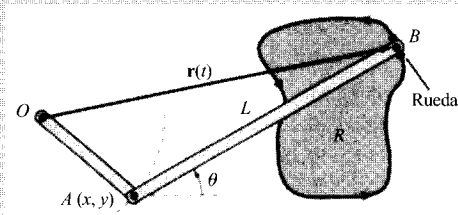
$$I_3 = \int_a^b \frac{1}{2} L \left(y \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + x \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) dt$$

$$I_4 = \int_a^b \frac{1}{2} L \left(-\sin \theta \frac{dx}{dt} + \cos \theta \frac{dy}{dt} \right) dt$$

d) Sea $\mathbf{N} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$. Explicar por qué la distancia D que ha rodado la ruedecilla de B es

$$D = \int_C \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} ds$$

e) Probar que el área de la región R viene dada por $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = DL$



PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre los planímetros, véase el artículo de C. L. Strong en *Scientific American*, agosto de 1958.

Capítulo 15

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

Un ejemplo muy conocido de dos especies con una relación depredador/presa lo constituyen los hurones de pies negros y los perros de las praderas. En la parte oeste de los EE.UU., una merma creciente de las poblaciones de perros de las praderas condujo a un decrecimiento dramático de la población de hurones de pies negros. En 1986 los biólogos capturaron los últimos 18 hurones de ese tipo que pudieron localizar y los llevaron a una granja de reproducción. En la actualidad, se están llevando a cabo serios esfuerzos con el propósito de reintroducirlos en su hábitat natural.

Interacción entre poblaciones

Por diversas razones, deliberadas o accidentales, con frecuencia se introducen o reintroducen especies animales en hábitats específicos. En ocasiones, su introducción provoca una auténtica tragedia en el entorno, puesto que la especie recién llegada extermina a una o varias especies autóctonas.

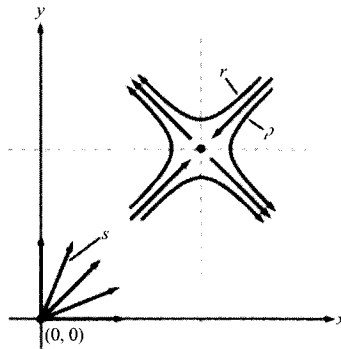
En la década de 1920, los matemáticos Lotka y Volterra, de forma independiente, desarrollaron modelos que representan las diversas maneras en que dos especies interaccionan mutuamente. Las formas más comunes de interacción son como 1) predador y presa, 2) especies complementarias, y 3) especies en competencia. Consideremos, por ejemplo, una laguna que contiene truchas y róbalo. Aunque estas especies devoran los alevines ajenos, se catalogan como especies en competencia porque compiten por el mismo tipo de alimentos. Si x denota el número de róbalo, y el de truchas y t el tiempo (en meses), las tasas de cambio de cada población obedecen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. (En este sistema, a , b , m y n son constantes positivas.)

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = my - nxy$$

Estas ecuaciones tienen muchas soluciones posibles, que se pueden obtener resolviendo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{ax - bxy}{my - nxy}$$

La solución particular depende de los valores iniciales de x e y , y de los valores de a , b , m y n . La figura de la página siguiente recoge las gráficas de varias soluciones. Las flechas denotan el sentido de la evolución de las poblaciones con el transcurso del tiempo.



CUESTIONES

1. ¿Cómo describiría un punto de equilibrio para las dos poblaciones? Sabiendo que un punto de equilibrio debe estar localizado donde

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

hallar las coordenadas de cada punto de equilibrio de la figura anterior.

2. Para las curvas indicadas como *p*, *r* y *s* en la figura, describir qué les sucede a *x* e *y* cuando *t* crece. Explicarlo en términos de truchas y róbalos.
3. ¿Para qué puntos de partida *vencen* los róbalos? ¿Para cuáles *vencen* la truchas?
4. ¿Cómo espera que cambien las ecuaciones y las gráficas para dos especies que en lugar de competir mantienen una relación depredador/presa?
5. Resuelva la ecuación diferencial $dx/dy = (ax - bxy)/(my - nxy)$ usando una técnica aprendida en el Capítulo 5. Asigne, a continuación, varios valores a *a*, *b*, *m* y *n* y dibuje las soluciones resultantes. ¿Obtiene gráficas parecidas a las de la figura anterior?

Ecuaciones diferenciales

- CONTENIDO ■
 Ecuaciones diferenciales exactas ■
 Factores integrantes ■



15.1

Ecuaciones de primer orden exactas

Ecuaciones diferenciales exactas

En la Sección 5.6 estudiamos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a procesos de crecimiento y de desintegración. En la Sección 5.7 vimos las ideas básicas sobre ecuaciones diferenciales y la técnica de resolución conocida como separación de variables. En este capítulo, veremos cómo resolver ecuaciones diferenciales y cómo utilizarlas en problemas de la vida real. En esta sección introduciremos un método que permite resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

cuando la ecuación representa la diferencial exacta de una función $z = f(x, y)$.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

La ecuación $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si existe una función f de dos variables, con derivadas parciales continuas, tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = N(x, y)$$

La solución general de la ecuación es $f(x, y) = C$.

Por la Sección 12.3 sabemos que si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Eso sugiere el siguiente criterio de exactitud.

TEOREMA 15.1 CRITERIO DE EXACTITUD

Supuesto que M y N tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto R , la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La exactitud es una propiedad frágil, en el sentido de que cambios aparentemente intrascendentes pueden destruirla, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 1 Verificando la exactitud

[Nota. Toda ecuación diferencial de la forma $M(x) dx + N(y) dy = 0$ es exacta. En otros términos, las ecuaciones de variables separadas son un tipo especial de ecuaciones exactas.

a) La ecuación diferencial $(xy^2 + x) dx + yx^2 dy = 0$ es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [xy^2 + x] = 2xy \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [yx^2] = 2xy$$

Pero la ecuación $(y^2 + 1) dx + xy dy = 0$ no es exacta, aunque se obtiene al dividir por x la anterior.

b) La ecuación diferencial $\cos y dx + (y^2 - x \operatorname{sen} y) dy = 0$ es exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\cos y] = -\operatorname{sen} y \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [y^2 - x \operatorname{sen} y] = -\operatorname{sen} y$$

Sin embargo, la ecuación $\cos y dx + (y^2 + x \operatorname{sen} y) dy = 0$ no es exacta, aunque difiere de la anterior en un signo tan sólo. \square

Nótese que el criterio de exactitud para $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es el mismo que el utilizado para saber si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es el gradiente de una función potencial (Teorema 14.1). Esto significa que podemos hallar una solución general $f(x, y) = C$ de una ecuación diferencial exacta por el mismo método usado al hallar una función potencial para un campo vectorial conservativo.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial exacta

Resolver la ecuación diferencial $(2xy - 3x^2) dx + (x^2 - 2y) dy = 0$.

Solución: La ecuación diferencial dada es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [2xy - 3x^2] = 2x = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - 2y]$$

Su solución general, $f(x, y) = C$, viene dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int M(x, y) dx \\ &= \int (2xy - 3x^2) dx = x^2y - x^3 + g(y) \end{aligned}$$

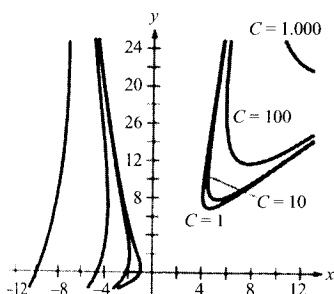


FIGURA 15.1

En la Sección 14.1 se determinó $g(y)$ integrando $N(x, y)$ respecto de y en primer lugar, y reconciliando a continuación las dos expresiones de $f(x, y)$. Una técnica alternativa consiste en derivar parcialmente en y esta versión de $f(x, y)$ y comparar el resultado con $N(x, y)$. En otras palabras,

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [x^2y - x^3 + g(y)] = x^2 + g'(y) = \overbrace{x^2 - 2y}^{N(x, y)}$$

$\boxed{g'(y) = -2y}$

Así pues, $g'(y) = -2y$, de donde se sigue que $g(y) = -y^2 + C_1$. Por tanto,

$$f(x, y) = x^2y - x^3 - y^2 + C_1$$

y la solución general es $x^2y - x^3 - y^2 = C$. La Figura 15.1 muestra las curvas solución correspondientes a $C = 1, 10, 100$ y 1.000 . \square

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación diferencial exacta

Hallar la solución particular de

$$(\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2) dx + 2xy dy = 0$$

que satisface la condición inicial $y = 1$ en $x = \pi$.

Solución: La ecuación diferencial propuesta es exacta, ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\overbrace{\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2}^{\frac{\partial M}{\partial y}} \right] = 2y = \frac{\partial}{\partial x} \left[\overbrace{2xy}^{\frac{\partial N}{\partial x}} \right]$$

Como $N(x, y)$ es más simple que $M(x, y)$, es preferible empezar integrando $N(x, y)$

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy = \int 2xy dy = xy^2 + g(x)$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [xy^2 + g(x)] = y^2 + g'(x) = \overbrace{\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2}^{M(x, y)}$$

$\boxed{g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x}$

Así pues, $g'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int (\cos x - x \operatorname{sen} x) dx \\ &= x \cos x + C_1 \end{aligned}$$



La solución particular que satisface una cierta condición inicial puede representarse en una calculadora. En el Ejemplo 3, la ecuación diferencial y las condiciones iniciales se satisfacen cuando $xy^2 + x \cos x = 0$, lo cual implica que la solución particular se puede escribir como $x = 0$ o como $y = \pm \sqrt{-\cos x}$. En la pantalla de la calculadora, la solución vendría representada por la Figura 15.2 junto con el eje y .

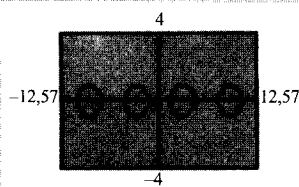


FIGURA 15.2

lo cual implica que $f(x, y) = xy^2 + x \cos x + C_1$, así que la solución general es

$$xy^2 + x \cos x = C \quad \text{Solución general}$$

La condición inicial exige que

$$\pi(1)^2 + \pi \cos \pi = C$$

de manera que $C = 0$. Por tanto, la solución particular pedida es

$$xy^2 + x \cos x = 0 \quad \text{Solución particular}$$

La gráfica de esta solución particular, que se muestra en la Figura 15.3, consta de dos partes: los óvalos, dados por $y^2 + \cos x = 0$, y el eje y , dado por $x = 0$. \square

En el Ejemplo 3, nótese que si $z = f(x, y) = xy^2 + x \cos x$, la diferencial total de z es

$$\begin{aligned} dz &= f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy \\ &= (\cos x - x \sin x + y^2) dx + 2xy dy \\ &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

Es decir, $M dx + N dy = 0$ se llama una ecuación diferencial *exacta* porque $M dx + N dy$ es exactamente la diferencial de $f(x, y)$.

Factores integrantes

Si la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ no es exacta, cabe la posibilidad de que se convierta en exacta al multiplicarla por un factor apropiado $u(x, y)$, que se llama, en tal caso, un factor integrante de esa ecuación diferencial.

EJEMPLO 4 Multiplicación por un factor integrante

a) Si la ecuación diferencial

$$2y dx + x dy = 0 \quad \text{Ecuación no exacta}$$

se multiplica por el factor integrante $u(x, y) = x$, la ecuación resultante

$$2xy dx + x^2 dy = 0 \quad \text{Ecuación exacta}$$

es exacta. El miembro de la izquierda es la diferencial total de x^2y .

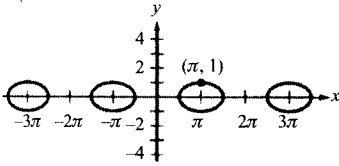


FIGURA 15.3

b) Si la ecuación diferencial

$$y \, dx - x \, dy = 0 \quad \text{Ecuación no exacta}$$

se multiplica por el factor integrante $u(x, y) = 1/y^2$, la ecuación resultante

$$\frac{1}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \, dy = 0 \quad \text{Ecuación exacta}$$

es exacta. El miembro de la izquierda es la diferencial total de x/y . \square

En general, es difícil hallar un factor integrante. No obstante, hay dos clases de ecuaciones diferenciales cuyos factores integrantes se pueden calcular de forma rutinaria: las que poseen factores integrantes que dependen sólo de x o sólo de y . El siguiente teorema, que presentamos sin demostración, sugiere un procedimiento para hallar los factores integrantes de esas dos clases especiales.

TEOREMA 15.2 FACTORES INTEGRANTES

Consideremos la ecuación diferencial $M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0$.

1. Si

$$\frac{1}{N(x, y)} [M_y(x, y) - N_x(x, y)] = h(x)$$

es función de x sólo, entonces $e^{\int h(x) \, dx}$ es un factor integrante.

2. Si

$$\frac{1}{M(x, y)} [N_x(x, y) - M_y(x, y)] = k(y)$$

es función de y sólo, entonces $e^{\int k(y) \, dy}$ es un factor integrante.

ADVERTENCIA Si $h(x)$ o $k(y)$ son constantes, el Teorema 15.2 sigue siendo aplicable. Como ayuda para memorizar esas fórmulas, nótese que la derivada parcial sustraída identifica el denominador y la variable del factor integrante.

EJEMPLO 5 Cálculo de un factor integrante

Resolver la ecuación diferencial $(y^2 - x) \, dx + 2y \, dy = 0$.

Solución: La ecuación dada no es exacta, ya que $M_y(x, y) = 2y$ y $N_x(x, y) = 0$. Sin embargo, como

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{2y - 0}{2y} = 1 = h(x)$$

deducimos que $e^{\int h(x) \, dx} = e^{\int 1 \, dx} = e^x$ es un factor integrante. Multiplicando la ecuación diferencial dada por este factor e^x se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$(y^2 e^x - x e^x) \, dx + 2y e^x \, dy = 0$$

cuya solución viene dada por

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy = \int 2ye^x dy = y^2e^x + g(x)$$

$$f_x(x, y) = y^2e^x + g'(x) = \overbrace{y^2e^x - xe^x}^{M(x, y)}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
g'(y) = -xe^x

Por consiguiente, $g'(x) = -xe^x$ y $g(x) = -xe^x + e^x + C_1$, luego

$$f(x, y) = y^2e^x - xe^x + e^x + C_1$$

La solución general es, por tanto, $y^2e^x - xe^x + e^x = C$, o bien $y^2 - x + 1 = Ce^{-x}$. \square

En el próximo ejemplo vamos a ver cómo una ecuación diferencial puede ayudar a hacer un esbozo de un campo de fuerzas dado por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 Una aplicación a los campos de fuerzas

Dibujar un esbozo del campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{y^2 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$$

hallando y dibujando la familia de curvas tangentes a \mathbf{F} .

Solución: En el punto (x, y) del plano, el vector $\mathbf{F}(x, y)$ tiene pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y^2 - x)/\sqrt{x^2 + y^2}}{2y/\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-(y^2 - x)}{2y}$$

que en forma diferencial se escribe

$$\begin{aligned} 2y dy &= -(y^2 - x) dx \\ (y^2 - x) dx + 2y dy &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos, por el Ejemplo 5, que la solución general de esta ecuación diferencial es $y^2 - x + 1 = Ce^{-x}$, esto es, $y^2 = x - 1 + Ce^{-x}$. La Figura 15.4 muestra varias curvas de esta familia. Obsérvese que el vector fuerza en (x, y) es tangente a la curva que pasa por (x, y) . \square

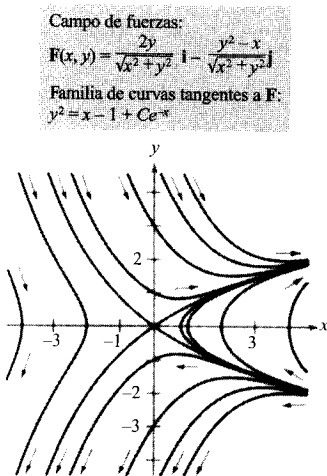


FIGURA 15.4

Ejercicios de la Sección 15.1

En los Ejercicios 1-10, determinar si la ecuación diferencial es exacta. Si lo es, hallar su solución general.

- $(2x - 3y) dx + (2y - 3x) dy = 0$
- $ye^x dx + e^x dy = 0$
- $(3y^2 + 10xy^2) dx + (6xy - 2 + 10x^2y) dy = 0$
- $2 \cos(2x - y) dx - \cos(2x - y) dy = 0$
- $(4x^3 - 6xy^2) dx + (4y^3 - 6xy) dy = 0$
- $2y^2 e^{xy^2} dx + 2xye^{xy^2} dy = 0$
- $\frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx) = 0$
- $e^{-(x^2+y^2)}(x dx + y dy) = 0$
- $\frac{1}{(x - y)^2} (y^2 dx + x^2 dy) = 0$
- $e^y \cos xy [y dx + (x + \operatorname{tg} xy) dy] = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, a) dibujar a mano sobre el campo vectorial una solución aproximada de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial, b) hallar la solución particular que satisface esa condición inicial, y c) representar en una calculadora esa solución particular. Comparar esta gráfica con la dibujada a mano en a).

Ecuación diferencial Condición inicial

11. $(2x \operatorname{tg} y + 5) dx + (x^2 \sec^2 y) dy = 0$ $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

12. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x dx + y dy) = 0$ $y(4) = 3$

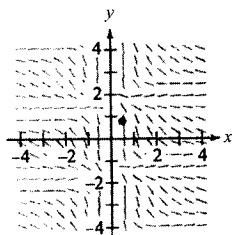


FIGURA E11

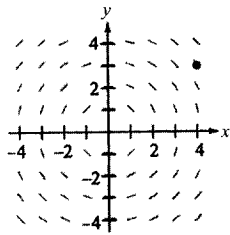


FIGURA E12

En los Ejercicios 13-16, calcular la solución particular que cumple la condición inicial.

Ecuación diferencial Condición inicial

13. $\frac{y}{x-1} dx + [\ln(x-1) + 2y] dy = 0$ $y(2) = 4$

14. $\frac{1}{x^2 + y^2} (x dx + y dy) = 0$ $y(0) = 4$

15. $e^{3x}(\operatorname{sen} 3y dx + \cos 3y dy) = 0$ $y(0) = \pi$

16. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$ $y(3) = 1$

En los Ejercicios 17-26, hallar el factor integrante que es función sólo de x o de y , y usarlo para encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

17. $y dx - (x + 6y^2) dy = 0$

18. $(2x^3 + y) dx - x dy = 0$

19. $(5x^2 - y) dx + x dy = 0$

20. $(5x^2 - y^2) dx + 2y dy = 0$

21. $(x + y) dx + \operatorname{tg} x dy = 0$

22. $(2x^2y - 1) dx + x^3 dy = 0$

23. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$

24. $(x^2 + 2x + y) dx + 2 dy = 0$

25. $2y dx + (x - \operatorname{sen} \sqrt{y}) dy = 0$

26. $(-2y^3 + 1) dx + (3xy^2 + x^3) dy = 0$

En los Ejercicios 27-30, usar el factor integrante para obtener la solución general de la ecuación diferencial.

27. $(4x^2y + 2y^2) dx + (3x^3 + 4xy) dy = 0$
 $u(x, y) = xy^2$

28. $(3y^2 + 5x^2y) dx + (3xy + 2x^3) dy = 0$
 $u(x, y) = x^2y$

29. $(-y^5 + x^2y) dx + (2xy^4 - 2x^3) dy = 0$
 $u(x, y) = x^{-2}y^{-3}$

30. $-y^3 dx + (xy^2 - x^2) dy = 0$
 $u(x, y) = x^{-2}y^{-2}$

31. Probar que cada uno de éstos son factores integrantes para la ecuación diferencial

$$y \, dx - x \, dy = 0$$

a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{y^2}$ c) $\frac{1}{xy}$ d) $\frac{1}{x^2 + y^2}$

32. Verificar que la ecuación diferencial

$$(axy^2 + by) \, dx + (bx^2y + ax) \, dy = 0$$

es exacta sólo si $a = b$. Si $a \neq b$, probar que $x^m y^n$ es un factor integrante, con

$$m = -\frac{2b+a}{a+b}, \quad n = -\frac{2a+b}{a+b}$$

En los Ejercicios 33-36, representar, con ayuda de calculadora, la familia de curvas tangentes al campo de fuerzas dado.

33. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$

34. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$

35. $\mathbf{F}(x, y) = 4x^2y \mathbf{i} - \left(2xy^2 + \frac{x}{y^2}\right) \mathbf{j}$

36. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + x^2) \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j}$

En los Ejercicios 37 y 38, hallar una ecuación para la curva con pendiente especificada que pasa por el punto dado.

Pendiente Punto

37. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{3y-x}$ (2, 1)

38. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$ (0, 2)

39. **Coste** Si $y = C(x)$ representa el coste de producción de x en un proceso industrial, la elasticidad de coste se define como

$$E(x) = \frac{\text{coste marginal}}{\text{coste medio}} = \frac{C'(x)}{C(x)/x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Hallar la función de coste sabiendo que la función de elasticidad es

$$E(x) = \frac{20x - y}{2y - 10x}$$

con $C(100) = 500$ y $x \geq 100$.

40. **El método de Euler** Consideremos la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$. En cualquier punto (x_k, y_k) del dominio de F , $F(x_k, y_k)$ da la pendiente de la solución en ese punto. El método de Euler proporciona un conjunto discreto de estimaciones de los valores y de una solución de la ecuación diferencial por medio de la fórmula iterativa

$$y_{k+1} = y_k + F(x_k, y_k) \Delta x$$

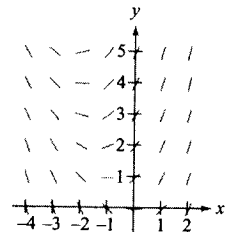
donde $\Delta x = x_{k+1} - x_k$.

- a) Escribir unas líneas explicando la idea que subyace en este método de Euler.
b) Una disminución del valor de Δx ¿cómo afecta a la precisión del método de Euler?

41. **El método de Euler** Usar el método de Euler (Ejercicio 40) para aproximar $y(1)$ para los valores de Δx dados en la tabla, si $y' = x + \sqrt{y}$ e $y(0) = 2$. (Nótese que el número de iteraciones crece al decrecer Δx .) Dibujar la solución aproximada sobre el campo de direcciones de la figura.

Δx	0,50	0,25	0,10
Estimación de $y(1)$			

El valor de $y(1)$, con tres decimales exactos, es 4,213.



42. **Programación** Escribir un programa que implemente el método de Euler para una ecuación diferencial concreta, con Δx , intervalo y condición inicial fijados. La salida debe ser la gráfica de los puntos discretos que aproximan la solución.

El método de Euler En los Ejercicios 43-46, *a*) usar el programa del Ejercicio 42 para aproximar la solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo propuesto, con el valor de Δx y la condición inicial que se indican, *b*) resolver la ecuación diferencial analíticamente, y *c*) representar en la calculadora la solución particular y comparar el resultado con la gráfica obtenida en *a*).

<u>Ecuación diferencial</u>	<u>Intervalo</u>	<u>Δx</u>	<u>Condición inicial</u>
43. $y' = x\sqrt[3]{y}$	[1, 2]	0,01	$y(1) = 1$
44. $y' = \frac{\pi}{4}(y^2 + 1)$	[-1, 1]	0,1	$y(-1) = -1$
45. $y' = \frac{-xy}{x^2 + y^2}$	[2, 4]	0,05	$y(2) = 1$
46. $y' = \frac{6x + y^2}{y(3y - 2x)}$	[0, 5]	0,2	$y(0) = 1$

47. El método de Euler Repetir el Ejercicio 45 para $\Delta x = 1$ y discutir cómo cambia la precisión del resultado.

48. El método de Euler Repetir el Ejercicio 45 para $\Delta x = 0,5$ y discutir cómo cambia la precisión del resultado.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 49-52, decidir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar el porqué o exhibir algún ejemplo que muestre su falsedad.

49. La ecuación diferencial $2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = 0$ es exacta.

50. Si $M \, dx + N \, dy = 0$ es exacta, entonces $xM \, dx + xN \, dy = 0$ es exacta.

51. Si $M \, dx + N \, dy = 0$ es exacta, entonces $[f(x) + M] \, dx + [g(y) + N] \, dy = 0$ es también exacta.

52. La ecuación diferencial $f(x) \, dx + g(y) \, dy = 0$ es exacta.

- CONTENIDO ■
 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden ■
 Ecuaciones de Bernoulli ■
 Aplicaciones ■



15.2

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta sección aprenderemos a utilizar factores integrantes con el fin de resolver una clase muy importante de ecuaciones diferenciales de primer orden: las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

DEFINICIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a cualquier ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x . Esta ecuación diferencial lineal de primer orden se dice que está en forma normal.

ANNA JOHNSON PELL WHEELER
(1883-1966)

Anna Johnson Pell Wheeler obtuvo el doctorado en la Universidad de Iowa con una tesis titulada *Extensión de la teoría de Galois a las ecuaciones diferenciales lineales*, en 1904. Influenciada por David Hilbert, trabajó en la teoría de las ecuaciones integrales al mismo tiempo que estudiaba los espacios lineales de dimensión infinita.

Para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden podemos utilizar un factor integrante $u(x)$ que convierta el miembro de la izquierda en la derivada del producto $u(x)y$. Esto es, necesitamos un factor $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned}u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y &= \frac{d[u(x)y]}{dx} \\u(x)y' + u(x)P(x)y &= u(x)y' + yu'(x) \\u(x)P(x)y &= yu'(x) \\P(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ \ln |u(x)| &= \int P(x) dx + C_1 \\u(x) &= Ce^{\int P(x) dx}\end{aligned}$$

Puesto que no estamos interesados en el factor integrante más general, hacemos $C = 1$. Multiplicando la ecuación original $y' + P(x)y = Q(x)$ por $u(x) = e^{\int P(x) dx}$ se obtiene

$$\begin{aligned}y'e^{\int P(x) dx} + yP(x)e^{\int P(x) dx} &= Q(x)e^{\int P(x) dx} \\ \frac{d}{dx} [ye^{\int P(x) dx}] &= Q(x)e^{\int P(x) dx}\end{aligned}$$

La solución general es

$$ye^{\int P(x) dx} = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

TEOREMA 15.3

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

La ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

admite el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x) dx}$. La solución de esa ecuación diferencial es

$$ye^{\int P(x) dx} = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

ADVERTENCIA En lugar de memorizar la fórmula, recuerde simplemente que al multiplicar por el factor $e^{\int P(x) dx}$, el miembro de la izquierda se convierte en la derivada del producto $ye^{\int P(x) dx}$.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Hallar la solución general de

$$xy' - 2y = x^2$$

Solución: La forma canónica de esta ecuación es

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x \quad \text{Forma canónica}$$

Así pues, $P(x) = -2/x$, luego

$$\int P(x) dx = -\int \frac{2}{x} dx = -\ln x^2$$

$$e^{\int P(x) dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{Factor integrante}$$

En consecuencia, multiplicando la forma canónica de la ecuación en ambos miembros por $1/x^2$ nos lleva a

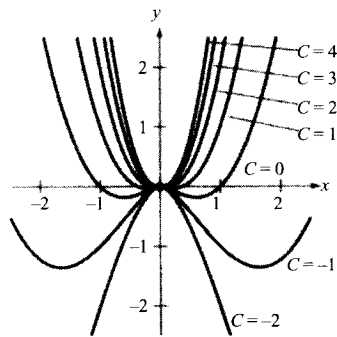


FIGURA 15.5

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y}{x^2} \right] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \ln |x| + C$$

$$y = x^2(\ln |x| + C) \quad \text{Solución general}$$

La Figura 15.5 muestra varias curvas solución (para $C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4). □

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Hallar la solución general de

$$y' - y \operatorname{tg} t = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Solución: La ecuación está escrita ya en forma canónica $y' + P(t)y = Q(t)$. Por tanto, $P(t) = -\operatorname{tg} t$, de manera que

$$\int P(t) dt = -\int \operatorname{tg} t dt = \ln |\cos t|$$

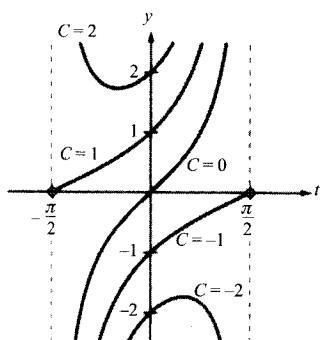


FIGURA 15.6

lo cual implica que el factor integrante es

$$e^{\int P(t) dt} = e^{\ln |\cos t|} = |\cos t| \quad \text{Factor integrante}$$

Una simple inspección permite ver que $\cos t$ es también factor integrante. Así pues, multiplicando $y' - y \operatorname{tg} t = 1$ por $\cos t$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} [y \cos t] = \cos t$$

$$y \cos t = \int \cos t dt$$

$$y \cos t = \operatorname{sen} t + C$$

$$y = \operatorname{tg} t + C \operatorname{sec} t \quad \text{Solución general}$$

La Figura 15.6 muestra varias curvas solución. □

Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación no lineal que se sabe reducir a una lineal por una sustitución adecuada es la ecuación de Bernoulli, que debe su nombre a James Bernoulli (1654-1705).

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Ecuación de Bernoulli

Esta ecuación es lineal si $n = 0$ y de variables separadas si $n = 1$. En lo que sigue supondremos $n \neq 0$ y $n \neq 1$. En primer lugar, multiplicamos por y^{-n} y por $(1 - n)$, con lo que resulta

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$$(1 - n)y^{-n}y' + (1 - n)P(x)y^{1-n} = (1 - n)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} [y^{1-n}] + (1 - n)P(x)y^{1-n} = (1 - n)Q(x)$$

que es una ecuación lineal en la variable y^{1-n} . Denotando $z = y^{1-n}$, obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x)$$

Finalmente, el Teorema 15.3 establece que la *solución general de la ecuación de Bernoulli* es

$$y^{1-n}e^{\int (1-n)P(x) dx} = \int (1 - n)Q(x)e^{\int (1-n)P(x) dx} dx + C$$

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación de Bernoulli

Hallar la solución general de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

Solución: Para esta ecuación de Bernoulli es $n = -3$, luego efectuamos la sustitución

$$\begin{array}{ll} z = y^4 & \text{Hacer } z = y^{1-n} = y^{1-(-3)} \\ z' = 4y^3y' & \text{Derivar} \end{array}$$

Multiplicando la ecuación original por $4y^3$ se obtiene

$$\begin{array}{ll} y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3} & \text{Ecuación original} \\ 4y^3y' + 4xy^4 = 4xe^{-x^2} & \text{Multiplicar por } 4y^3 \\ z' + 4xz = 4xe^{-x^2} & \text{Ecuación lineal: } z' + P(x)z = Q(x) \end{array}$$

Esta ecuación es lineal en z . De $P(x) = 4x$ se sigue que

$$\int P(x) dx = \int 4x dx = 2x^2$$

así que e^{2x^2} es factor integrante. Multiplicando la ecuación lineal por este factor resulta

$$\begin{array}{ll} z' + 4xz = 4xe^{-x^2} & \text{Ecuación lineal} \\ z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} = 4xe^{x^2} & \text{Ecuación exacta} \\ \frac{d}{dx} [ze^{2x^2}] = 4xe^{x^2} & \text{Expresar el lado izquierdo como diferencial total} \\ ze^{2x^2} = \int 4xe^{x^2} dx & \text{Integrar en ambos miembros} \\ ze^{2x^2} = 2e^{x^2} + C & \\ z = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2} & \text{Dividir por } e^{2x^2} \end{array}$$

Finalmente, sustituyendo $z = y^4$ vemos que la solución general es

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2} \quad \text{Solución general} \quad \square$$

Hasta este momento hemos analizado varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De todos ellos, el de variables separadas suele ser el más simple, por lo que es conveniente contemplar la técnica del factor integrante como último recurso.

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	Forma de la ecuación
1. Variables separadas:	$M(x) dx + N(y) dy = 0$
2. Homogénea:	$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, donde M y N son homogéneas de grado n
3. Exacta:	$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, donde $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$
4. Factor integrante:	$u(x, y)M(x, y) dx + u(x, y)N(x, y) dy = 0$ es exacta
5. Lineal:	$y' + P(x)y = Q(x)$
6. Ecuación de Bernoulli:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

Aplicaciones

El próximo ejemplo ilustra una clase de situaciones resolubles mediante una ecuación diferencial: los problemas de mezclas.

EJEMPLO 4 Un problema de mezclas

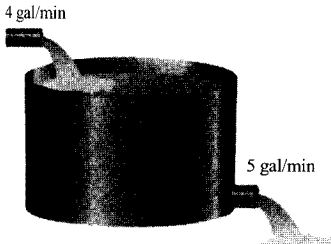


FIGURA 15.7

Un depósito contiene 50 galones de una solución compuesta por 90 por 100 de agua y 10 por 100 de alcohol. Otra solución, con 50 por 100 de cada, se va añadiendo al depósito a razón de 4 galones/min. Simultáneamente, el depósito se va vaciando a razón de 5 galones/min (véase Figura 15.7). Supuesto que el contenido del depósito está siendo removido constantemente, ¿cuánto alcohol hay en el depósito a los 10 minutos?

Solución: Sea y el número de galones de alcohol que hay en el depósito en el instante t . Sabemos que $y = 5$ en $t = 0$. Como el número de galones de solución que hay en el depósito en cualquier instante es $50 - t$, y el depósito pierde 5 galones de solución por minuto, debe perder

$$\left(\frac{5}{50-t}\right)y$$

galones de alcohol por minuto. Además, como el depósito gana 2 galones de alcohol por minuto, el ritmo de cambio del alcohol en él viene dado por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50-t}\right)y \implies \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50-t}\right)y = 2$$

Para resolver esta ecuación lineal, tenemos en cuenta que $P(t) = 5/(50-t)$, con lo que

$$\int P(t) dt = \int \frac{5}{50-t} dt = -5 \ln |50-t|$$

Como $t < 50$, podemos prescindir del signo de valor absoluto y concluir que

$$e^{\int P(t) dt} = e^{-5 \ln(50-t)} = \frac{1}{(50-t)^5}$$

Por consiguiente, la solución general es

$$\begin{aligned} \frac{y}{(50-t)^5} &= \int \frac{2}{(50-t)^5} dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C \\ y &= \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5 \end{aligned}$$

Al ser $y = 5$ en $t = 0$, se sigue que

$$5 = \frac{50}{2} + C(50)^5 \implies -\frac{20}{50^5} = C$$

de manera que la solución particular es

$$y = \frac{50-t}{2} - 20 \left(\frac{50-t}{50} \right)^5$$

Finalmente, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el depósito es

$$y = \frac{50-10}{2} - 20 \left(\frac{50-10}{50} \right)^5 = 13,45 \text{ gal}$$

lo que significa una solución con un 33,6 por 100 de alcohol. \square

En la mayoría de los problemas de cuerpos en caída discutidos hasta aquí en este libro, hemos despreciado la resistencia del aire. El próximo ejemplo la incluye. En él se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad v del objeto que cae. Si g es la aceleración de la gravedad, la fuerza hacia abajo sobre un objeto de masa m será la diferencia $mg - kv$. Pero por la segunda ley de Newton sabemos que $F = ma = m(dv/dt)$, lo que conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \implies \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

EJEMPLO 5 Objeto en caída con resistencia del aire

Se deja caer un objeto de masa m desde un helicóptero. Expresar su velocidad en función del tiempo t , supuesto que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.

Solución: La velocidad v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$$

donde g es la aceleración de la gravedad y k una constante de proporcionalidad. Denotando $b = k/m$, podemos separar las variables así:

$$\begin{aligned} dv &= (g - bv) dt \\ \int \frac{dv}{g - bv} &= \int dt \\ -\frac{1}{b} \ln |g - bv| &= t + C_1 \\ \ln |g - bv| &= -bt - bC_1 \\ g - bv &= Ce^{-bt} \end{aligned}$$

Puesto que el objeto se deja caer, es $v = 0$ en $t = 0$, de modo que $C = g$. Por tanto,

$$-bv = -g + ge^{-bt} \implies v = \frac{g - ge^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) \quad \square$$

| Nota. Obsérvese en el Ejemplo 5 que la velocidad tiende al límite mg/k como resultado de la resistencia del aire, mientras que cuando se desprecia la resistencia del aire, la velocidad del objeto crece sin límite.

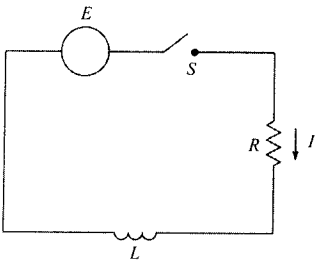


FIGURA 15.8

El circuito eléctrico simple de la Figura 15.8 consta de la intensidad de corriente I (en amperios), una resistencia R (en ohmios), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz constante E (en voltios). De acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, si se cierra el circuito en $t = 0$, la fuerza electromotriz (voltaje) aplicada es la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito. Esto significa que la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

EJEMPLO 6 Un problema de circuitos eléctricos

Hallar la intensidad de corriente I en función del tiempo t (en segundos), sabiendo que I satisface la ecuación diferencial $L(dI/dt) + RI = \text{sen } 2t$, donde R y L son constantes no nulas.

Solución: La ecuación diferencial dada se escribe en forma canónica

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{1}{L} \text{sen } 2t$$

De $P(t) = R/L$ se sigue que $e^{\int P(t) dt} = e^{(R/L)t}$, luego por el Teorema 15.3,

$$\begin{aligned} Ie^{(R/L)t} &= \frac{1}{L} \int e^{(R/L)t} \text{sen } 2t dt \\ &= \frac{1}{4L^2 + R^2} e^{(R/L)t} (R \text{sen } 2t - 2L \cos 2t) + C \end{aligned}$$

Así pues, la solución general es

$$I = e^{-(R/L)t} \left[\frac{1}{4L^2 + R^2} e^{(R/L)t} (R \text{sen } 2t - 2L \cos 2t) + C \right]$$

$$I = \frac{1}{4L^2 + R^2} (R \text{sen } 2t - 2L \cos 2t) + Ce^{-(R/L)t} \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 15.2

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 1 y 2, decidir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar el porqué o exhibir algún ejemplo que muestre su falsedad.

- $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- $y' + xy = e^x y$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

En los Ejercicios 3 y 4, a) dibujar a mano, sobre el campo vectorial, una solución aproximada de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial, b) hallar la solución particular que cumpla la condición inicial, y c) representar en una calculadora la solución particular. Comparar esta gráfica con la dibujada en a).

Ecuación diferencial Condición inicial

3. $\frac{dy}{dx} = e^x - y$ (0, 1)

4. $y' + 2y = \sin x$ (0, 4)

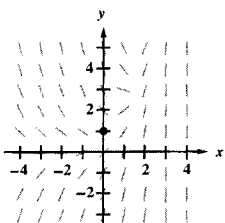


FIGURA E3

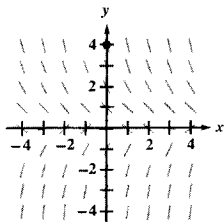


FIGURA E4

En los Ejercicios 5-12, resolver la ecuación diferencial lineal.

5. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = 3x + 4$

6. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y = 3x + 1$

7. $y' - y = \cos x$

8. $y' + 2xy = 2x$

9. $(3y + \sin 2x) dx - dy = 0$

10. $(y - 1) \sin x dx - dy = 0$

11. $(x - 1)y' + y = x^2 - 1$

12. $y' + 5y = e^{5x}$

En los Ejercicios 13-18, calcular la solución particular de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial especificada.

Ecuación diferencial Condición de contorno

13. $y' \cos^2 x + y - 1 = 0$ $y(0) = 5$

14. $x^3 y' + 2y = e^{1/x^2}$ $y(1) = e$

15. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x + \cos x$ $y(0) = 1$

16. $y' + y \sec x = \sec x$ $y(0) = 4$

17. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = 0$ $y(2) = 2$

18. $y' + (2x - 1)y = 0$ $y(1) = 2$

En los Ejercicios 19-24, resolver la ecuación de Bernoulli.

19. $y' + 3x^2 y = x^2 y^3$ 20. $y' + 2xy = xy^2$

21. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2$ 22. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

23. $y' - y = x^3 \sqrt[3]{y}$ 24. $yy' - 2y^2 = e^x$

En los Ejercicios 25-28, a) dibujar en la calculadora el campo de direcciones de la ecuación diferencial, b) Calcular la solución particular de la ecuación diferencial que pasa por los puntos que se indican, y c) representar en la calculadora las soluciones particulares sobre el campo de direcciones.

Ecuación diferencial Puntos

25. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2$ (-2, 4), (2, 8)

26. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$ $\left(0, \frac{7}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

27. $\frac{dy}{dx} + (\operatorname{ctg} x)y = x$ (1, 1), (3, -1)

28. $\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$ (0, 3), (0, 1)

Circuitos eléctricos En los Ejercicios 29-32, usar la ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

En ella, I es la corriente, R la resistencia, L la inductancia y E la fuerza electromotriz (voltaje).

29. Resolver la ecuación diferencial para un voltaje constante E_0 .

30. Usar el resultado del Ejercicio 29 para hallar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 110$ voltios, $R = 550$ ohmios y $L = 4$ henrios. ¿Cuándo alcanza la corriente el 90 por 100 de su valor límite?
31. Resolver la ecuación diferencial para una fuerza electromotriz $E_0 \sin \omega t$.
32. Verificar que la solución del Ejercicio 31 puede escribirse como

$$I = ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

donde ϕ , el ángulo de fase, viene dado por $\arctg(-\omega L/R)$. (Nótese que el término exponencial tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual implica que la corriente tiende a una función periódica.)

33. **Crecimiento de poblaciones** En la predicción del crecimiento de una población, los demógrafos tienen en cuenta las tasas de nacimientos y defunciones además de la diferencia entre las tasas de inmigración y emigración. Sea P la población en el tiempo t y sea N el crecimiento por unidad de tiempo resultante de la diferencia entre inmigración y emigración. El ritmo de crecimiento de la población viene dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP + N, \quad N \text{ es una constante}$$

Resolver esta ecuación diferencial con el fin de hallar P en función de t , si en $t = 0$ el tamaño de la población era P_0 .

34. **Crecimiento de una inversión** Un grupo de empresas empieza a invertir, en $t = 0$, parte de sus ingresos a razón de P dólares por año en un fondo previsto para reforzar la futura expansión del grupo. Supuesto que el fondo reciba un interés del r por 100, compuesto continuamente, la tasa de crecimiento de la cantidad A disponible en el fondo es

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde $A = 0$ en $t = 0$. Resolver esta ecuación diferencial para hallar A en función de t .

Crecimiento de una inversión En los Ejercicios 35 y 36, usar el resultado del Ejercicio 34.

35. Calcular A para:
- $P = \$100,000$, $r = 6$ por 100, y $t = 5$ años.
 - $P = \$250,000$, $r = 5$ por 100, y $t = 10$ años.
36. Calcular t si el grupo necesita $\$800,000$ y puede invertir $\$75,000$ al año en un fondo a una tasa del 8 por 100 compuesto continuamente.

37. **Alimentación por vía intravenosa** Se inyecta glucosa en sangre a razón de q unidades por minuto y el cuerpo desaloja glucosa de la sangre a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Sea $Q(t)$ la cantidad de glucosa en la sangre en el instante t .
- Determinar la ecuación diferencial que describe el ritmo de cambio de la glucosa en sangre con respecto al tiempo.
 - Resolver esa ecuación diferencial, tomando $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.
 - Calcular el límite de $Q(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.
38. **Curva de aprendizaje** El jefe de personal de una empresa estima en 30 el número máximo de unidades que puede producir un trabajador diariamente. El ritmo de crecimiento del número de unidades N producidas respecto del tiempo t , en días, por un empleado nuevo es proporcional a $30 - N$.
- Determinar la ecuación diferencial que describe el ritmo de cambio en la productividad respecto del tiempo.
 - Resolver esa ecuación diferencial.
 - Calcular la solución particular para un empleado nuevo que produce 10 unidades el primer día y 19 el décimosegundo día.

Mezclas En los Ejercicios 39-44, consideremos un depósito que en $t = 0$ tiene en su interior v_0 galones de una solución que contiene q_0 libras de un concentrado soluble. Otra solución, que contiene q_1 libras de concentrado por galón, está entrando en el depósito a razón de r_1 galones por minuto. La solución del depósito se remueve constantemente y se vacía a razón de r_2 galones por minuto.

39. Si Q es la cantidad de concentrado en la solución en el instante t , probar que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_2 Q}{v_0 + (r_1 - r_2)t} = q_1 r_1$$

40. Si Q es la cantidad de concentrado en la solución en el instante t , escribir la ecuación diferencial para el ritmo de cambio de Q respecto de t , si $r_1 = r_2 = r$.
41. Un depósito de 200 galones está lleno de una solución que contiene 25 libras de concentrado. Desde el instante $t = 0$, se introduce en él agua destilada a razón de 10 galones/min y se remueve la solución mientras se vacía a ese mismo ritmo.
- Expresar la cantidad Q de concentrado en la solución en función de t .
 - Calcular el tiempo que tarda la cantidad de concentrado en llegar a 15 libras.
 - Hallar la cantidad de concentrado en la solución cuando $t \rightarrow \infty$.

42. Repetir el Ejercicio 41 suponiendo que la solución que está entrando en el depósito contiene 0,05 libras de concentrado por galón.
43. Un depósito de 200 galones está lleno hasta su mitad de agua destilada. En el instante $t = 0$ empieza a entrar en él una solución, que contiene 0,5 libras de concentrado por galón, a razón de 5 galones/min. La mezcla, bien removida en todo momento, escapa del depósito a razón de 3 galones /min.
- a) ¿En qué momento se acabará de llenar el depósito?
b) En ese instante, ¿cuántas libras de concentrado contendrá?
44. Rehacer el Ejercicio 43 suponiendo que la solución que entra en el depósito contiene 1 libra de concentrado por galón.

En los Ejercicios 45-48, asociar cada ecuación diferencial con su solución.

<u>Ecuación diferencial</u>	<u>Solución</u>
45. $y' - 2x = 0$	a) $y = Ce^{x^2}$
46. $y' - 2y = 0$	b) $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
47. $y' - 2xy = 0$	c) $y = x^2 + C$
48. $y' - 2xy = x$	d) $y = Ce^{2x}$

En los Ejercicios 49-64, resolver la ecuación diferencial de primer orden usando algún método apropiado.

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x+y}}{e^{x-y}}$
50. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y(y+2)}$
51. $(1+y^2)dx + (2xy+y+2)dy = 0$
52. $(1+2e^{2x+y})dx + e^{2x+y}dy = 0$
53. $y \cos x - \cos x + \frac{dy}{dx} = 0$
54. $(x+1)\frac{dy}{dx} = e^x - y$
55. $(x^2 + \cos y)\frac{dy}{dx} = -2xy$

56. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$
57. $(3y^2 + 4xy)dx + (2xy + x^2)dy = 0$
58. $(x+y)dx - xdy = 0$
59. $(2y - e^x)dx + xdy = 0$
60. $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$
61. $(x^2y^4 - 1)dx + x^3y^3dy = 0$
62. $ydx + (3x + 4y)dy = 0$
63. $3ydx - (x^2 + 3x + y^2)dy = 0$
64. $x dx + (y + e^y)(x^2 + 1) dy = 0$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Pérdida de peso El peso de una persona depende de las calorías que toma y de la energía que consume. A su vez, esta última depende del peso de la persona, estimándose en 17,5 las calorías por libra consumidas al día. Por tanto, cuanto más peso pierde una persona, menos energía debe consumir (supuesto que mantiene un nivel de actividad constante). Como modelo para la pérdida de peso sirve la ecuación

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = \frac{C}{3.500} - \frac{17,5}{3.500} w$$

donde w es el peso en libras, t el tiempo en días y C el consumo diario de calorías.

- a) Hallar la solución general de esa ecuación diferencial.
- b) Una persona que pesa 180 libras y comienza una dieta de 2.500 calorías diarias, ¿cuánto tardará en perder 10 libras? ¿Y en perder 35 libras?
- c) Representar la solución en una calculadora. ¿Cuál es el peso «límite» de esa persona?
- d) Repetir los apartados b) y c) para una persona que pesa 200 libras al comenzar la dieta.

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre modelos del adelgazamiento, véase el artículo «A Linear Diet Model» de Arthur C. Segal en *The College Mathematics Journal*, enero 1987.

- CONTENIDO ■
 Ecuaciones diferenciales lineales
 de segundo orden ■
 Ecuaciones diferenciales lineales
 de orden superior ■
 Aplicaciones ■



15.3

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

En esta sección y en la siguiente, discutiremos varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que 1.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN n

Sean g_1, g_2, \dots, g_n y f funciones de x con un dominio común (un intervalo). Una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + g_2(x)y^{(n-2)} + \dots + g_{n-1}(x)y' + g_n(x)y = f(x)$$

se llama una **ecuación diferencial lineal de orden n** . Si $f(x) = 0$, se dice que es **homogénea**; en caso contrario, es inhomogénea.

| Nota. ¡Cuidado! Este uso del calificativo *homogéneo* es distinto del de la Sección 5.7.

Estudiamos las ecuaciones homogéneas en esta sección y dejamos las inhomogéneas para la próxima.

Las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son linealmente independientes si la única solución de la ecuación

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n = 0$$

es la solución trivial, $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$. En caso contrario, esa colección de funciones se dice que es linealmente dependiente.

EJEMPLO 1 Funciones linealmente dependientes y linealmente independientes

- a) Las funciones $y_1(x) = \sin x$ e $y_2 = x$ son linealmente independientes, ya que los únicos valores de C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \sin x + C_2 x = 0$$

para todo x , son $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

- b) Se puede demostrar que dos funciones son linealmente dependientes si y sólo si una es múltiplo de la otra. Por ejemplo, $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 3x$ son linealmente dependientes, porque

$$C_1x + C_2(3x) = 0$$

admite la solución no nula $C_1 = -3$ y $C_2 = 1$. □

El próximo teorema subraya la importancia de la independencia lineal a la hora de construir la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

TEOREMA 15.4 COMBINACIONES LINEALES DE SOLUCIONES

Si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, la solución general es

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Demostración: Demostraremos sólo una dirección. Que y_1 e y_2 son soluciones significa que se satisface el sistema

$$y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) = 0$$

$$y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por C_1 , la segunda por C_2 y sumando las ecuaciones resultantes, queda

$$[C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)] + a[C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)] + b[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = 0$$

lo cual significa que

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

es solución, como queríamos probar. La demostración de que todas las soluciones son de esta forma es más apropiada en un curso especializado de ecuaciones diferenciales. \square

El Teorema 15.4 establece que si somos capaces de hallar dos soluciones linealmente independientes, obtendremos la solución general formando simplemente una combinación lineal de ambas.

Para encontrar dos soluciones linealmente independientes, observemos que la naturaleza de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ sugiere que puede tener soluciones de la forma $y = e^{mx}$. Si así fuera, tendríamos $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$. Así pues, sustituyendo $y = e^{mx}$ en la ecuación, vemos que es solución si y sólo si

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$m^2 e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + am + b) = 0$$

Como e^{mx} nunca se anula, $y = e^{mx}$ es solución si y sólo si

$$m^2 + am + b = 0$$

Ecuación característica

Ésta es la **ecuación característica** de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0$$

Se obtiene de la ecuación diferencial reemplazando y'' por m^2 , y' por m , e y por 1.

EJEMPLO 2 Ecuación característica con raíces reales y distintas

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0$$

Solución: En este caso, la ecuación característica es

$$m^2 - 4 = 0 \quad \text{Ecuación característica}$$

así que $m = \pm 2$. Así pues, $y_1 = e^{m_1 x} = e^{2x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{-2x}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial propuesta. Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, del Teorema 15.4 concluimos que la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \quad \text{Solución general} \quad \square$$

La ecuación característica del Ejemplo 2 tiene dos raíces reales distintas. Pero el Álgebra enseña que ésta es sólo una de las tres situaciones posibles para una ecuación cuadrática. En general, la ecuación cuadrática $m^2 + am + b = 0$ tiene raíces

$$m_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

que dan lugar a tres casos diferentes.

1. Dos raíces reales distintas, $m_1 \neq m_2$.
2. Dos raíces reales iguales, $m_1 = m_2$.
3. Dos raíces complejas conjugadas, $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$.

En términos de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, esos tres casos están asociados a tres tipos distintos de soluciones generales.

EXPLORACIÓN

Escribir la ecuación característica de cada una de las ecuaciones que siguen, resolverla y usar los valores de m obtenidos para hallar su solución general. Usando esos resultados, expresar la solución general de las ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tenga raíces reales distintas.

a) $y'' - 9y = 0$

b) $y'' - 6y' + 8y = 0$

TEOREMA 15.5 SOLUCIONES DE $y'' + ay' + by = 0$

Las soluciones de

$$y'' + ay' + by = 0$$

pueden ser de tres clases, dependiendo de cómo sean las soluciones m_1, m_2 de la ecuación característica $m^2 + am + b = 0$.

1. *Raíces reales distintas* Si $m_1 \neq m_2$, ambas reales, la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. *Raíces reales iguales* Si $m_1 = m_2$, ambas reales, la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{m_1 x}$$

3. *Raíces complejas* Si $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$, la solución general es

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

EJEMPLO 3 Ecuación característica con raíces complejas

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 12y = 0$$

Solución: La ecuación característica

$$m^2 + 6m + 12 = 0$$

tiene dos raíces complejas:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= -3 \pm \sqrt{-3} \\ &= -3 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha = -3$ y $\beta = \sqrt{3}$, luego la solución general es

$$y = C_1 e^{-3x} \cos \sqrt{3}x + C_2 e^{-3x} \operatorname{sen} \sqrt{3}x \quad \square$$

| Nota. Nótese que, en el Ejemplo 3, si bien las raíces son complejas, la solución de la ecuación diferencial es real.

EJEMPLO 4 Ecuación característica con raíces iguales

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

Solución: La ecuación característica

$$m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 = 0$$

tiene dos raíces iguales, $m = -2$. Así pues, la solución general viene dada por

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad \text{Solución general}$$

Ahora bien, como $y = 2$ en $x = 0$, tenemos

$$2 = C_1(1) + C_2(0)(1) = C_1$$

Además, al ser $y' = 1$ en $x = 0$, se sigue que

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2(-2x e^{-2x} + e^{-2x})$$

$$1 = -2(2)(1) + C_2[-2(0)(1) + 1]$$

$$5 = C_2$$

En consecuencia, la solución pedida es

$$y = 2e^{-2x} + 5xe^{-2x} \quad \text{Solución particular}$$

Compruebe que es, en efecto, solución de la ecuación diferencial dada. \square

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Para las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior, se puede hallar su solución general del mismo modo que para las de segundo orden. Esto es, se calculan las n raíces de la ecuación característica y, con ellas, se forma una colección de n soluciones linealmente independientes. La mayor diferencia consiste en que, para orden tres o más, las raíces pueden repetirse más de dos veces. Cuando esto ocurra, las soluciones linealmente independientes se construyen multiplicando por potencias crecientes de x , como ilustran los Ejemplos 6 y 7.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación de tercer orden

Hallar la solución general de $y''' - y' = 0$.

Solución: La ecuación característica es

$$\begin{aligned} m^3 - m &= 0 \\ m(m - 1)(m + 1) &= 0 \\ m &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

Como tiene tres raíces distintas, la solución general es

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x \quad \text{Solución general} \quad \square$$

EJEMPLO 6 Resolución de una ecuación de tercer orden

Hallar la solución general de $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Solución: La ecuación característica es

$$\begin{aligned} m^3 + 3m^2 + 3m + 1 &= 0 \\ (m + 1)^3 &= 0 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

Puesto que la raíz $m = -1$ es triple, la solución general viene dada por

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} \quad \text{Solución general} \quad \square$$

EJEMPLO 7 Una ecuación de cuarto orden

Hallar la solución general de $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Solución: Su ecuación característica es

$$\begin{aligned} m^4 + 2m^2 + 1 &= 0 \\ (m^2 + 1)^2 &= 0 \\ m &= \pm i \end{aligned}$$

Como cada una de las raíces $m_1 = \alpha + \beta i = 0 + i$ y $m_2 = \alpha - \beta i = 0 - i$ es doble, la solución general es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x \quad \text{Solución general} \quad \square$$

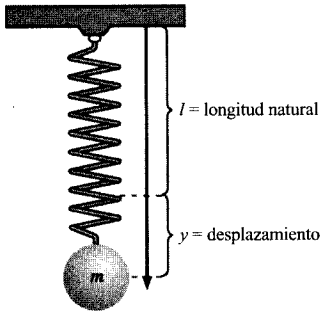


FIGURA 15.9

Un objeto rígido de masa m , sujeto al extremo de un muelle, produce un desplazamiento y .

Aplicaciones

Entre otras muchas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales está la descripción del movimiento oscilante de un muelle. Según la ley de Hooke, un muelle que se estira (o se comprime) y unidades respecto de su longitud natural tiende a *restablecer* su longitud natural con una fuerza F proporcional a y . Esto es, $F(y) = -ky$, donde k es la constante del muelle, que indica la rigidez del muelle.

Supongamos que se sujeta al extremo del muelle un objeto de masa m y causa un desplazamiento en éste, como sugiere la Figura 15.9. Supongamos además que la masa del muelle es despreciable frente a la masa m . Si se tira del objeto hacia abajo y entonces se suelta, las oscilaciones resultantes son fruto de dos fuerzas opuestas: la del muelle $F(y) = -ky$ y el peso mg del objeto. En tales circunstancias, podemos usar una ecuación diferencial para averiguar la posición y del objeto en función del tiempo t . De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza que actúa sobre el peso es $F = ma$, donde $a = d^2y/dt^2$ es la aceleración. Supuesto que el movimiento no sufra amortiguamiento, o sea, que no haya fuerzas de fricción, se sigue que $m(d^2y/dt^2) = -ky$, y se tiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)y = 0 \quad \text{Movimiento de un muelle sin amortiguamiento}$$

EJEMPLO 8 Movimiento de un muelle sin amortiguamiento

Un peso de 4 libras produce en un muelle, del que está suspendido, un desplazamiento de 8 pulgadas hacia abajo respecto de la longitud natural del muelle. Se tira del peso hasta desplazarlo 6 pulgadas más hacia abajo y se suelta a continuación con una velocidad inicial de 8 pies/s, dirigida hacia arriba. Hallar una fórmula que describa la posición del objeto en función del tiempo t .

Solución: Por la ley de Hooke, $4 = k(\frac{2}{3})$, luego $k = 6$. Además, como el peso w es mg , se sigue que $m = w/g = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Por tanto, la ecuación diferencial resultante para este movimiento no amortiguado es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 48y = 0$$

Puesto que la ecuación característica $m^2 + 48 = 0$ tiene raíces complejas $m = 0 \pm 4\sqrt{3}i$, la solución general es

$$y = C_1 e^0 \cos 4\sqrt{3}t + C_2 e^0 \sen 4\sqrt{3}t = C_1 \cos 4\sqrt{3}t + C_2 \sen 4\sqrt{3}t$$

Usando las condiciones iniciales, resulta

$$\frac{1}{2} = C_1(1) + C_2(0) \implies C_1 = \frac{1}{2} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

$$y'(t) = -4\sqrt{3}C_1 \sen 4\sqrt{3}t + 4\sqrt{3}C_2 \cos 4\sqrt{3}t$$

$$8 = -4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)(0) + 4\sqrt{3}C_2(1) \implies C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad y'(0) = 8$$

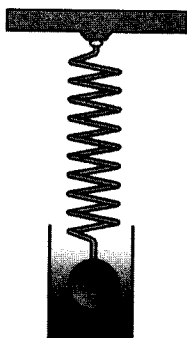


FIGURA 15.10

Una vibración amortiguada puede ser debida a la fricción o a un movimiento en el interior de un fluido.

En consecuencia, la posición en el instante t viene dada por

$$y = \frac{1}{2} \cos 4\sqrt{3}t + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} 4\sqrt{3}t \quad \square$$

Supongamos que sobre el objeto de la Figura 15.10 actúa una fuerza adicional de rozamiento proporcional a su velocidad. Un ejemplo típico lo da el movimiento en el interior de un fluido. Teniendo en cuenta esta fuerza de amortiguamiento, $-p(dy/dt)$, la ecuación diferencial para el movimiento es ahora

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - p \frac{dy}{dt}$$

o, si se prefiere, en forma canónica,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{p}{m} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{k}{m} y = 0 \quad \text{Movimiento de un muelle con amortiguamiento}$$

Ejercicios de la Sección 15.3

En los Ejercicios 1-4, verificar la solución de la ecuación diferencial.

<u>Solución</u>	<u>Ecuación diferencial</u>
1. $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$	$y'' + 6y' + 9y = 0$
2. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$	$y'' - 4y = 0$
3. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$	$y'' + 4y = 0$
4. $y = e^{-x} \operatorname{sen} 3x$	$y'' + 2y' + 10y = 0$

En los Ejercicios 5-30, hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 5. $y'' - y' = 0$ | 6. $y'' + 2y' = 0$ |
| 7. $y'' - y' - 6y = 0$ | 8. $y'' + 6y' + 5y = 0$ |
| 9. $2y'' + 3y' - 2y = 0$ | 10. $16y'' - 16y' + 3y = 0$ |
| 11. $y'' + 6y' + 9y = 0$ | 12. $y'' - 10y' + 25y = 0$ |
| 13. $16y'' - 8y' + y = 0$ | 14. $9y'' - 12y' + 4y = 0$ |
| 15. $y'' + y = 0$ | 16. $y'' + 4y = 0$ |
| 17. $y'' - 9y = 0$ | 18. $y'' - 2y = 0$ |
| 19. $y'' - 2y' + 4y = 0$ | 20. $y'' - 4y' + 21y = 0$ |
| 21. $y'' - 3y' + y = 0$ | 22. $3y'' + 4y' - y = 0$ |
| 23. $9y'' - 12y' + 11y = 0$ | 24. $2y'' - 6y' + 7y = 0$ |

25. $y^{(4)} - y = 0$
26. $y^{(4)} - y'' = 0$
27. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
28. $y''' - y'' - y' + y = 0$
29. $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$
30. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
31. Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 100y = 0$ y la solución $y = C_1 \cos 10x + C_2 \operatorname{sen} 10x$. Hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales propuestas.
- a) $y(0) = 2, y'(0) = 0$
- b) $y(0) = 0, y'(0) = 2$
- c) $y(0) = -1, y'(0) = 3$
32. Determinar C y ω de manera tal que $y = C \operatorname{sen} \sqrt{3}t$ sea una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + \omega y = 0$, con $y'(0) = -5$.

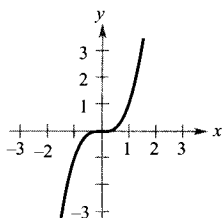
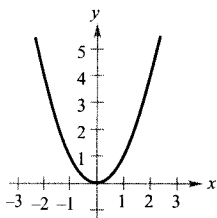
En los Ejercicios 33-36, calcular la solución particular de la ecuación diferencial lineal.

- | | |
|--|--|
| 33. $y'' - y' - 30y = 0$
$y(0) = 1, y'(0) = -4$ | 34. $y'' + 2y' + 3y = 0$
$y(0) = 2, y'(0) = 1$ |
| 35. $y'' + 16y = 0$
$y(0) = 0, y'(0) = 2$ | 36. $y'' + 2y' + 3y = 0$
$y(0) = 2, y'(0) = -1$ |

Para pensar En los Ejercicios 37 y 38, explicar, mediante un argumento geométrico, por qué la gráfica no puede ser una solución de la ecuación diferencial. No es necesario resolver la ecuación diferencial.

37. $y'' = y'$

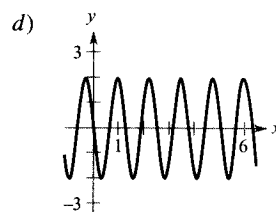
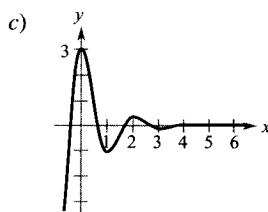
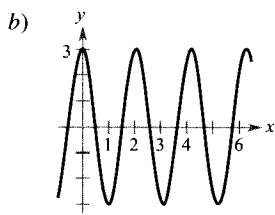
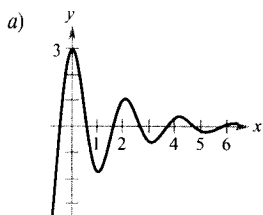
38. $y'' = -\frac{1}{2}y'$



Vibraciones de un muelle En los Ejercicios 39-44, describir el movimiento de un peso de 32 libras, sujeto al extremo de un muelle, en el que produce un estiramiento de 2/3 pies respecto de su longitud natural.

39. Se hace descender el peso medio pie por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta.
40. Se alza 2/3 pies el peso sobre la posición de equilibrio y a continuación se suelta.
41. Se alza 2/3 pies el peso sobre la posición de equilibrio y a continuación se le imprime una velocidad inicial de 1/2 pies/s hacia abajo.
42. Se tira del peso hasta que se encuentre medio pie por debajo de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial de 1/2 pie/s hacia arriba.
43. Se hace descender el peso medio pie por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta. El movimiento tiene lugar en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento igual a 1/8 de la velocidad en todo instante.
44. Repetir el Ejercicio 43 en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento igual a $|v|/4$.

Vibraciones de un muelle En los Ejercicios 45-48, asociar cada ecuación diferencial con la gráfica de una solución particular. Tal asociación puede realizarse comparando la frecuencia de la vibración o el ritmo al que son amortiguadas con el coeficiente apropiado de la ecuación diferencial.



45. $y'' + 9y = 0$
46. $y'' + 25y = 0$
47. $y'' + 2y' + 10y = 0$
48. $y'' + y' + \frac{37}{4}y = 0$
49. Si la ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0$$

tiene dos raíces iguales a r , probar que

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

es una solución.

50. Si la ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0$$

tiene raíces complejas $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$, probar que

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

es una solución.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 51-54, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

51. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ es la solución general de $y'' - 6y' + 9 = 0$.
52. $y = (C_1 + C_2 x) \sin x + (C_3 + C_4 x) \cos x$ es la solución general de $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
53. $y = x$ es solución de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ si y sólo si $a_1 = a_0 = 0$.
54. Es posible elegir a y b de modo tal que $y = x^2 e^x$ sea solución de $y'' + ay' + by = 0$.

El *wronskiano* de dos funciones diferenciables f y g , que se denota por $W(f, g)$, se define como la función dada por el determinante

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

Las funciones f y g son linealmente independientes si existe al menos un valor de x en el que $W(f, g) \neq 0$. En los Ejercicios 55-58, usar el wronskiano para verificar la independencia lineal de las dos funciones.

$$55. \quad y_1 = e^{ax} \\ y_2 = e^{bx}, \quad a \neq b$$

$$57. \quad y_1 = e^{ax} \operatorname{sen} bx \\ y_2 = e^{ax} \operatorname{cos} bx, \quad b \neq 0$$

$$56. \quad y_1 = e^{ax} \\ y_2 = xe^{ax}$$

$$58. \quad y_1 = x \\ y_2 = x^2$$

59. La ecuación diferencial de Euler es de la forma

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0$$

donde a y b son constantes.

a) Probar que la sustitución $x = e^t$ la transforma en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

b) Resolver $x^2 y'' + 6xy' + 6y = 0$.

60. Resolver $y'' + Ay = 0$, donde A es constante, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$.

- CONTENIDO ■
Ecuaciones inhomogéneas ■
Método de los coeficientes indeterminados ■
Variación de las constantes ■



15.4

Ecuaciones lineales inhomogéneas de segundo orden

Ecuaciones inhomogéneas

En la sección precedente hemos descrito las vibraciones de un muelle mediante la ecuación lineal *homogénea* de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{p}{m} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{k}{m} y = 0 \quad \text{Movimiento libre}$$

Este tipo de oscilaciones se llaman libres porque están determinadas sólo por el muelle y por la gravedad, estando libres de otras fuerzas externas. Si ese sistema se somete además a una fuerza periódica externa, tal como $a \operatorname{sen} bt$, provocada por vibraciones al otro extremo del muelle, el movimiento se dice que es forzado, y viene caracterizado por la ecuación *inhomogénea*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{p}{m} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{k}{m} y = a \operatorname{sen} bt \quad \text{Movimiento forzado}$$

En esta sección presentaremos dos métodos que permiten calcular la solución general de una ecuación lineal inhomogénea. En ambos, el primer paso consiste en hallar la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

$$y = y_h \quad \text{Solución general de la ecuación homogénea}$$

Una vez hecho eso, se intenta calcular una solución particular de la ecuación inhomogénea

$$y = y_p \quad \text{Solución particular de la ecuación inhomogénea}$$

Combinando esos dos resultados, se puede concluir que la solución general de la ecuación inhomogénea es $y = y_h + y_p$, tal como establece el próximo teorema.



SOPHIE GERMAIN (1776-1831)

Muchas de las primeras aplicaciones del Cálculo tenían como objetivo formular modelos para la vibración de muelles y membranas, así como la elasticidad. Entre las primeras contribuciones se cuentan las de la matemática francesa Sophie Germain, galardonada en 1816 con un premio de la Academia francesa por un trabajo titulado «Memoria sobre las vibraciones de láminas elásticas».

TEOREMA 15.6 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LINEAL INHOMOGÉNEA

Sea

$$y'' + ay' + by = F(x)$$

una ecuación diferencial lineal inhomogénea de segundo orden. Si y_p es una solución particular de esta ecuación e y_h es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, entonces

$$y = y_h + y_p$$

es la solución general de la ecuación inhomogénea.

Método de los coeficientes indeterminados

Ya sabemos cómo calcular la solución general de la ecuación diferencial lineal *homogénea*. El resto de esta sección se dedica al cálculo de la solución particular y_p . Si en la ecuación

$$y'' + ay' + by = F(x)$$

la función $F(x)$ consta de sumas o productos de x^n , e^{mx} , $\cos \beta x$, o $\sin \beta x$, se puede hallar una solución particular y_p por el método de los coeficientes indeterminados. La justificación de este método es simplemente la sospecha de que la solución y_p debe ser una forma generalizada de $F(x)$. He aquí algunos ejemplos:

1. Si $F(x) = 3x^2$, tomar $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
2. Si $F(x) = 4xe^x$, tomar $y_p = Axe^x + Be^x$.
3. Si $F(x) = x + \sin 2x$, tomar $y_p = (Ax + B) + C \sin 2x + D \cos 2x$.

Con esta forma de la y_p se sustituye en la ecuación y se determinan los coeficientes.

EJEMPLO 1 Método de los coeficientes indeterminados

Calcular la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = 2 \sin x$$

Solución: Para hallar y_h , resolvemos la ecuación característica

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$(m + 1)(m - 3) = 0$$

$$m = -1 \quad \text{o} \quad m = 3$$

Así pues, $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Ahora, tomamos y_p como una forma generalizada de $2 \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned}y_p &= A \cos x + B \operatorname{sen} x \\y'_p &= -A \operatorname{sen} x + B \cos x \\y''_p &= -A \cos x - B \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial planteada, obtenemos

$$\begin{aligned}y'' - 2y' - 3y &= 2 \operatorname{sen} x \\-A \cos x - B \operatorname{sen} x + 2A \operatorname{sen} x - 2B \cos x - 3A \cos x - 3B \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} x \\(-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de términos análogos, deducimos

$$-4A - 2B = 0 \quad \text{y} \quad 2A - 4B = 2$$

con soluciones $A = \frac{1}{5}$ y $B = -\frac{2}{5}$. Por tanto,

$$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x$$

y la solución general resulta ser

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\&= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x\end{aligned} \quad \square$$

En el Ejemplo 1, la forma de la solución de la homogénea

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

no se solapa con la de la función $F(x)$ que aparece en la ecuación

$$y'' + ay' + by = F(x)$$

Pensemos un momento qué sucedería si la ecuación diferencial del Ejemplo 1 fuese

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$$

No tendría sentido ensayar como solución particular una función del tipo $y = Ae^{-x}$, porque sabemos que es solución de la homogénea, luego daría 0. En casos así, hay que modificar la función a ensayar, multiplicando por la menor potencia de x que elimine el solapamiento. Para este problema concreto que acabamos de proponer, habría que ensayar con

$$y_p = Axe^{-x}$$

EJEMPLO 2 Método de los coeficientes indeterminados

Hallar la solución general de

$$y'' - 2y' = x + 2e^x$$

Solución: La ecuación característica $m^2 - 2m = 0$ tiene soluciones $m = 0$ y $m = 2$, así que

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Puesto que $F(x) = x + 2e^x$, la primera intención es tomar y_p de la forma $(A + Bx) + Ce^x$. Sin embargo, como y_h ya contiene un término constante C_1 , tenemos que multiplicar la parte polinómica por x , de manera que usaremos

$$y_p = Ax + Bx^2 + Ce^x$$

$$y'_p = A + 2Bx + Ce^x$$

$$y''_p = 2B + Ce^x$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial dada se obtiene

$$\begin{aligned} y'' - 2y' &= x + 2e^x \\ (2B + Ce^x) - 2(A + 2Bx + Ce^x) &= x + 2e^x \\ (2B - 2A) - 4Bx - Ce^x &= x + 2e^x \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los términos análogos llegamos al sistema

$$2B - 2A = 0, \quad -4B = 1, \quad -C = 2$$

con soluciones $A = B = -\frac{1}{4}$ y $C = -2$. Por consiguiente,

$$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

y la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x \end{aligned} \quad \square$$

En el Ejemplo 2, la parte polinómica del ensayo inicial para y_p ,

$$(A + Bx) + Ce^x$$

se solapaba en el término constante con $y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$, y ha sido necesario multiplicarla por una potencia de x que eliminase el solapamiento. El próximo ejemplo vuelve a ilustrar algunas elecciones de y_p adoptadas con el fin de evitar que solapen con las formas de las funciones que forman parte de $F(x)$.

EJEMPLO 3 Elección de la forma de la solución particular

Proponer una elección adecuada para cada uno de los casos siguientes.

$y'' + ay' + by = F(x)$	y_h
a) $y'' = x^2$	$C_1 + C_2x$
b) $y'' + 2y' + 10y = 4 \operatorname{sen} 3x$	$C_1e^{-x} \cos 3x + C_2e^{-x} \operatorname{sen} 3x$
c) $y'' - 4y' + 4 = e^{2x}$	$C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

Solución:

- a) Como $F(x) = x^2$, la elección normal para y_p sería $A + Bx + Cx^2$. Ahora bien, puesto que $y_h = C_1 + C_2x$ ya contiene un término lineal en x , debemos multiplicar por x^2 y usar

$$y_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$$

- b) Como $F(x) = 4 \operatorname{sen} 3x$ y cada término de y_h contiene un factor e^{-x} , tomamos simplemente

$$y_p = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x$$

- c) Dado que $F(x) = e^{2x}$, la elección normal para y_p sería Ae^{2x} . Sin embargo, como $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ ya contiene un término xe^{2x} , hay que multiplicar por x^2 , así que usaremos

$$y_p = Ax^2e^{2x} \quad \square$$

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación de tercer orden

Calcular la solución general de

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x$$

Solución: Por el Ejemplo 6 de la sección precedente sabemos que la solución de la homogénea es

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$$

Como $F(x) = x$, tomamos $y_p = A + Bx$, con lo que obtenemos $y'_p = B$ e $y''_p = 0$. Sustituyendo vemos que

$$(0) + 3(0) + 3(B) + (A + Bx) = (3B + A) + Bx = x$$

Por tanto, $B = 1$ y $A = -3$, lo cual implica que $y_p = -3 + x$. En consecuencia, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} - 3 + x \end{aligned} \quad \square$$

Variación de las constantes

El método de los coeficientes indeterminados es eficaz si $F(x)$ consta de polinomios o funciones cuyas derivadas sucesivas presentan carácter cíclico. Para funciones tales como $1/x$ o $\operatorname{tg} x$, que no tienen esa propiedad, conviene utilizar un método más general, el método de variación de las constantes (o variación de los parámetros). En él se supone que y_p tiene la misma forma que y_h , excepto que las constantes de y_h son reemplazadas por funciones.

VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = F(x)$, se puede hallar siguiendo estos pasos:

1. Hallar $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$.
2. Reemplazar las constantes por funciones, tomando $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.
3. Resolver el siguiente sistema en u_1 y u_2

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= F(x) \end{aligned}$$

4. Integrar los resultados para obtener u_1 y u_2 . La solución general es $y = y_h + y_p$.

EJEMPLO 5 Variación de las constantes

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}, \quad x > 0$$

Solución: La ecuación característica $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$ tiene como solución $m = 1$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Sustituyendo C_1 y C_2 por u_1 y u_2 se obtiene

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^x + u_2 x e^x$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{aligned} u_1' e^x + u_2' x e^x &= 0 \\ u_1' e^x + u_2' (x e^x + e^x) &= \frac{e^x}{2x} \end{aligned}$$

Restando una ecuación de la otra obtenemos $u'_2 = 1/(2x)$. Ahora, sustituyendo en la primera ecuación resulta ser $u'_1 = -\frac{1}{2}$. Finalmente, por integración,

$$u_1 = -\int \frac{1}{2} dx = -\frac{x}{2} \quad y \quad u_2 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln x = \ln \sqrt{x}$$

De aquí se sigue que una solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{2}xe^x + (\ln \sqrt{x})xe^x$$

y la solución general viene dada por

$$y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}xe^x + xe^x \ln \sqrt{x} \quad \square$$

EJEMPLO 6 Variación de las constantes

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Solución: Como la ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ tiene soluciones $m = \pm i$, la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo C_1 y C_2 por u_1 y u_2 se obtiene

$$y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{aligned} u'_1 \cos x + u'_2 \operatorname{sen} x &= 0 \\ -u'_1 \operatorname{sen} x + u'_2 \cos x &= \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por $\operatorname{sen} x$ y la segunda por $\cos x$ obtenemos

$$\begin{aligned} u'_1 \operatorname{sen} x \cos x + u'_2 \operatorname{sen}^2 x &= 0 \\ -u'_1 \operatorname{sen} x \cos x + u'_2 \cos^2 x &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones vemos que $u'_2 = \operatorname{sen} x$, luego

$$\begin{aligned} u'_1 &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \\ &= \cos x - \sec x \end{aligned}$$

Por integración se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 &= \int (\cos x - \sec x) dx \\ &= \operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \operatorname{sen} x dx \\ &= -\cos x \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y_p &= \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| - \operatorname{sen} x \cos x \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

así que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned} \quad \square$$

Ejercicios de la Sección 15.4

En los Ejercicios 1-4, verificar la solución de la ecuación diferencial.

<u>Solución</u>	<u>Ecuación diferencial</u>
1. $y = 2(e^{2x} - \cos x)$	$y'' + y = 10e^{2x}$
2. $y = (2 + \frac{1}{2}x) \operatorname{sen} x$	$y'' + y = \cos x$
3. $y = 3 \operatorname{sen} x - \cos x \ln \sec x + \operatorname{tg} x $	$y'' + y = \operatorname{tg} x$
4. $y = (5 - \ln \operatorname{sen} x) \cos x - x \operatorname{sen} x$	$y'' + y = \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

En los Ejercicios 5-20, resolver la ecuación diferencial por el método de los coeficientes indeterminados.

- $y'' - 3y' + 2y = 2x$
- $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 1$
- $y'' + y = x^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- $y'' + 4y = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$
- $y'' + 2y' = 2e^x$
- $y'' - 9y = 5e^{3x}$

- $y'' - 10y' + 25y = 5 + 6e^x$
- $16y'' - 8y' + y = 4(x + e^x)$
- $y'' + y' = 2 \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$
- $y'' + y' - 2y = 3 \cos 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
- $y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x$
- $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{sen} x + \cos x$
- $y''' - 3y' + 2y = 2e^{-2x}$
- $y''' - y'' = 4x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$
- $y' - 4y = xe^x - xe^{4x}$, $y(0) = \frac{1}{3}$
- $y' + 2y = \operatorname{sen} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{5}$

21. Para pensar

- Explicar cómo se adivina, por inspección, que una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 3y = 12$ es $y_p = 4$.
- Usar la explicación de a) para hallar una solución particular de $y'' + 5y = 10$.
- Usar la explicación de a) para hallar una solución particular de $y'' + 2y' + 2y = 8$.

22. Para pensar

- a) Explicar cómo se adivina, por inspección, que la forma de una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 3y = 12 \operatorname{sen} x$ es $y_p = A \operatorname{sen} x$.
- b) Usar la explicación de a) para hallar una solución particular de $y'' + 5y = 10 \cos x$.
- c) Comparar el álgebra requerida para obtener las soluciones particulares de los apartados a) y b) con la exigida si la forma de la solución particular fuese $y_p = A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

En los Ejercicios 23-28, resolver la ecuación diferencial por el método de variación de las constantes.

23. $y'' + y = \sec x$ 24. $y'' + y = \sec x \operatorname{tg} x$
25. $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$ 26. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$
27. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$ 28. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

Circuitos eléctricos En los Ejercicios 29 y 30, usar la ecuación diferencial de un circuito eléctrico

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) q = \left(\frac{1}{L}\right) E(t)$$

donde R es la resistencia (en ohmios), C la capacitancia (en faradios), L la inductancia (en henrios), $E(t)$ la fuerza electromotriz (en voltios) y q la carga del condensador (en coulombios). Calcular la carga q en función del tiempo para el circuito descrito. Supóngase que $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$.

29. $R = 20$, $C = 0,02$, $L = 2$
 $E(t) = 12 \operatorname{sen} 5t$
30. $R = 20$, $C = 0,02$, $L = 1$
 $E(t) = 10 \operatorname{sen} 5t$

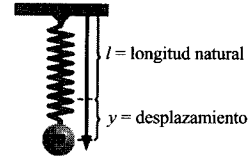
Vibración de un muelle En los Ejercicios 31-34, hallar la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{w}{g} y''(t) + by'(t) + ky(t) = \frac{w}{g} F(t)$$

que describe el movimiento oscilatorio de un objeto sujeto al extremo de un muelle. En la ecuación, y es el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio (dirección positiva hacia abajo) en pies, y t el tiempo en segundos (véase figura). La constante w es el peso del objeto, g la aceleración de la gravedad, b la magnitud de la resistencia al movimiento, k la constante del muelle (ley de Hooke), y $F(t)$ la aceleración impuesta sobre el sistema.

31. $\frac{24}{32} y'' + 48y = \frac{24}{32} (48 \operatorname{sen} 8t)$
 $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$

32. $\frac{2}{32} y'' + 4y = \frac{2}{32} (4 \operatorname{sen} 8t)$
 $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$
33. $\frac{2}{32} y'' + 4y' + 4y = \frac{2}{32} (4 \operatorname{sen} 8t)$
 $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = -3$
34. $\frac{4}{32} y'' + \frac{1}{2} y' + \frac{25}{32} y = 0$
 $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = -4$



Desplazamiento del muelle

35. **Vibración de un muelle** En la solución del Ejercicio 31, reescribir y_h utilizando la identidad

$$a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

donde $\phi = \operatorname{arctg} a/b$.

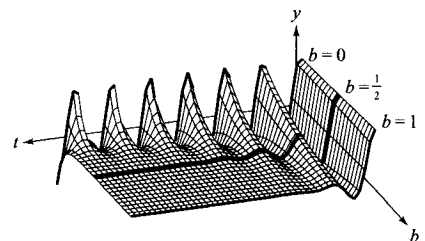
36. **Vibración de un muelle** La figura muestra la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{4}{32} y'' + by' + \frac{25}{2} y = 0$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -4$$

para valores de la resistencia b en el intervalo $[0, 1]$. (Nótese que cuando $b = 1/2$, el problema es idéntico al del Ejercicio 34.)

- a) Describir el movimiento cuando no hay resistencia del medio ($b = 0$).
- b) Si $b > 0$, ¿cuál es el efecto final de la fuerza de resistencia?
- c) ¿Existe algún número M tal que no habrá oscilaciones del muelle si $b > M$? Razonar la respuesta.



37. **Salto en paracaídas** La caída de un paracaidista viene descrita por la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{w}{g} \frac{d^2y}{dt^2} - k \frac{dy}{dt} = w$$

donde w es el peso del paracaidista, y su altura en el instante t , g la aceleración de la gravedad, y k la constante de amortiguamiento del paracaídas. Si el paracaídas se abre a 2.000 pies, $y(0) = 2.000$, y en ese instante la velocidad es $y'(0) = -100$ pies/s, para un paracaidista que pese 160 libras, usando $k = 8$ se obtiene la ecuación diferencial

$$-5y'' - 8y' = 160$$

Con las condiciones iniciales dadas, verificar que la solución de esa ecuación diferencial es

$$y = 1.950 + 50e^{-1.6t} - 20t$$

38. **Salto en paracaídas** Repetir el Ejercicio 37 para un paracaidista que pesa 192 libras y lleva un paracaídas cuya constante de amortiguamiento es $k = 9$.

39. Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x$$

sabiendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x \ln x$ son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea.

40. **¿Verdadero o falso?** $y_p = -e^{2x} \cos e^{-x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-x}$$



15.5

Soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series

- CONTENIDO ■
Series de potencias solución de una ecuación diferencial ■
Aproximación por series de Taylor ■

Series de potencias solución de una ecuación diferencial

Cerramos este capítulo mostrando cómo utilizar series de potencias para resolver ciertas ecuaciones diferenciales. Empezaremos con el método de solución por series de potencias.

Recordemos del Capítulo 8 que una serie de potencias representa una función f en su intervalo de convergencia, y que se puede derivar sucesivamente una serie de potencias para obtener f' , f'' , etc. Usaremos estas propiedades en los próximos dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Solución mediante series de potencias

Hallar una serie de potencias que sea solución de la ecuación diferencial $y' - 2y = 0$.

Solución: Ensayemos $y = \sum a_n x^n$ como solución. Entonces, $y' = \sum n a_n x^{n-1}$. Sustituyendo y' , $-2y$ en la ecuación obtenemos la siguiente forma de serie como solución de la ecuación diferencial. (Hacemos notar que, entre el tercer paso y el cuarto, cambiamos el índice de suma con el fin de que x^n aparezca en ambas sumas.)

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \end{aligned}$$

Igualando ahora los coeficientes de términos análogos, obtenemos la fórmula de recurrencia $(n + 1)a_{n+1} = 2a_n$, de donde

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}, \quad n \geq 0$$

Esta fórmula genera los siguientes resultados:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ a_0 & 2a_0 & \frac{2^2 a_0}{2} & \frac{2^3 a_0}{3!} & \frac{2^4 a_0}{4!} & \frac{2^5 a_0}{5!} & \dots \end{array}$$

Tomando estos valores como coeficientes en la serie solución, obtenemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = a_0 e^{2x} \quad \square$$

En el Ejemplo 1, la ecuación diferencial se podría resolver fácilmente sin recurrir a las series de potencias. Por el contrario, la ecuación diferencial del Ejemplo 2 no se puede resolver por ninguno de los métodos expuestos en las secciones anteriores.

EJEMPLO 2 Solución mediante series de potencias

Hallar una serie de potencias que sea solución de la ecuación diferencial $y'' + xy' + y = 0$.

Solución: Ensayemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como solución. Entonces, se tiene

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad xy' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo y , y' e y'' en la ecuación diferencial propuesta, se deduce

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} &= - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \end{aligned}$$

Con el fin de conseguir potencias iguales de x , ajustamos los índices de suma sustituyendo n por $n+2$ en la de la izquierda, con lo que queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

Igualando coeficientes, vemos que $(n+2)(n+1)a_{n+2} = -(n+1)a_n$, de donde se sigue la fórmula de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n = -\frac{a_n}{n+2}, \quad n \geq 0$$

y los coeficientes de la serie solución son

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2} & a_3 &= -\frac{a_1}{3} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4} & a_5 &= -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} & a_7 &= -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k (k!)} & a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$

Así pues, podemos representar la solución general como suma de dos series, una con potencias pares y coeficientes expresados en términos de a_0 , y otra con potencias impares y coeficientes expresados en términos de a_1

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \dots \right) \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k (k!)} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)} \end{aligned}$$

La solución contiene dos constantes arbitrarias, a_0 y a_1 , como cabía esperar de la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden. \square

Aproximación por series de Taylor

Un segundo tipo de método de solución mediante series consiste en utilizar series de Taylor (Sección 8.10) en problemas con *condiciones iniciales*.

EJEMPLO 3 Aproximación por series de Taylor

Utilizar una serie de Taylor para resolver

$$y' = y^2 - x$$

con la condición inicial $y = 1$ en $x = 0$. A continuación, usar los seis primeros términos de esta solución en forma de serie para aproximar valores de y para $0 \leq x \leq 1$.

x	y
0,0	1,0000
0,1	1,1057
0,2	1,2264
0,3	1,3691
0,4	1,5432
0,5	1,7620
0,6	2,0424
0,7	2,4062
0,8	2,8805
0,9	3,4985
1,0	4,3000

Solución: De lo que vimos en la Sección 8.10 se deduce que, para $c = 0$,

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Como $y(0) = 1$ e $y' = y^2 - x$, obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 2 - 1 = 1 \\ y'''(0) &= 2 + 2 = 4 \\ y^{(4)}(0) &= 8 + 6 = 14 \\ y^{(5)}(0) &= 28 + 32 + 6 = 66 \end{aligned}$$

Por tanto, podemos aproximar los valores de la solución mediante la serie

$$\begin{aligned} y &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{14}{4!}x^4 + \frac{66}{5!}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Usando los seis primeros términos de esta serie, se pueden calcular los valores de y en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, que recoge la tabla adjunta. \square

Ejercicios de la Sección 15.5

En los Ejercicios 1-6, comprobar que la solución por medio de una serie de potencias es equivalente a la solución hallada por las técnicas expuestas en las Secciones 5.7 y 15.1-15.4.

- $y' - y = 0$
- $y' - ky = 0$
- $y'' - 9y = 0$
- $y'' - k^2y = 0$
- $y'' + 4y = 0$
- $y'' + k^2y = 0$

En los Ejercicios 7-10, resolver la ecuación diferencial mediante series de potencias y determinar el intervalo de convergencia de la serie.

- $y' + 3xy = 0$
- $y' - 2xy = 0$
- $y'' - xy' = 0$
- $y'' - xy' - y = 0$

En los Ejercicios 11 y 12, calcular los tres primeros términos de cada una de las series de potencias que representan soluciones independientes de la ecuación diferencial.

- $(x^2 + 4)y'' + y = 0$
- $y'' + x^2y = 0$

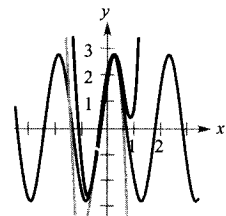
En los Ejercicios 13 y 14, usar el teorema de Taylor para calcular la serie solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales especificadas. Tomando n términos

de la serie con el fin de estimar y para el valor de x que se indica y comparar el resultado con la aproximación dada por el método de Euler con $\Delta x = 0,1$.

13. $y' + (2x - 1)y = 0$, $y(0) = 2$, $n = 5$, $x = \frac{1}{2}$

14. $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$, $n = 4$, $x = 1$

15. **Investigación** Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
- Hallar la solución de la ecuación diferencial mediante las técnicas de la Sección 15.3.
 - Hallar la serie solución de la ecuación diferencial.
 - La figura muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial y sus aproximaciones polinómicas de grados tres y cinco. Identificar cada una de ellas.



16. Consideremos la ecuación diferencial $y'' - xy' = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (Véase Ejercicio 9.)
- Calcular la serie solución que satisface las condiciones iniciales impuestas.
 - Representar las aproximaciones de la solución por medio de los polinomios de grados tres y cinco deducidos de la serie.
 - Identificar la simetría de la solución.

En los Ejercicios 17 y 18, usar el teorema de Taylor para calcular la serie solución de la ecuación diferencial bajo las condiciones iniciales especificadas. Usar n términos de la serie para aproximar y en el valor de x que se indica.

17. $y'' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $n = 6$, $x = \frac{1}{4}$
 18. $y'' - 2xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $n = 8$, $x = \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 19-22, verificar que la serie converge a la función dada en el intervalo que se especifica. (Ayuda: Usar la ecuación diferencial.)

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $(-\infty, \infty)$
 Ecuación diferencial: $y' - y = 0$
20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$, $(-\infty, \infty)$
 Ecuación diferencial: $y'' + y = 0$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arctg } x$, $(-1, 1)$
 Ecuación diferencial: $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)} = \arcsen x$, $(-1, 1)$
 Ecuación diferencial: $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$
23. Calcular los seis primeros términos de la serie solución de la ecuación de Airy $y'' - xy = 0$.

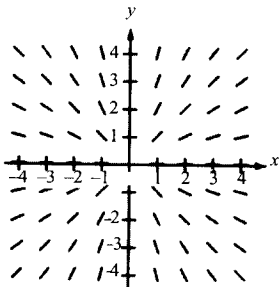
Ejercicios de repaso del Capítulo 15

En los Ejercicios 1-4, clasificar la ecuación diferencial según su tipo y su orden.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $yy'' = x + 1$
- $y'' + 3y' - 10 = 0$
- $(y'')^2 + 4y' = 0$

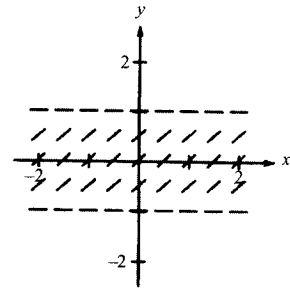
En los Ejercicios 5 y 6, usar la ecuación diferencial dada y su campo de direcciones.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$



- Dibujar varias curvas solución de la ecuación diferencial sobre el campo de direcciones.
- Hallar la solución general de la ecuación diferencial. Comparar el resultado con las curvas dibujadas en el apartado a).

6. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$



- Dibujar varias curvas solución de la ecuación diferencial sobre el campo de direcciones.
- ¿Cuándo es máximo el ritmo de cambio de la solución?
- Hallar la solución general de la ecuación diferencial. Comparar los resultados con las curvas dibujadas en el apartado a).

En los Ejercicios 7-10, emparejar cada ecuación diferencial con su solución.

Ecuación diferencial	Solución
7. $y' - 4 = 0$	a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
8. $y' - 4y = 0$	b) $y = 4x + C$
9. $y'' - 4y = 0$	c) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
10. $y'' + 4y = 0$	d) $y = Ce^{4x}$

En los Ejercicios 11-32, hallar la solución general de la ecuación diferencial de primer orden.

11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2 + \sqrt{x}$ 12. $\frac{dy}{dx} + xy = 2y$
13. $y' - \frac{2y}{x} = \frac{y'}{x}$ 14. $\frac{dy}{dx} - 3x^2y = e^{x^3}$
15. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ 16. $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$
17. $(10x + 8y + 2) dx + (8x + 5y + 2) dy = 0$
18. $(y + x^3 + xy^2) dx - x dy = 0$
19. $(2x - 2y^3 + y) dx + (x - 6xy^2) dy = 0$
20. $3x^2y^2 dx + (2x^3y + x^3y^4) dy = 0$
21. $dy = (y \operatorname{tg} x + 2e^x) dx$
22. $y dx - (x + \sqrt{xy}) dy = 0$
23. $(x - y - 5) dx - (x + 3y - 2) dy = 0$
24. $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$
25. $x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2}$
26. $xy' + y = \operatorname{sen} x$
27. $yy' + y^2 = 1 + x^2$
28. $2x dx + 2y dy = (x^2 + y^2) dx$
29. $(1 + x^2) dy = (1 + y^2) dx$
30. $x^3yy' = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$
31. $xy' - ay = bx^4$
32. $y' = y + 2x(y - e^x)$

En los Ejercicios 33-40, calcular la solución particular de la ecuación diferencial que cumple la condición de contorno.

33. $y' - 2y = e^x$
 $y(0) = 4$
34. $y' + \frac{2y}{x} = -x^9y^5$
 $y(1) = 2$
35. $x dy = (x + y + 2) dx$
 $y(1) = 10$
36. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = 0$
 $y(-2) = -5$
37. $(1 + y) \ln(1 + y) dx + dy = 0$
 $y(0) = 2$
38. $(2x + y - 3) dx + (x - 3y + 1) dy = 0$
 $y(2) = 0$

39. $y' = x^2y^2 - 9x^2$
 $y(0) = \frac{3(1 + e)}{1 - e}$

40. $2xy' - y = x^3 - x$
 $y(4) = 2$

En los Ejercicios 41 y 42, hallar las trayectorias ortogonales a la familia dada y dibujar varias curvas de ambas familias.

41. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ 42. $y - 2x = C$

43. **Quitanieves** Supongamos que el ritmo de cambio en el número s de millas por hora de carretera que limpia una máquina quitanieves es inversamente proporcional a la altura de la nieve.


- a) Escribir y resolver la ecuación diferencial que verifica s como función de h .
- b) Calcular la solución particular que cumple $s = 25$ millas cuando $h = 2$ pulgadas y $s = 12$ millas cuando $h = 10$ pulgadas ($2 \leq h \leq 15$).

44. **Tasa de crecimiento** Sean x e y los tamaños de dos órganos internos de un cierto mamífero en el tiempo t . Los datos empíricos indican que las tasas relativas de crecimiento de esos dos órganos son iguales, de modo que

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$$

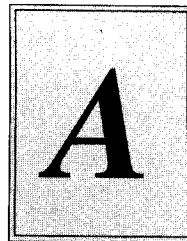
Resolver esta ecuación diferencial, escribiendo y como función de x .

45. **Crecimiento de poblaciones** El ritmo de crecimiento del número N de venados en un parque natural varía conjuntamente, con el tiempo, con N y $L - N$, donde $L = 500$ es la población máxima estimada como límite. Expresar N como función de t si $N = 100$ cuando $t = 0$ y $N = 200$ cuando $t = 4$.

 46. **Crecimiento de poblaciones** El ritmo de crecimiento del número N de alces en una reserva varía con el tiempo t (en años) conjuntamente con N y $300 - N$, siendo 300 el límite estimado de población en ese espacio natural.

- a) Escribir y resolver la ecuación diferencial que gobierna la población si $N = 50$ cuando $t = 0$ y $N = 75$ cuando $t = 1$.
- b) Representar en una calculadora el campo de direcciones de esa ecuación diferencial y la solución particular del apartado a).
- c) ¿En qué momento crece más rápidamente la población?
- d) Si se introducen inicialmente 400 alces en la reserva, usar el campo de direcciones para describir el cambio en su población con el transcurso del tiempo.

Apéndice



Demostraciones de teoremas seleccionados *

TEOREMA 9.16

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS SEGÚN LA EXCENTRICIDAD

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancia a un punto fijo (*foco*) y a una recta fija (*directriz*) es constante, es una cónica. La razón constante e es la *excentricidad* de la cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$
2. La cónica es una parábola si $e = 1$
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$

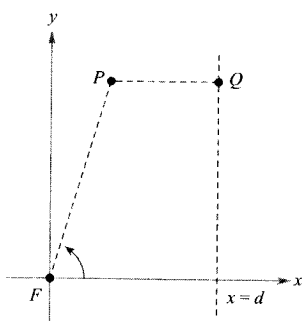


FIGURA A.1

Demostración: Si $e = 1$ la cónica es, por definición, una parábola. Si $e \neq 1$, podemos considerar el foco situado en el origen y como directriz la recta $x = d$, a la derecha del origen, tal como se muestra en la Figura A.1. Para el punto $P = (r, \theta) = (x, y)$ es $|PF| = r$ y $|PQ| = d - r \cos \theta$. De $e = |PF|/|PQ|$, se sigue que

$$|PF| = |PQ|e \quad \Rightarrow \quad r = e(d - r \cos \theta)$$

Pasando a coordenadas rectangulares y elevando al cuadrado obtenemos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

Completando el cuadrado resulta

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, esa ecuación representa una elipse. Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$, así que la ecuación representa una hipérbola. \square

* Nota de la editora: En el original es parte del Apéndice B.

TEOREMA 12.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y . Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$, con g y h funciones derivables de t , entonces w es una función derivable de t , con

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Demostración: Por ser g y h funciones derivables de t , sabemos que tanto Δx como Δy tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Y como f es una función diferenciable de x e y , también sabemos que

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

con ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Por tanto, para $\Delta t \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \left(\frac{dx}{dt} \right) + 0 \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad \square$$

Soluciones de los ejercicios impares

CAPÍTULO 9

Sección 9.1 (página 911)

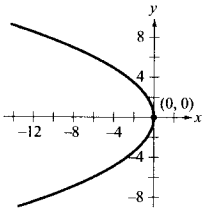
1. h 2. a 3. e 4. b

5. f 6. g 7. c 8. d

9. Vértice: $(0, 0)$

Foco: $(-\frac{3}{2}, 0)$

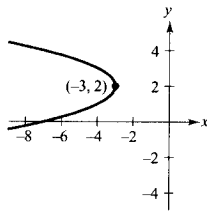
Directriz: $x = \frac{3}{2}$



11. Vértice: $(-3, 2)$

Foco: $(-\frac{13}{4}, 2)$

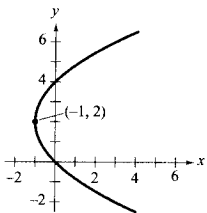
Directriz: $x = -\frac{11}{4}$



13. Vértice: $(-1, 2)$

Foco: $(0, 2)$

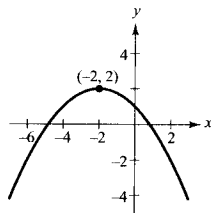
Directriz: $x = -2$



15. Vértice: $(-2, 2)$

Foco: $(-2, 1)$

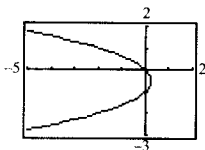
Directriz: $y = 3$



17. Vértice: $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$

Foco: $(0, -\frac{1}{2})$

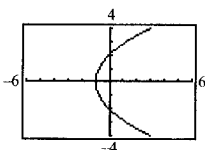
Directriz: $x = \frac{1}{2}$



19. Vértice: $(-1, 0)$

Foco: $(0, 0)$

Directriz: $x = -2$



21. $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$

23. $x^2 - 24y + 96 = 0$

25. $x^2 + y - 4 = 0$

27. $5x^2 - 14x - 3y + 9 = 0$

29. $\frac{9}{4}$ metros

31. $y = 2ax_0x - ax_0^2$

33. b) Rectas tangentes: $2x + y - 1 = 0$

$2x - 4y - 1 = 0$

Punto de intersección: $(\frac{1}{2}, 0)$ (en la directriz)

35. $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; distancia de la colina: $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

37. $\frac{16(4 + 3\sqrt{3} - 2\pi)}{3} \approx 15,536$ pies cuadrados

39. a) $y = \frac{1}{180}x^2$

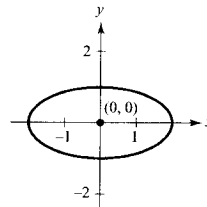
b) $10 \left[2\sqrt{13} + 9 \ln \left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3} \right) \right] \approx 128,4$ metros

41. Centro: $(0, 0)$

Focos: $(\pm\sqrt{3}, 0)$

Vértices: $(\pm 2, 0)$

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

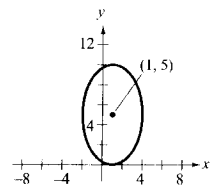


43. Centro: $(1, 5)$

Focos: $(1, 9)(1, 1)$

Vértices: $(1, 10)(1, 0)$

$e = \frac{4}{5}$

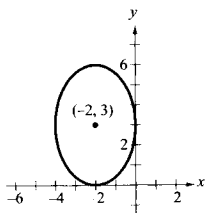


45. Centro: $(-2, 3)$

Focos: $(-2, 3 \pm \sqrt{5})$

Vértices: $(-2, 6), (-2, 0)$

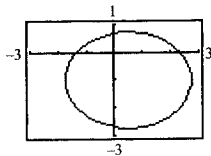
$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



47. Centro: $(\frac{1}{2}, -1)$

Focos: $(\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}, -1)$

Vértices: $(\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}, -1)$

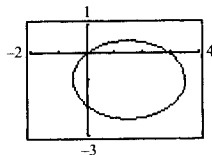


49. Centro: $(\frac{3}{2}, -1)$

Focos: $(\frac{3}{2} - \sqrt{2}, -1),$

$(\frac{3}{2} + \sqrt{2}, -1)$

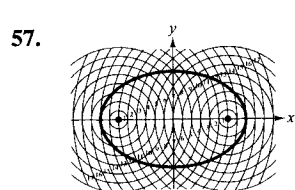
Vértices: $(-\frac{1}{2}, -1), (\frac{7}{2}, -1)$



51. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

53. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

55. $\frac{x^2}{16} + \frac{7y^2}{16} = 1$

59. Deben colocarse a 1,5 pies del centro. La longitud debe ser $2a = 5$ pies.

63. $e \approx 0,9672$

65. Eje menor: el segmento entre $(-6, -2)$ y $(0, -2)$.Eje mayor: el segmento entre $(-3, -6)$ y $(-3, 2)$.

67. $(0, \frac{25}{3})$

69. a) Área = 2π

b) Volumen = $\frac{8\pi}{3}$

Área de la superficie = $\frac{2\pi(9 + 4\sqrt{3}\pi)}{9} \approx 21,48$

c) Volumen = $\frac{16\pi}{3}$

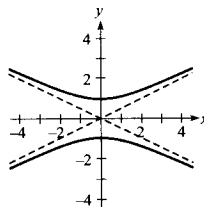
Área de la superficie = $\frac{4\pi[6 + \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})]}{3} \approx 34,69$

71. 22,10

75. Centro: $(0, 0)$

Vértices: $(0, \pm 1)$

Focos: $(0, \pm\sqrt{5})$

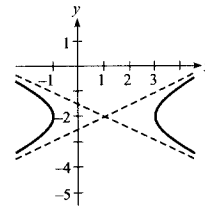


73. 40

77. Centro: $(1, -2)$

Vértices: $(-1, -2), (3, -2)$

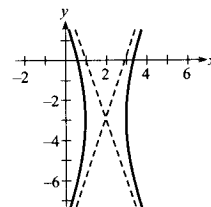
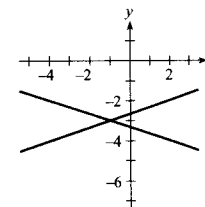
Focos: $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$



79. Centro: $(2, -3)$

Vértices: $(1, -3), (3, -3)$

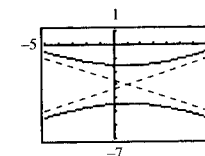
Focos: $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$

81. Hipérbola degenerada. La gráfica consta de dos rectas que se cortan en $(-1, -3)$ 

83. Centro: $(1, -3)$

Vértices: $(1, -3, \pm\sqrt{2})$

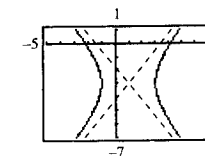
Focos: $(1, -3 \pm 2\sqrt{5})$



85. Centro: $(1, -3)$

Vértices: $(-1, -3), (3, -3)$

Focos: $(1 \pm \sqrt{10}, -3)$



87. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$

89. $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{9/4} = 1$

91. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

93. $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

95. $\frac{(x-6)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

97. $(y - \frac{3}{2})^2 - \frac{(x+3)^2}{5/4} = 1$

101. $x = \frac{-90 + 96\sqrt{2}}{7} \approx 6,538$

$y = \frac{160 - 96\sqrt{2}}{7} \approx 3,462$

103. a) (4, 6): $4x - 3y + 2 = 0$

(4, -6): $4x + 3y + 2 = 0$

b) (4, 6): $3x + 4y - 36 = 0$

(4, -6): $3x - 4y - 36 = 0$

106. Falso: véase la definición de parábola.

107. Verdadero

108. Verdadero

109. Falso: la ecuación de una elipse es de segundo grado en x e y .

110. Falso: $y^2 - x^2 + 2x + 2y = 0$ es la ecuación de dos rectas que se cortan.

111. Verdadero

112. Verdadero

115. Hipérbola

117. Parábola

119. Parábola

121. Elipse

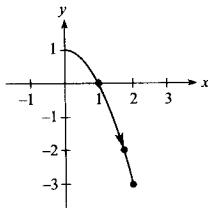
123. Elipse

Sección 9.2 (página 925)

1. a)

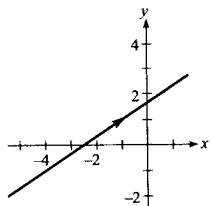
t	0	1	2	3	4
x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
y	1	0	-1	-2	-3

b) y c)

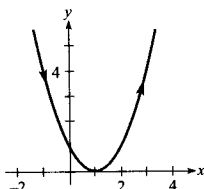


d) $y = 1 - x^2, x \geq 0$

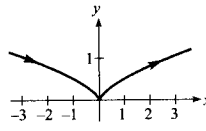
3. $2x - 3y + 5 = 0$



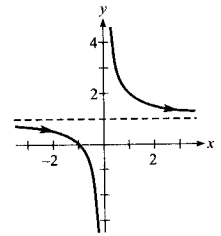
5. $y = (x - 1)^2$



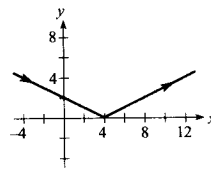
7. $y = \frac{1}{2}x^{2/3}$



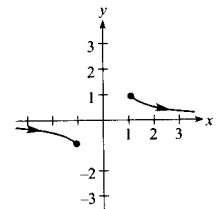
9. $y = \frac{x + 1}{x}$



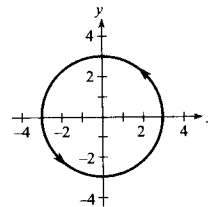
11. $y = \frac{|x - 4|}{2}$



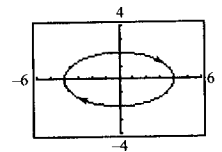
13. $y = \frac{1}{x}, |x| \geq 1$



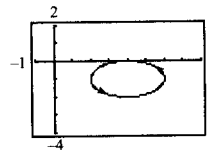
15. $x^2 + y^2 = 9$



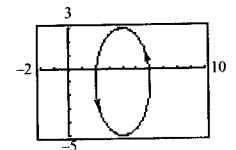
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$



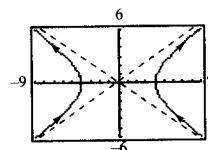
19. $\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{1} = 1$



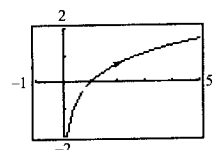
21. $\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$



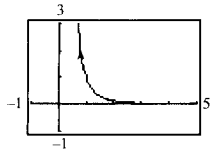
23. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$



25. $y = \ln x$



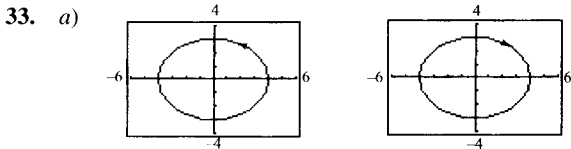
27. $y = \frac{1}{x^3}, x > 0$



29. Cada curva representa una porción de la recta $y = 2x + 1$.

Dominio	Orientación	Suave
a) $-\infty < x < \infty$	Arriba	Sí
b) $-1 \leq x \leq 1$	Oscila	No, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} = 0$ cuando $\theta = 0, \pi$
c) $0 < x < \infty$	Abajo	Sí
d) $0 < x < \infty$	Arriba	Sí

31. a) y b) representan la parábola $y = 2(1 - x^2)$ en $-1 \leq x \leq 1$. La curva es suave. La orientación es de derecha a izquierda en la parte a) y de izquierda a derecha en la parte b).



- b) La orientación se invierte.
- c) La orientación se invierte.

35. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ 37. $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

39. $x = 5t$
 $y = -2t$
 (La solución no es única)

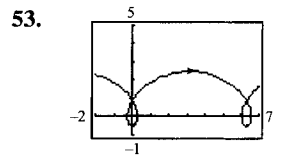
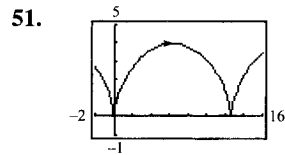
41. $x = 2 + 4 \cos \theta$
 $y = 1 + 4 \sin \theta$
 (La solución no es única)

43. $x = 5 \cos \theta$
 $y = 3 \sin \theta$
 (La solución no es única)

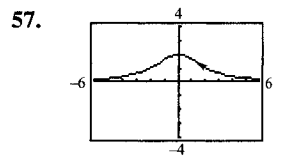
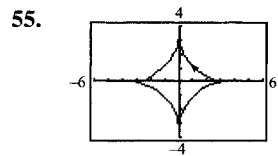
45. $x = 4 \sec \theta$
 $y = 3 \tan \theta$
 (La solución no es única)

47. $x = t$
 $y = 3t - 2$
 $x = t - 3$
 $y = 3t - 11$
 (La solución no es única)

49. $x = t$
 $y = t^3$
 $x = \tan t$
 $y = \tan^3 t$
 (La solución no es única)



No es suave para $\theta = 2n\pi$



No es suave para $\theta = \frac{1}{2} n\pi$

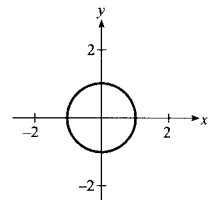
59. d 60. a 61. b 62. c
63. $x = a\theta - b \sin \theta$
 $y = a - b \cos \theta$

66. Falso: como ni x ni y pueden ser negativos, la gráfica consta únicamente de la porción de la recta $y = x$ contenida en el primer cuadrante.

67. Falso: tomar $x = t^2, y = t$

68. Falso: hacer $x = \sin t, y = \cos t$

70. $t = 2: 3^2 + 4^2 = 5^2$
 $t = 3: 8^2 + 6^2 = 10^2$



Sección 9.3 (página 934)

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = 2t + 3, \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

En $t = -1, \frac{dy}{dx} = 1, \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

5. $\frac{dy}{dx} = -\text{ctg } \theta, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\text{cosec}^3 \theta}{2}$

En $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{dy}{dx} = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{2}$

7. $\frac{dy}{dx} = 2 \text{ cosec } \theta, \frac{d^2y}{dx^2} = -2 \text{ ctg}^3 \theta$

En $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{dy}{dx} = 4, \frac{d^2y}{dx^2} = -6\sqrt{3}$

9. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^4 \theta \operatorname{cosec} \theta}{3}$

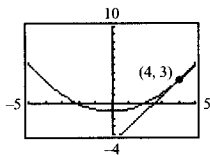
En $\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{dy}{dx} = -1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

11. $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right), 3\sqrt{3}x - 8y + 18 = 0$

$(0, 2), y - 2 = 0$

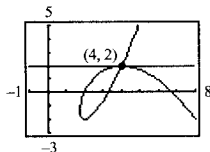
$\left(2\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \sqrt{3}x + 8y - 10 = 0$

13. a) y d)



b) En $t = 2, \frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 4$ y $\frac{dy}{dx} = 2$ c) $y = 2x - 5$

15. a) y d)



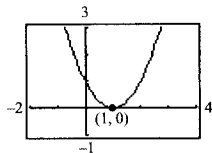
b) En $t = -1, \frac{dx}{dt} = -3, \frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 0$ c) $y = 2$

17. Horizontal: $(1, 0), (-1, \pi), (1, -2\pi)$

Vertical: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$

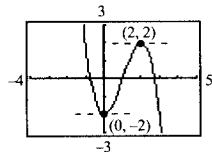
19. Horizontal: $(1, 0)$

Vertical: no hay



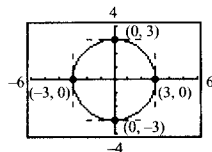
21. Horizontal: $(0, -2), (2, 2)$

Vertical: no hay



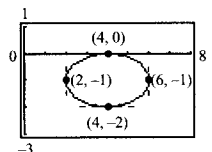
23. Horizontal: $(0, 3), (0, -3)$

Vertical: $(3, 0), (-3, 0)$



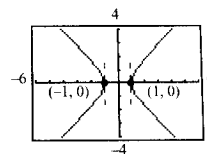
25. Horizontal: $(4, 0), (4, -2)$

Vertical: $(2, -1), (6, -1)$

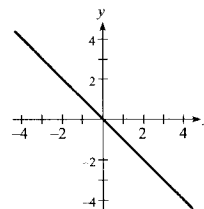


27. Horizontal: no hay

Vertical: $(1, 0), (-1, 0)$



29.



31. $\sqrt{2}(1 - e^{-\pi/2}) \approx 1,12$

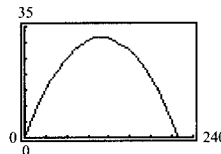
33. $2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 5,916$

35. $\frac{1}{2} [\ln(\sqrt{37} + 6) + 6\sqrt{37}] \approx 3,249$

37. $6a$

39. $8a$

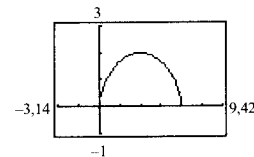
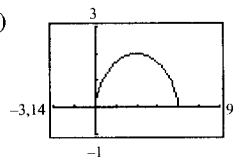
41. a)



b) 219,2 pies

c) 230,8 pies

43. a)



b) La velocidad media de la partícula en el segundo trayecto es doble que en el primero.

c) 4π

45. a) $32\pi\sqrt{5}$

b) $16\pi\sqrt{5}$

47. 32π

49. $\frac{12\pi a^2}{5}$

51. $2\pi r^2(1 - \cos \theta)$

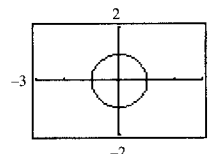
53. $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right)$

55. 36π

57. $\frac{3\pi}{2}$

59. d 60. b 61. f 62. c 63. a 64. e

65. a)

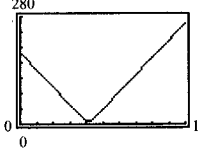


Círculo de radio 1

b) Cuando t varía de -20 a 0 , la rapidez aumenta; cuando t varía de 0 a 20 , la rapidez decrece.

67. a) $x = \cos 70^\circ (150 - 375t)$ $x = -\cos 45^\circ (190 - 450t)$
 $y = \text{sen } 70^\circ (150 - 375t)$ $y = \text{sen } 45^\circ (190 - 450t)$

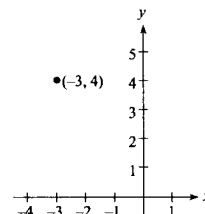
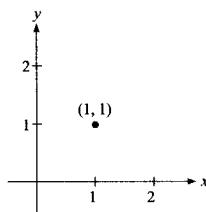
b) $d = \sqrt{[-\cos 45^\circ (190 - 450t) - \cos 70^\circ (150 - 375t)]^2 + [\text{sen } 45^\circ (190 - 450t) - \text{sen } 70^\circ (150 - 375t)]^2}$

c)  La distancia mínima es 7,59 millas cuando $t = 0,4145$.

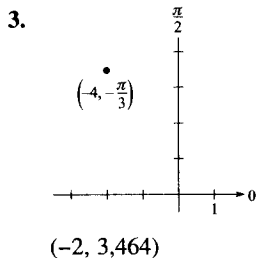
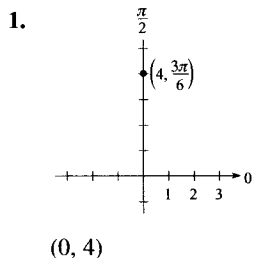
69. Falso: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{g'(t)}{f'(t)} \right]}{f'(t)} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}$

70. Falso: la gráfica de $y = x^{2/3}$ no tiene tangente horizontal en el origen.

11. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ 13. (5, 2,214), (-5, 5,356)

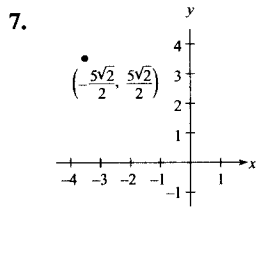
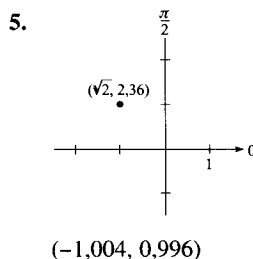
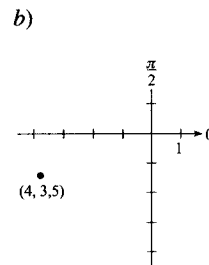
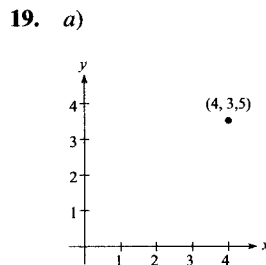


Sección 9.4 (página 945)



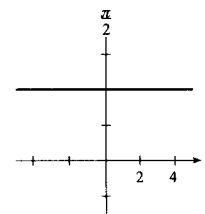
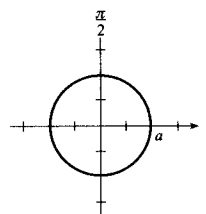
15. (3,606, -0,588)

17. (2,833, 0,490)



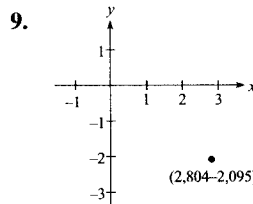
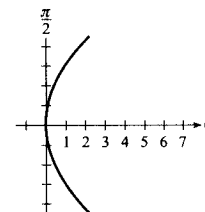
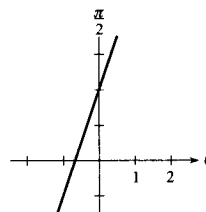
21. $r = a$

23. $r = 4 \text{ cosec } \theta$

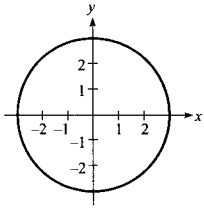


25. $r = \frac{-2}{3 \cos \theta - \text{sen } \theta}$

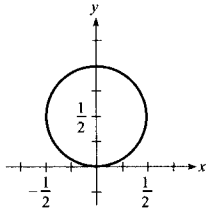
27. $r = 9 \text{ cosec}^2 \theta \cos \theta$



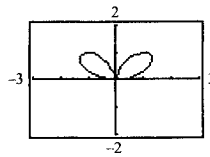
29. $x^2 + y^2 = 9$



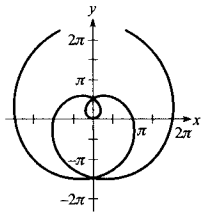
31. $x^2 + y^2 - y = 0$



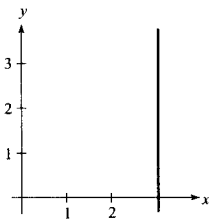
53. (0, 0), (1,4142, 0,7854), (1,4142, 2,3562)



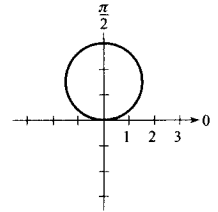
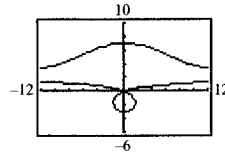
33. $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$



35. $x - 3 = 0$



55. (7, 1,5708), (3, 4,7124) 57. $\theta = 0$



37. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2$

Centro: (h, k)

Radio: $\sqrt{h^2 + k^2}$

39. $2\sqrt{5}$

41. 5,6

43. $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos \theta (3 \operatorname{sen} \theta + 1)}{6 \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta - 3}$

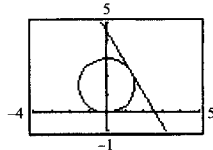
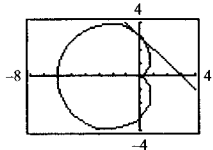
$(5, \frac{\pi}{2}), \frac{dy}{dx} = 0$

$(2, \pi), \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

$(-1, \frac{3\pi}{2}), \frac{dy}{dx} = 0$

45. a) y b)

47. a) y b)



c) -1

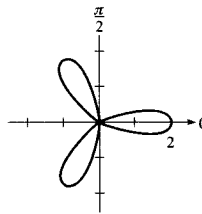
c) $-\sqrt{3}$

49. Horizontal: $(2, \frac{\pi}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$

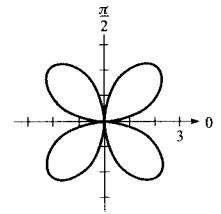
Vertical: $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}), (\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$

51. $(5, \frac{\pi}{2}), (1, \frac{3\pi}{2})$

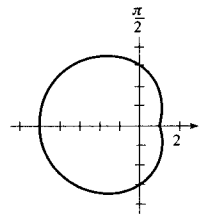
59. $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$



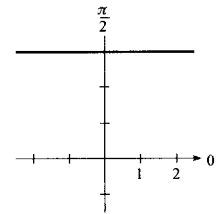
61. $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$



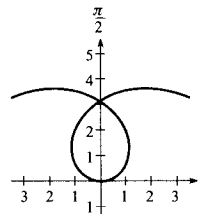
63.



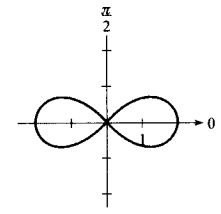
65.



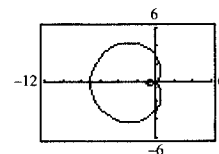
67.



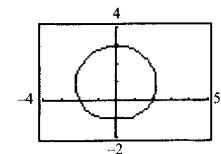
69.



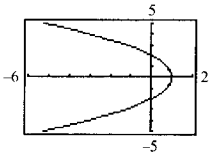
71. $0 \leq \theta < 2\pi$



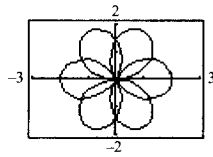
73. $0 \leq \theta < 2\pi$



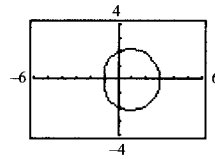
75. $-\pi < \theta < \pi$



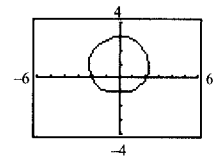
77. $0 \leq \theta < 4\pi$



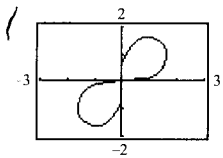
b) $r = 2 + \cos \theta$



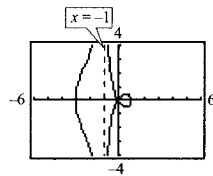
c) $r = 2 + \sin \theta$



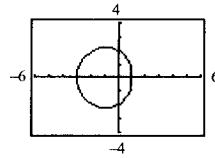
79. $0 \leq \theta < \pi/2$



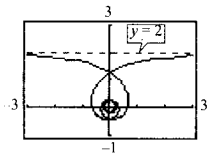
81.



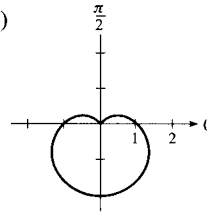
d) $r = 2 - \cos \theta$



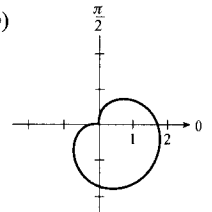
83.



91. a)



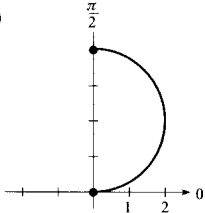
b)



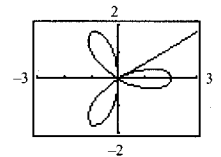
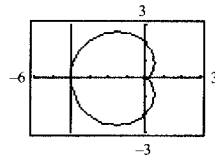
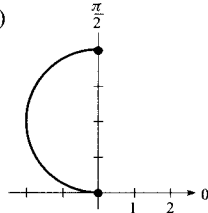
93. $\psi = \frac{\pi}{2}$

95. $\psi = 0$

85. a)

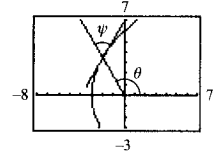


b)

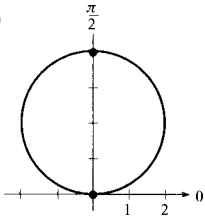


97. $\psi = \frac{\pi}{3}$

99. $0 \leq \theta \leq 9\pi$



c)



100. Verdadero

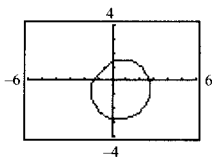
101. Verdadero

102. Verdadero

103. Verdadero

Sección 9.5 (página 954)

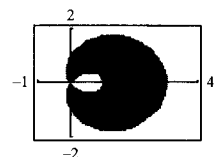
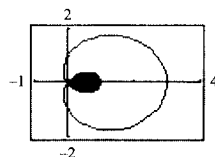
89. a) $r = 2 - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\sqrt{2}(\sin \theta - \cos \theta)}{2}$



1. 16π 3. $\frac{\pi}{3}$ 5. $\frac{\pi}{8}$ 7. $\frac{3\pi}{2}$

9. $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2}$

11. $\pi + 3\sqrt{3}$



13. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(1, \frac{3\pi}{2}\right), (0, 0)$

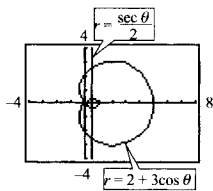
15. $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{4}\right), (0, 0)$

17. $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), (0, 0)$ 19. $(2, 4), (-2, -4)$

21. $\left(2, \frac{\pi}{12}\right), \left(2, \frac{5\pi}{12}\right), \left(2, \frac{7\pi}{12}\right), \left(2, \frac{11\pi}{12}\right)$

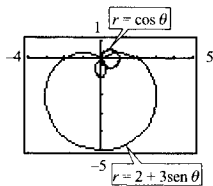
$\left(2, \frac{13\pi}{12}\right), \left(2, \frac{17\pi}{12}\right), \left(2, \frac{19\pi}{12}\right), \left(2, \frac{23\pi}{12}\right)$

23. $(0,581, \pm 2,607), (2,581, \pm 1,376)$



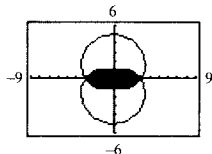
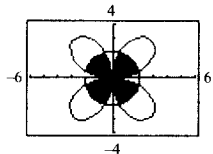
25. $(0, 0), (0,935, 0,363), (0,535, -1,006)$

Las gráficas alcanzan el polo en tiempos distintos (valores de θ).



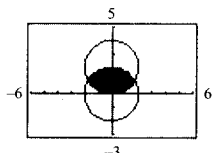
27. $\frac{4}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$

29. $11\pi - 24$



31. $\frac{2}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$

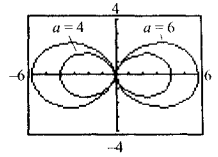
33. $\frac{5\pi a^2}{4}$



35. $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$

37. a) $(x^2 + y^2)^{3/2} = ax^2$ b)

c) $\frac{15\pi}{2}$

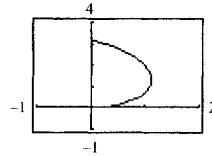


39. El área encerrada por la función es $\pi a^2/4$ si n es impar, y $\pi a^2/2$ si n es par.

41. $2\pi a$

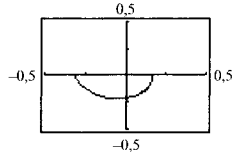
43. 8

45.



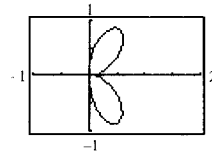
$\approx 4,16$

47.



$\approx 0,71$

49.



$\approx 4,39$

51. 4π

53. $\frac{2\pi\sqrt{1+a^2}}{1+4a^2}(e^{\pi a} - 2a)$

55. 21,87

57. $4\pi^2 ab$

59. a) 16π

θ	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
A	6,32	12,14	17,06	20,80	23,27	24,60	25,08

c) $\frac{1}{4}: \theta \approx 0,4$

d) $\frac{1}{4}: \theta \approx 0,42$

$\frac{1}{2}: \theta \approx 1,5$

$\frac{1}{2}: \theta \approx 1,57$

$\frac{3}{4}: \theta \approx 2,7$

$\frac{3}{4}: \theta \approx 2,73$

e) No. Al resolver la ecuación, la raíz cuadrada divide a ambos lados.

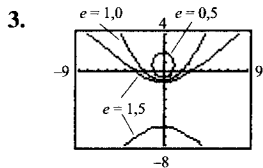
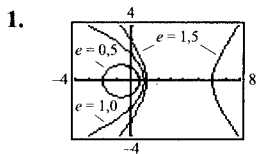
60. Falso: el área viene dada por $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta$.

61. Falso: las gráficas de $f(\theta) = 1$ y $g(\theta) = -1$ coinciden.

62. Falso: si $f(\theta) = 0$ y $g(\theta) = \sin 2\theta$, existe un único punto de intersección.

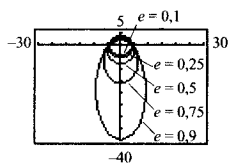
63. Verdadero: el área encerrada por la primera es $\pi/2$ y la encerrada por la segunda es $\pi/4$.

Sección 9.6 (página 962)

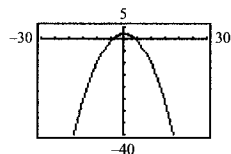


5. a) Elipse

Cuando $e \rightarrow 1^-$, la elipse se hace más alargada, y cuando $e \rightarrow 0^+$ se hace más circular.

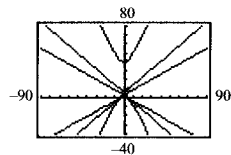


b) Parábola



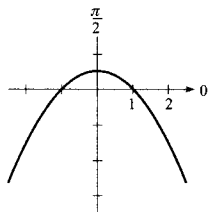
c) Hipérbola

Cuando $e \rightarrow 1^+$, la hipérbola se abre más lentamente, y cuando $e \rightarrow \infty$, se abre más rápidamente.

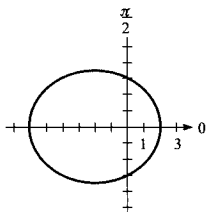


7. c 8. f 9. a 10. e 11. b 12. d

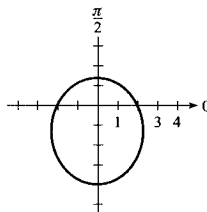
13. Parábola



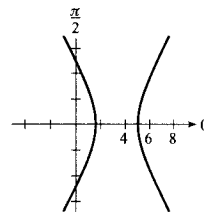
15. Elipse



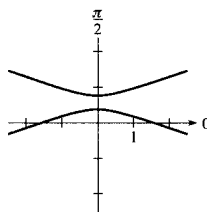
17. Elipse



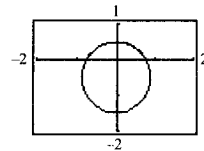
19. Hipérbola



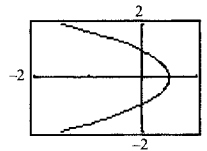
21. Hipérbola



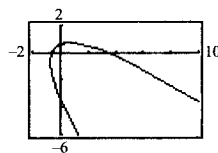
23.



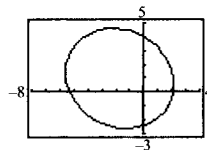
25.



27. Girada $\pi/4$ radianes en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj.



29. Girada $\pi/6$ radianes en el sentido de las agujas de un reloj.



31.
$$r = \frac{5}{5 + 3 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)}$$

33.
$$r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

35.
$$r = \frac{1}{2 + \sin \theta}$$

37.
$$r = \frac{2}{1 + 2 \cos \theta}$$

39. $r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$

41. $r = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$

43. $r = \frac{9}{4 - 5 \sin \theta}$

47. $r^2 = \frac{9}{1 - (16/25) \cos^2 \theta}$

49. $r^2 = \frac{-16}{1 - (25/9) \cos^2 \theta}$

51. 10,88

53. $r = \frac{345.996.000}{43.373 - 40.627 \cos \theta}$; 11.004 millas

55. $r = \frac{92.931.075,2223}{1 - 0,0167 \cos \theta}$

Perihelio: 91.404.618 millas

Afelio: 95.509.382 millas

57. $r = \frac{5,537 \times 10^9}{1 - 0,2481 \cos \theta}$

Perihelio: $4,436 \times 10^9$ km

Afelio: $7,364 \times 10^9$ km

59. a) $9,341 \times 10^{18}$ km²; 21,867 años

b) 0,8995 radianes: mayor

c) a) $2,559 \times 10^9$ km, $1,17 \times 10^8$ km por año

b) $4,119 \times 10^9$ km, $1,88 \times 10^8$ km por año

11. $y^2 - 4y - 12x + 4 = 0$

13. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

15. 15,87

17. $4x + 4y - 7 = 0$

19. a) 192π pies cúbicos

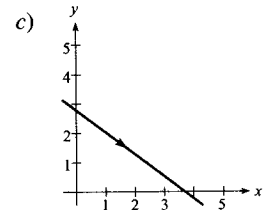
b) 7.057,3 libras

c) 4,212 pies

d) 429,105 pies cúbicos

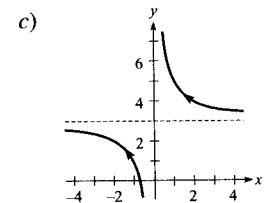
21. a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$; tangentes horizontales: no hay

b) $y = \frac{-3x + 11}{4}$



23. a) $\frac{dy}{dx} = -2t^2$; tangentes horizontales: no hay

b) $y = 3 + \frac{2}{x}$



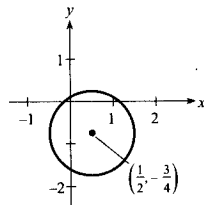
Ejercicios de repaso del Capítulo 9 (página 965)

1. d 2. b 3. a 4. c

5. Círculo

Centro: $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

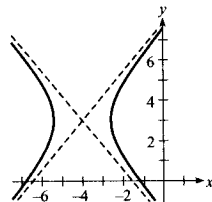
Radio: 1



7. Hipérbola

Centro: (-4, 3)

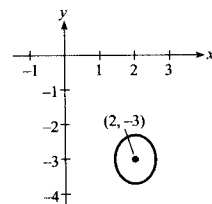
Vértices: $(-4 \pm \sqrt{2}, 3)$



9. Elipse

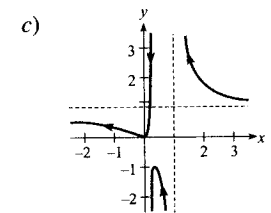
Centro: (2, -3)

Vértices: $(2, -3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$



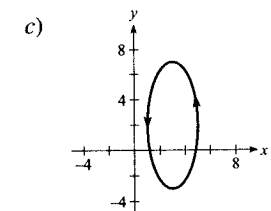
25. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-1)(2t+1)^2}{t^2(t-2)^2}$; tangentes horizontales: $(\frac{1}{3}, -1)$

b) $y = \frac{4x^2}{(5x-1)(x-1)}$

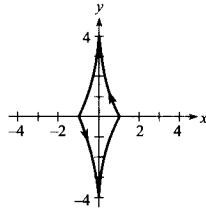


27. a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2} \text{ctg } \theta$; tangentes horizontales: (3, 7), (3, -3)

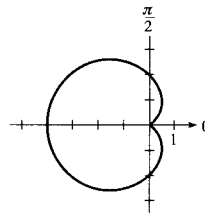
b) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$



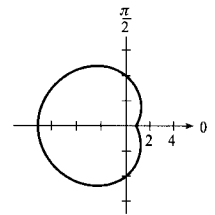
29. a) $\frac{dy}{dx} = -4 \operatorname{tg} \theta$; tangentes horizontales: no hay
 b) $x^{2/3} + (y/4)^{2/3} = 1$ c)

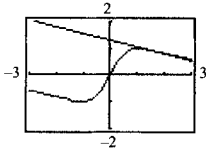


61. Cardioide

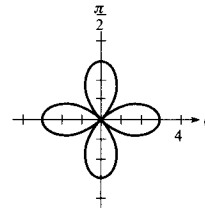


63. Caracol

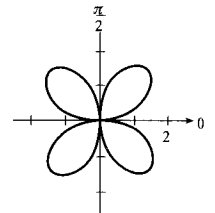


31. a) y c)  b) $\frac{dx}{d\theta} = -4, \frac{dy}{d\theta} = 1$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

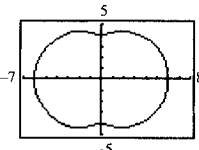
65. Rosa



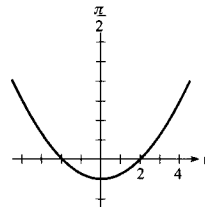
67. Rosa

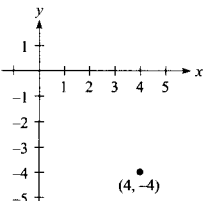


33. $x = 3 + 5t$
 $y = 2 - 4t$ 35. $x = -3 + 4 \cos \theta$
 $y = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

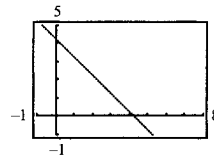
37.  41. $\frac{\pi^2 r}{2}$

69. Parábola

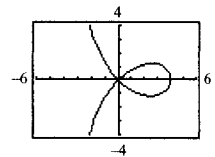


43.  $(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}), (-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

- 71.



- 73.

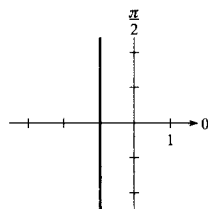
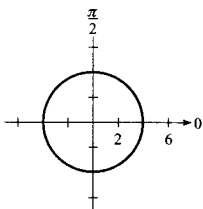


45. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ 47. $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$

49. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 51. $y^2 = x^2 \left(\frac{4-x}{4+x} \right)$

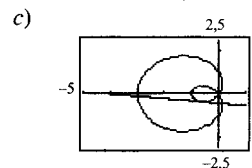
53. $r = a \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta$ 55. $r^2 = a^2 \theta^2$

57. Círculo 59. Recta

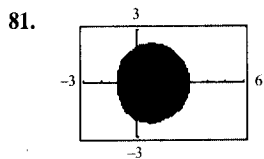


75. a) $\pm \frac{\pi}{3}$

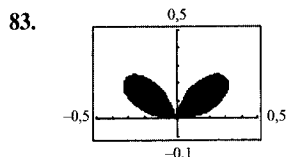
- b) Vertical: $(-1, 0), (3, \pi), (\frac{1}{2}, \pm 1, 318)$
 Horizontal: $(-0,686, \pm 0,568), (2,186, \pm 2,206)$



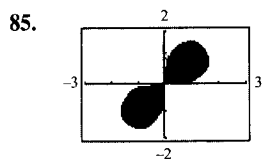
79. $\operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \approx 49,1^\circ$



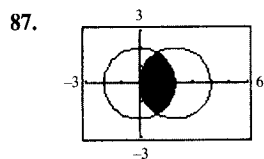
$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\pi (2 + \cos \theta)^2 d\theta \approx 14,14$$



$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta \approx 0,10$$



$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi/2} 4 \sin 2\theta d\theta \approx 4$$



$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 4 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 16 \cos^2 \theta d\theta \right) \approx 4,91$$

89. $8a$

91. $r = 10 \operatorname{sen} \theta$

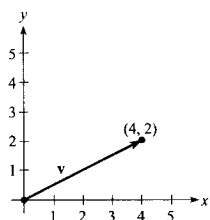
93. $r = \frac{4}{1 - \cos \theta}$

95. $r = \frac{5}{3 - 2 \cos \theta}$

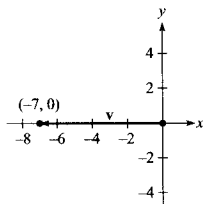
CAPÍTULO 10

Sección 10.1 (página 979)

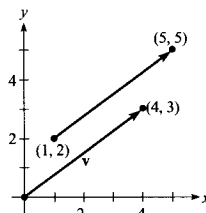
1. $\langle 4, 2 \rangle$



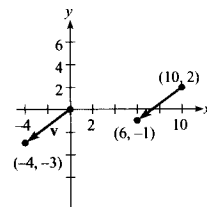
3. $\langle -7, 0 \rangle$



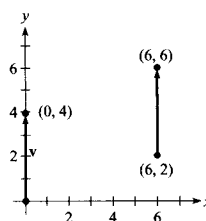
5. $\langle 4, 3 \rangle$



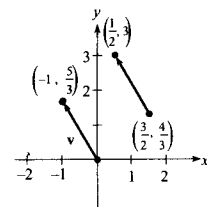
7. $\langle -4, -3 \rangle$



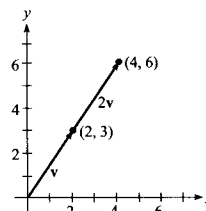
9. $\langle 0, 4 \rangle$



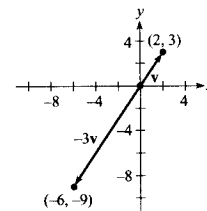
11. $\langle -1, \frac{5}{3} \rangle$



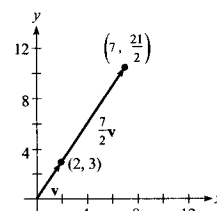
13. a) $\langle 4, 6 \rangle$



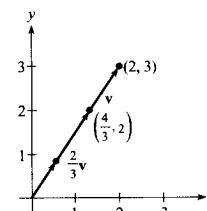
b) $\langle -6, -9 \rangle$



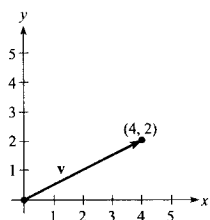
c) $\langle 7, \frac{21}{2} \rangle$



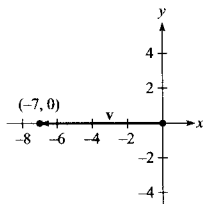
d) $\langle \frac{4}{3}, 2 \rangle$



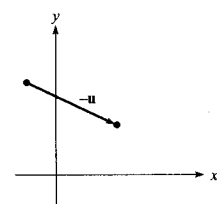
1. $\langle 4, 2 \rangle$



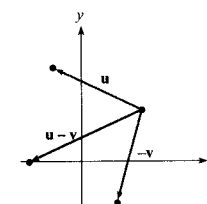
3. $\langle -7, 0 \rangle$



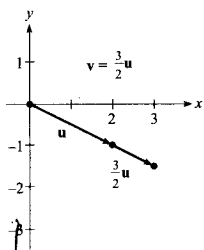
15.



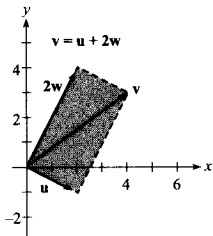
17.



19. $\langle 3, -\frac{3}{2} \rangle$



21. $\langle 4, 3 \rangle$



23. $a = 1, b = 1$ 25. $a = 1, b = 2$ 27. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

29. $(3, 5)$ 31. 5 33. $\sqrt{61}$ 35. 4

37. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) 1 d) 1
e) 1 f) 1

39. a) $\sqrt{5}/2$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{85}/2$ d) 1
e) 1 f) 1

43. $\langle 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$ 45. $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$

47. a) $\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \langle 1, 3 \rangle$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \langle 3, -1 \rangle$

49. a) $\pm \frac{1}{5} \langle -4, 3 \rangle$ b) $\pm \frac{1}{5} \langle 3, 4 \rangle$

51. $\langle 3, 0 \rangle$ 53. $\langle -\sqrt{3}, 1 \rangle$

55. $\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$

57. $(2 \cos 4 + \cos 2)\mathbf{i} + (2 \sin 4 + \sin 2)\mathbf{j}$

59. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ 63. 1,33, 132,5°

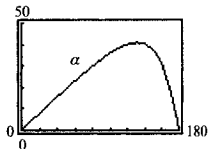
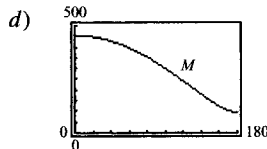
65. a) $\theta = 0^\circ$ b) $\theta = 180^\circ$ c) No

67. a) Dirección: $\alpha = 11,8^\circ$
Magnitud: 440,2 N
b) $M = \sqrt{(275 + 180 \cos \theta)^2 + (180 \sin \theta)^2}$
 $\alpha = \arccos\left(\frac{36 \cos \theta + 55}{\sqrt{3.960 \cos \theta + 4.321}}\right)$

c)

θ	0°	30°	60°	90°
M	455,0	440,2	396,9	328,7
α	0°	$11,8^\circ$	$23,1^\circ$	$33,2^\circ$

θ	120°	150°	180°
M	241,9	149,3	95,0
α	$40,1^\circ$	$37,1^\circ$	0°



e) M decrece porque las fuerzas, al variar θ de 0° a 180° , pasan de actuar en la misma dirección a actuar en direcciones opuestas.

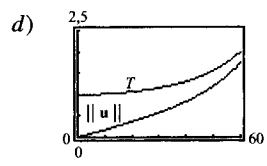
69. $71,3^\circ, 228,5$ libras 71. $(-4, -1), (6, 5), (10, 3)$

73. a) Tensión $\approx 1,1547$ libras b) $T = \sec \theta$
 $\|u\| \approx 0,5774$ libras $\|u\| = \operatorname{tg} \theta$

c)

θ	0°	10°	20°	30°
T	1	1,0154	1,0642	1,1547
$\ u\ $	0	0,1763	0,3640	0,5774

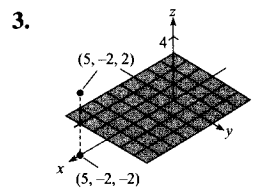
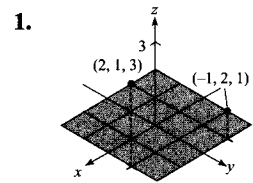
θ	40°	50°	60°
T	1,3054	1,5557	2
$\ u\ $	0,8391	1,1918	1,7321



e) Ambas son funciones crecientes para $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$
f) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} T = \infty, \lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \|u\| = \infty$

- 75. Horizontal: 1.193,43 pies/s
Vertical: 125,43 pies/s
- 77. $38,3^\circ$ noroeste 79. $T_2 = 157,316$
882,9 km/h $T_3 = 3.692,482$
- 84. Verdadero 85. Verdadero
- 86. Verdadero 87. Falso: $a = b = 0$
- 88. Falso: $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}|a|$ 89. Verdadero

Sección 10.2 (página 988)



5. $A(2, 3, 4)$ $B(-1, -2, 2)$ 7. $(-3, 4, 5)$
 9. $(10, 0, 0)$ 11. 0
 13. Tres unidades por debajo del plano xy , a la derecha del plano xz y frente al plano yz , o tres unidades bajo el plano xy , a la izquierda del plano xz y detrás del plano yz .
 15. A la derecha del plano xz y detrás del plano yz , o a la izquierda del plano xz y frente al plano yz .

17. $3, 3\sqrt{5}, 6$ 19. $6, 6, 2\sqrt{10}$
 Triángulo rectángulo Triángulo isósceles
 21. $(0, 0, 5), (2, 2, 6), (2, -4, 9)$ 23. $(\frac{3}{2}, -3, 5)$
 25. $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 4$
 27. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0)^2 = 10$
 29. Centro: $(1, -3, -4)$ 31. Centro: $(\frac{1}{3}, -1, 0)$
 Radio: 5 Radio: 1

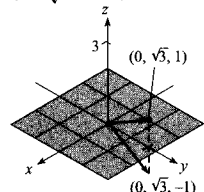
33. a) $\langle -2, 2, 2 \rangle$
 b)
35. a) $\langle -3, 0, 3 \rangle$
 b)

37. a) y c)
39. $(3, 1, 8)$
 b)

41. a)
- c)
- d)

43. $\langle -1, 0, 4 \rangle$ 45. $\langle 6, 12, 6 \rangle$
 47. $\langle \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2} \rangle$ 49. a y b
 51. a 53. Colineales
 55. No colineales 59. 0
 61. $\sqrt{14}$ 63. $\sqrt{34}$

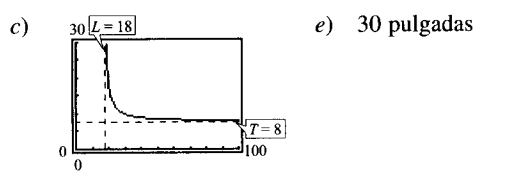
65. a) $\frac{1}{3} \langle 2, -1, 2 \rangle$ b) $-\frac{1}{3} \langle 2, -1, 2 \rangle$
 67. a) $\frac{1}{\sqrt{38}} \langle 3, 2, -5 \rangle$ b) $-\frac{1}{\sqrt{38}} \langle 3, 2, -5 \rangle$
 71. $\pm \frac{5}{3}$ 73. $\langle 0, \frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}} \rangle$ 75. $\langle 1, -1, \frac{1}{2} \rangle$
 77. $\langle 0, \sqrt{3}, \pm 1 \rangle$ 79. $(2, -1, 2)$



81. a)
 c) $a = b = 1$

83. a) $T = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}$
 b)

L	20	25	30	35	40	45	50
T	18,4	11,5	10	9,3	9,0	8,7	8,6



85. $\frac{\sqrt{3}}{3} \langle 1, 1, 1 \rangle$
 87. Tensión en \overline{AB} : 202,919 N
 Tensión en \overline{AC} : 157,909 N
 Tensión en \overline{AD} : 226,521 N
 89. $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (y - 3)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$

Sección 10.3 (página 1000)

1. a) -6 b) 25 c) 25 d) $\langle -12, 18 \rangle$ e) -12
 3. a) 2 b) 29 c) 29 d) $\langle 0, 12, 10 \rangle$ e) 4
 5. a) 1 b) 6 c) 6 d) $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ e) 2
 7. \$17.139,05, ingresos totales

9. 20

11. $\frac{\pi}{2}$

13. $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \approx 98,1^\circ$ 15. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx 61,9^\circ$

17. $\arccos\left(-\frac{8\sqrt{13}}{65}\right) \approx 116,3^\circ$ 21. Ni uno ni otro

23. Ortogonal 25. Ni uno ni otro 27. Ortogonal

31. a) $\theta = \frac{\pi}{2}$ b) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

35. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

37. $\cos \alpha = 0$

$\cos \beta = \frac{2}{3}$

$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos \gamma = \frac{2}{3}$

$\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

39. Magnitud: 124,310 libras

$\alpha = 29,48^\circ$

$\beta = 61,39^\circ$

$\gamma = 96,53^\circ$

41. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7^\circ$

43. $\alpha = 90^\circ$

45. a) $\langle \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

$\beta = 45^\circ$

b) $\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \rangle$

$\gamma = 45^\circ$

47. a) $\langle 0, \frac{33}{25}, \frac{44}{25} \rangle$ b) $\langle 2, -\frac{8}{25}, \frac{6}{25} \rangle$ 51. $\langle 0, 0 \rangle$

53. a) **u** y **v** son paralelos

b) **u** y **v** son ortogonales

55. $\langle 4, 3 \rangle, \langle -4, -3 \rangle$

57. $\langle 2, 0, 3 \rangle, \langle -2, 0, -3 \rangle$

59. a) 8.282,2 libras

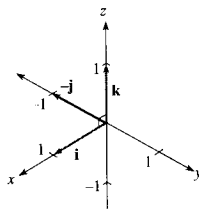
b) 30.909,6 libras

61. 425 libras/pie

63. 72

5. $-j$

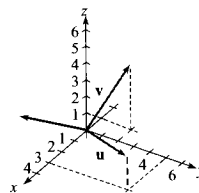
7. $\langle -1, -1, -1 \rangle$



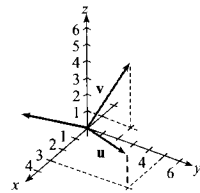
9. $\langle 0, 0, 54 \rangle$

11. $\langle -2, 3, -1 \rangle$

13.



15.



17. $\left\langle -70, -23, \frac{57}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{-140}{\sqrt{24.965}}, \frac{-46}{\sqrt{24.965}}, \frac{57}{\sqrt{24.965}} \right\rangle$

19. $\left\langle -\frac{71}{20}, -\frac{11}{5}, \frac{5}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{-71}{\sqrt{7.602}}, \frac{-44}{\sqrt{7.602}}, \frac{25}{\sqrt{7.602}} \right\rangle$

23. 1

25. $6\sqrt{5}$

27. $2\sqrt{83}$

29. $\frac{3\sqrt{13}}{2}$

31. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$

33. 1

35. 6

37. 2

39. 75

41. $10 \cos 40^\circ \approx 7,60$ libras/pie

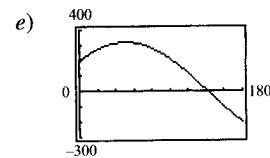
43. a) $\vec{AB} = -\frac{5}{4} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{F} = -200(\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k})$

b) $25(8 \cos \theta + 10 \sin \theta)$

c) $25(4\sqrt{3} + 5)$

d) $\theta = 51,34^\circ$; los vectores son ortogonales



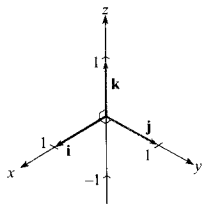
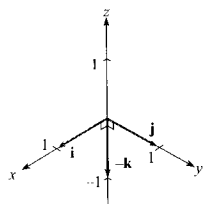
$\theta \approx 141,34^\circ, \vec{AB}$ es paralelo a **F**

55. Hallar el producto vectorial de los vectores $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ y $\langle x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \rangle$

Sección 10.4 (página 1008)

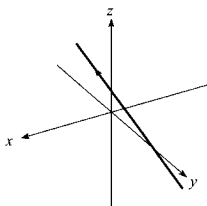
1. $-\mathbf{k}$

3. \mathbf{i}



Sección 10.5 (página 1019)

1. a)



b) $P = (1, 2, 2)$, $Q = (10, -1, 17)$, $\overrightarrow{PQ} = \langle 9, -3, 15 \rangle$
 (Hay muchas respuestas correctas.) Las componentes del vector y los coeficientes de t son proporcionales porque la recta es paralela a \overrightarrow{PQ} .

c) $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0)$, $(7, 0, 12)$, $(0, \frac{7}{3}, \frac{1}{3})$

<u>Ecuaciones paramétricas</u>	<u>Ecuaciones simétricas</u>	<u>Números de dirección</u>
--------------------------------	------------------------------	-----------------------------

3. $x = t$ $y = 2t$ $z = 3t$	$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$	1, 2, 3
------------------------------------	---------------------------------	---------

5. $x = -2 + 2t$ $y = 4t$ $z = 3 - 2t$	$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2}$	2, 4, -2
--	--	----------

7. $x = 1 + 3t$ $y = -2t$ $z = 1 + t$	$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$	3, -2, 1
---	--	----------

9. $x = 5 + 17t$ $y = -3 - 11t$ $z = -2 - 9t$	$\frac{x-5}{17} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z+2}{-9}$	17, -11, -9
---	---	-------------

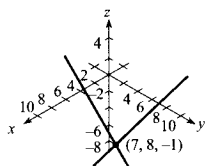
11. $x = 2$ $y = 3$ $z = 4 + t$		
---------------------------------------	--	--

13. a, b

15. $(2, 3, 1)$, $\cos \theta = \frac{7\sqrt{17}}{51}$

17. No hay intersección

19. $(7, 8, -1)$



21. a) $P = (0, 0, -1)$, $Q = (0, -2, 0)$, $R = (3, 4, -1)$
 $\overrightarrow{PQ} = \langle 0, -2, 1 \rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 3, 4, 0 \rangle$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -4, 3, 6 \rangle$

Las componentes del producto vectorial son proporcionales a los coeficientes de las variables en la ecuación. El producto vectorial es paralelo al vector normal.

23. $x - 2 = 0$

25. $2x + 3y - z = 10$

27. $x - y + 2z = 12$

29. $3x + 9y - 7z = 0$

31. $4x - 3y + 4z = 10$

33. $z = 3$

35. $x + y + z = 5$

37. $7x + y - 11z = 5$

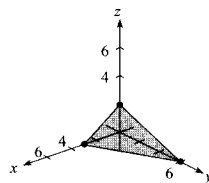
39. $y - z = -1$

41. Ortogonal

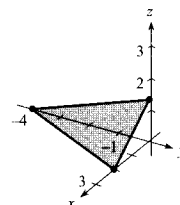
43. $83,5^\circ$

45. Paralelos

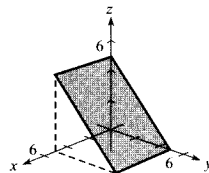
47.



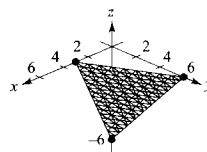
49.



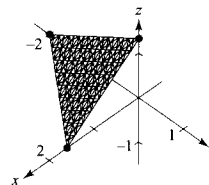
51.



53.



55.



57. $x = 2$
 $y = 1 + t$
 $z = 1 + 2t$

59. $(2, -3, 2)$

61. No hay intersección

63. $\frac{6\sqrt{14}}{7}$

65. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$

67. $149 \frac{\sqrt{17}}{17} \approx 36,14$

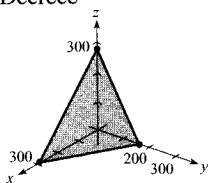
69. a)

Año	1970	1975	1980	1985
z (aprox.)	213,6	173,7	144,7	121,1

Año	1990	1991	1992	1993
z (aprox.)	85,3	81,9	81,4	83,6

b) Decece

c)



71. a) Esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z + 22 = 0$$

b) Planos

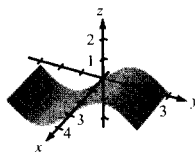
$$4x - 3y + z = 10 \pm 4\sqrt{26}$$

73. $\arccos \frac{1}{65} \approx 89,1^\circ$

75. Verdadero

76. Falso: pueden no cortarse (véase Ejercicio 61).

15. Cilindro



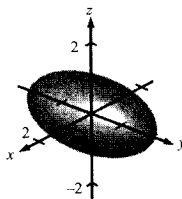
17. a) (20, 0, 0)

b) (10, 10, 20)

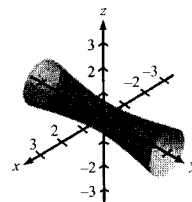
c) (0, 0, 20)

d) (0, 20, 0)

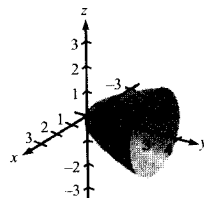
19. Elipsoide



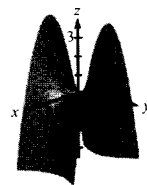
21. Hiperboloide de una hoja



23. Paraboloide elíptico



25. Paraboloide hiperbólico

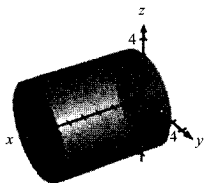
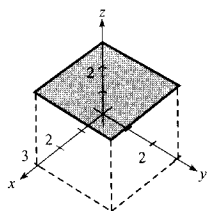


Sección 10.6 (página 1031)

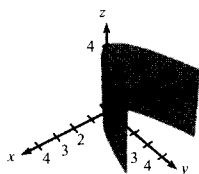
1. c 2. e 3. f 4. b 5. d 6. a

7. Plano

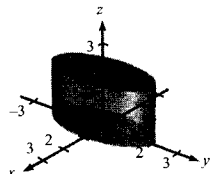
9. Cilindro circular recto



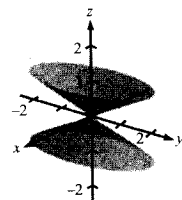
11. Cilindro parabólico



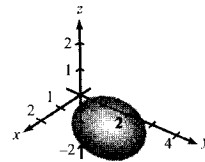
13. Cilindro elíptico



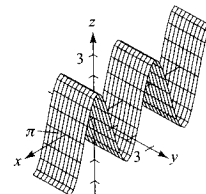
27. Cono elíptico



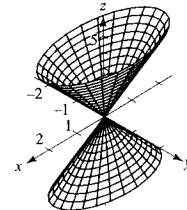
29. Elipsoide



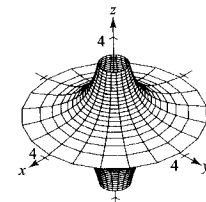
31.



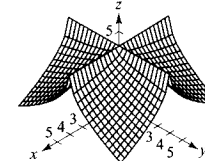
33.



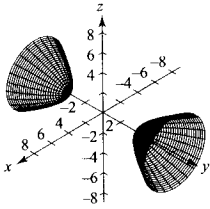
35.



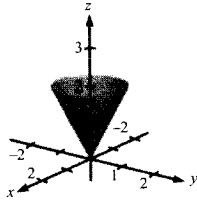
37.



39.

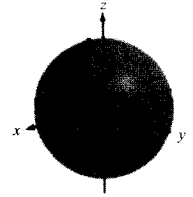
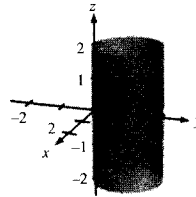


41.

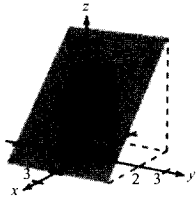


17. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



43.



45. $x^2 + z^2 = 4y$

21. $(4, 0, \frac{\pi}{2})$

23. $(4\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$

25. $(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

27. $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

29. $(0, 0, 12)$

31. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2})$

47. $4x^2 + 4y^2 = z^2$

49. $y^2 + z^2 = \frac{4}{x^2}$

33. b) $(5, 385, -0, 927, 1, 190)$

51. $y = \sqrt{2z}$

53. $\frac{128\pi}{3}$

35. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

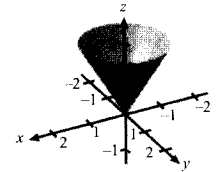
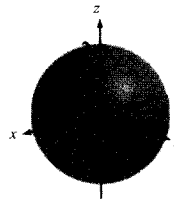
37. $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$

55. a) Eje mayor: $4\sqrt{2}$
Eje menor: 4
Focos: $(0, \pm 2, 2)$

b) Eje mayor: $8\sqrt{2}$
Eje menor: 8
Focos: $(0, \pm 4, 8)$

57. $\frac{x^2}{3.963^2} + \frac{y^2}{3.963^2} + \frac{z^2}{3.942^2} = 1$

59. $x = at, y = -bt, z = 0;$
 $x = at, y = bt + ab^2, z = 2abt + a^2b^2$



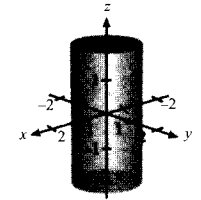
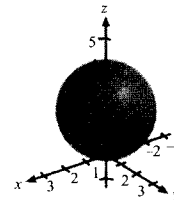
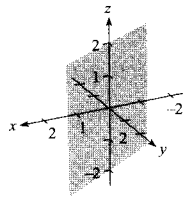
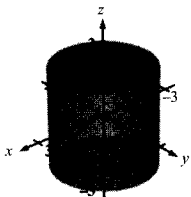
39. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ 41. $x^2 + y^2 = 1$

Sección 10.7 (página 1039)

1. $(5, \frac{\pi}{2}, 1)$ 3. $(2, \frac{\pi}{3}, 4)$ 5. $(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, -4)$

7. $(5, 0, 2)$ 9. $(1, \sqrt{3}, 2)$ 11. $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

13. $x^2 + y^2 = 4$ 15. $x - \sqrt{3}y = 0$



43. $(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 45. $(2\sqrt{13}, -\frac{\pi}{6}, \arccos[\frac{3}{\sqrt{13}}])$

47. $(13, \pi, \arccos[\frac{5}{13}])$ 49. $(10, \frac{\pi}{6}, 0)$

51. $(3\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}, 3)$ 53. $(4, \frac{7\pi}{6}, 4\sqrt{3})$

Rectangulares

Cilíndricas

Esféricas

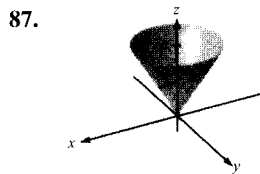
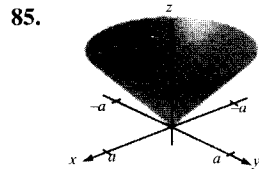
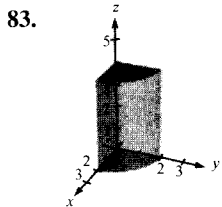
55. (4, 6, 3)
 57. (4,698, 1,710, 8)
 59. (-7,071, 12,247, 14,142)
 61. (3, -2, 2)
 63. $(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{2})$
 65. (-3,536, 3,536, -5)
 67. (2,804, -2,095, 6)

- (7,211, 0,983, 3)
 $(5, \frac{\pi}{9}, 8)$
 (14,142, 2,094, 14,142)
 (3,606, -0,588, 2)
 (2,833, 0,490, -1,5)
 $(5, \frac{3\pi}{4}, -5)$
 (-3,5, 2,5, 6)

- (7,810, 0,983, 1,177)
 (9,434, 0,349, 0,559)
 $(20, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$
 (4,123, -0,588, 1,064)
 (3,206, 0,490, 2,058)
 (7,071, 2,356, 2,356)
 (6,946, 5,641, 0,528)

69. d 70. e 71. c 72. a 73. f 74. b
 75. a) $r^2 + z^2 = 16$ b) $\rho = 4$
 77. a) $r^2 + (z - 1)^2 = 1$ b) $\rho = 2 \cos \phi$

79. a) $r = 4 \sin \theta$ b) $\rho = \frac{4 \sin \theta}{\sin \phi} = 4 \sin \theta \operatorname{cosec} \phi$
 81. a) $r^2 = \frac{9}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$ b) $\rho^2 = \frac{9 \operatorname{cosec}^2 \phi}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$



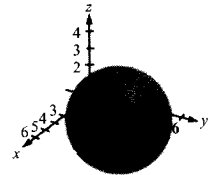
89. Rectangulares:
 $0 \leq x \leq 10$
 $0 \leq y \leq 10$
 $0 \leq z \leq 10$

91. Esféricas: $4 \leq \rho \leq 6$ 93. Elipse

5. Sobre el plano xy y a la derecha del plano xz o bajo el plano xy y a la izquierda del plano xz.

7. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = \frac{225}{4}$

9. Centro: (2, 3, 0)
 Radio: 3



11. a) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ b) 3
 $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ c) $24\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$
 d) $4x + y + 2z = 20$ e) $x = 4 - t, y = 4 + 4t, z = 0$

13. Ortogonales 15. $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = 15^\circ$

17. π 19. $-2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}$

21. $\frac{3}{\sqrt{26}}\mathbf{i} - \frac{9}{\sqrt{26}}\mathbf{j} + \frac{12}{\sqrt{26}}\mathbf{k}$ 23. $\sqrt{14}$

27. $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{7}, -\frac{5}{\sqrt{2}} \rangle$ 31. 4

33. Tensión en \overline{AB} : 21,7 N
 Tensión en \overline{BC} : 17,7 N

35. $100 \sec 20^\circ \approx 106,4$ libras

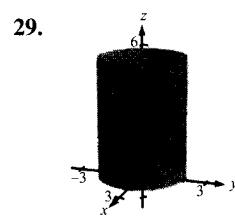
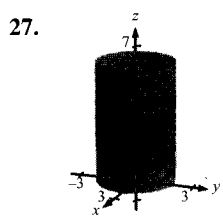
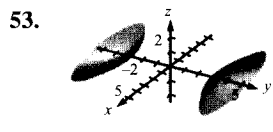
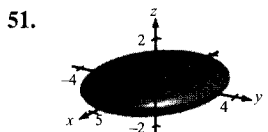
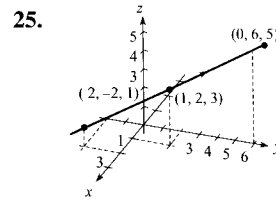
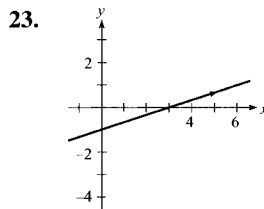
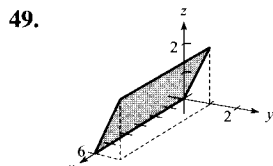
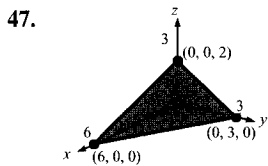
37. a) $x = 1, y = 2 + t, z = 3$ b) No hay

39. a) $x = t, y = -1 + t, z = 1$ b) $x = y + 1, z = 1$

41. $x + 2y = 1$ 43. $\frac{8}{7}$ 45. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

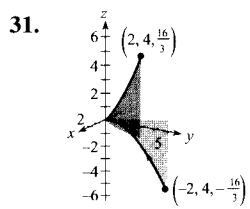
Ejercicios de repaso del Capítulo 10 (página 1041)

1. a) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$
 $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
 b) $2\sqrt{5}$ c) 10 d) $10\mathbf{i}$ e) $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ f) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 3. (-5, 4, 0)



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

55. a) $x^2 + y^2 - 2z + 2 = 0$
 b) $4\pi \approx 12,6 \text{ cm}^3$
 c) $\frac{225\pi}{64} \approx 11,0 \text{ cm}^3$



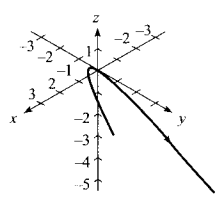
57. a) $\left(4, \frac{3\pi}{4}, 2\right)$ b) $\left(2\sqrt{5}, \frac{3\pi}{4}, \arccos\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\right)$
 59. a) $r^2 \cos 2\theta = 2z$ b) $\rho = 2 \sec 2\theta \cos \phi \operatorname{cosec}^2 \phi$

CAPÍTULO 11

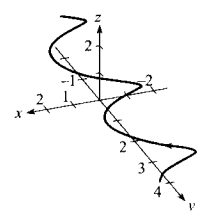
Sección 11.1 (página 1052)

1. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 3. $(0, \infty)$
 5. $[0, \infty)$ 7. $(-\infty, \infty)$
 9. a) $\frac{1}{2} \mathbf{i}$ b) \mathbf{j}
 c) $\frac{1}{2}(s+1)^2 \mathbf{i} - s \mathbf{j}$ d) $\frac{1}{2} \Delta t(\Delta t + 4) \mathbf{i} - \Delta t \mathbf{j}$
 11. a) $\ln 2 \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + 6 \mathbf{k}$ b) No es posible
 c) $\ln(t-4) \mathbf{i} + \frac{1}{t-4} \mathbf{j} + 3(t-4) \mathbf{k}$
 d) $\ln(1+\Delta t) \mathbf{i} - \frac{\Delta t}{1+\Delta t} \mathbf{j} + 3\Delta t \mathbf{k}$
 13. $\sqrt{1+t^2}$
 15. $t^2(5t-1)$ El producto escalar es un número (un escalar)
 17. b 18. c 19. d 20. a
 21. a) $(-20, 0, 0)$ b) $(10, 20, 10)$
 c) $(0, 0, 20)$ d) $(20, 0, 0)$

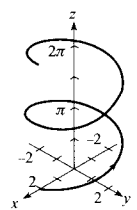
33. Parábola



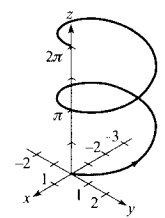
35. Hélice



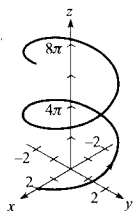
37.



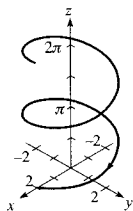
a) La hélice se traslada dos unidades hacia atrás por el eje x



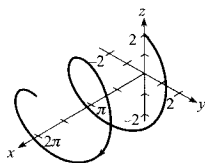
b) La altura de la hélice crece a ritmo más rápido



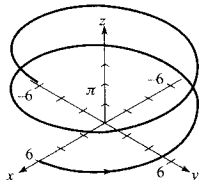
c) La orientación de la gráfica se invierte



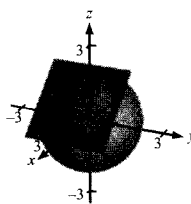
d) El eje de la hélice es el eje x



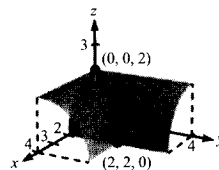
e) El radio de la hélice crece de 2 a 6



53. $\mathbf{r}(t) = (1 + \sin t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \sin t)\mathbf{k}$ y
 $\mathbf{r}(t) = (1 + \sin t)\mathbf{i} - \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \sin t)\mathbf{k}$



55. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{k}$



39. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t)\mathbf{j}$

41. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \sin t\mathbf{j}$

43. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 - 2t, 3 + 5t, 8t \rangle$

45. $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i}, 0 \leq t \leq 4$

$\mathbf{r}_2(t) = (4 - 4t)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$

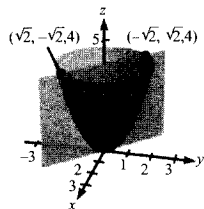
$\mathbf{r}_3(t) = (6 - t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 6$

47. $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2$

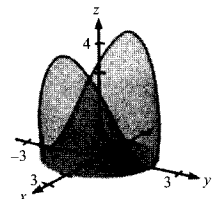
$\mathbf{r}_2(t) = (2 - t)\mathbf{i}, 0 \leq t \leq 2$

$\mathbf{r}_3(t) = (4 - t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 4$

49. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$



51. $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 4 \sin^2 t\mathbf{k}$



57. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

59. $\mathbf{0}$

61. No existe el límite

63. $(-\infty, 0), (0, \infty)$

65. $[-1, 1]$ 67. $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ 73. Verdadero

74. Falso: $x = y = z = t^3$ representa una recta

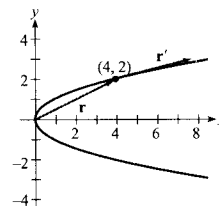
Sección 11.2 (página 1062)

1. $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

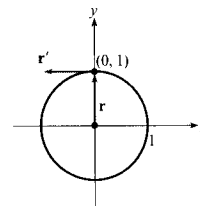
3. $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{j}$

$\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{i}$



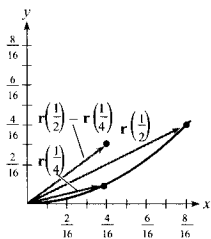
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0



$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0

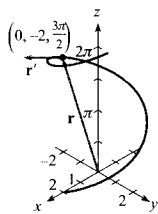
5. a) y b)

c) El vector $\mathbf{r}(\frac{1}{2}) - \mathbf{r}(\frac{1}{4})$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
 aproxima al vector
 tangente $\mathbf{r}'(\frac{1}{4})$



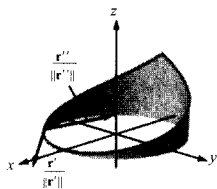
7. $\mathbf{r}(\frac{3\pi}{2}) = -2\mathbf{j} + (\frac{3\pi}{2})\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'(\frac{3\pi}{2}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$



9. $\frac{\mathbf{r}'(-\frac{1}{4})}{\|\mathbf{r}'(-\frac{1}{4})\|} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}} (\sqrt{2}\pi\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi\mathbf{j} - \mathbf{k})$

$\frac{\mathbf{r}''(-\frac{1}{4})}{\|\mathbf{r}''(-\frac{1}{4})\|} = \frac{1}{2\sqrt{\pi^4 + 4}} (-\sqrt{2}\pi^2\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$



11. $6\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

13. $-3a \sin t \cos^2 t \mathbf{i} + 3a \sin^2 t \cos t \mathbf{j}$

15. $-e^{-t}\mathbf{i}$ 17. $\langle \sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t, 1 \rangle$

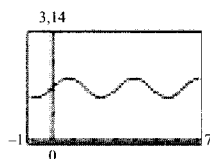
19. a) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ b) $2\mathbf{k}$ c) $8t + 9t^2 + 5t^4$

d) $-\mathbf{i} + (9 - 2t)\mathbf{j} + (6t - 3t^2)\mathbf{k}$

e) $8t^3\mathbf{i} + (12t^2 - 4t^3)\mathbf{j} + (3t^2 - 24t)\mathbf{k}$

f) $\frac{10 + 2t^2}{\sqrt{10 + t^2}}$

21. $\theta(t) = \arccos\left(\frac{-7 \sin t \cos t}{\sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} \sqrt{9 \cos^2 t + 16 \sin^2 t}}\right)$



Máximo: $\theta(\frac{\pi}{4}) = \theta(\frac{5\pi}{4}) \approx 1,855$

Mínimo: $\theta(\frac{3\pi}{4}) = \theta(\frac{7\pi}{4}) \approx 1,287$

Ortogonales: $\theta(\frac{n\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})$

23. $(-\infty, 0), (0, \infty)$

25. $(\frac{n\pi}{2}, \frac{(n+1)\pi}{2})$

27. $(-\infty, \infty)$

29. $(-\infty, 0), (0, \infty)$

31. $(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi), n$ entero

33. $\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

35. Las tres componentes de \mathbf{u} son funciones crecientes de t en $t = t_0$.

37. $t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{C}$

39. $\ln t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{2}{5}t^{5/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $(t^2 - t)\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

43. $\text{tg } t\mathbf{i} + \text{arctg } t\mathbf{j} + \mathbf{C}$

45. $2e^{2t}\mathbf{i} + 3(e^t - 1)\mathbf{j}$

47. $600\sqrt{3t}\mathbf{i} + (-16t^2 + 600t)\mathbf{j}$

49. $(\frac{2 - e^{-t^2}}{2})\mathbf{i} + (e^{-t} - 2)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$

51. $4\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

53. $a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \frac{\pi}{2}\mathbf{k}$

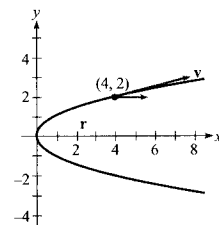
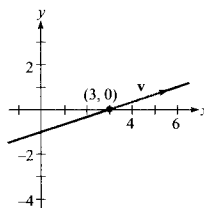
63. Falso: si tomamos $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces $\frac{d}{dt} \|\mathbf{r}(t)\| = 0$, pero $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$

64. Falso: $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$

Sección 11.3 (página 1071)

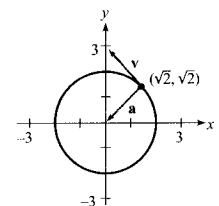
1. $\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
 $\mathbf{a}(1) = \mathbf{0}$

3. $\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$
 $\mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}$

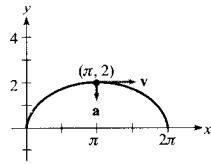


5. $\mathbf{v}(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$



7. $\mathbf{v}(\pi) = 2\mathbf{i}$
 $\mathbf{a}(\pi) = -\mathbf{j}$



9. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
 $s(t) = \sqrt{14}$
 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

11. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
 $s(t) = \sqrt{1 + 5t^2}$
 $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{t}{\sqrt{9-t^2}} \mathbf{k}$
 $s(t) = \sqrt{\frac{18-t^2}{9-t^2}}$
 $\mathbf{a}(t) = \frac{-9}{(9-t^2)^{3/2}} \mathbf{k}$

15. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$
 $s(t) = 5$
 $\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\mathbf{j} - 3 \sin t\mathbf{k}$

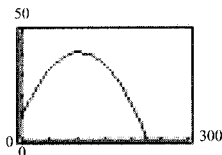
17. a) $x = 1 + t$
 $y = -1 - 2t$
 $z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t$

b) (1,100, -1,200, 0,325)

19. $\mathbf{v}(t) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 $\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 $\mathbf{r}(2) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

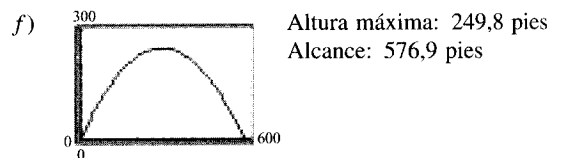
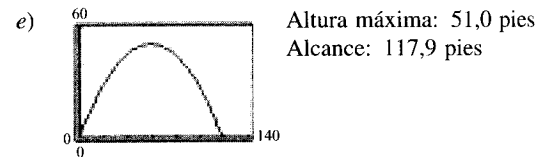
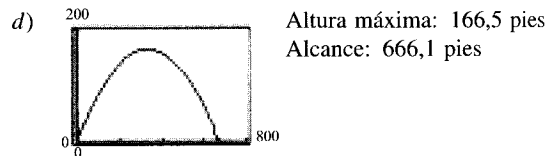
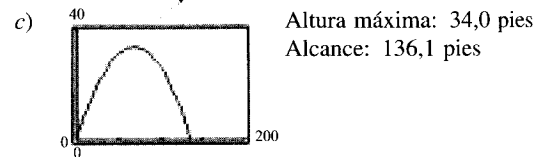
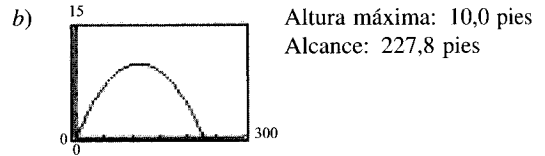
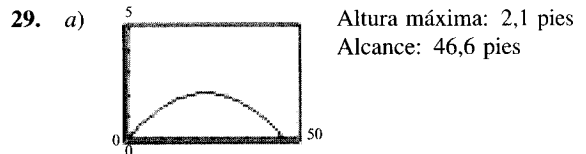
21. $\mathbf{v}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{9}{2}t - \frac{14}{3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}\right)\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(2) = \frac{17}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 44\sqrt{3}t\mathbf{i} + (10 + 44t - 16t^2)\mathbf{j}$



25. $v_0 = 28,78$ pies/s, $\theta = 58,28^\circ$

27. $1,91^\circ$



31. $\mathbf{r}(t) = (40\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (40\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}$
 Dirección: $8\sqrt{2}(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
 Velocidad: $8\sqrt{58} \approx 60,9$ pies/s

33. Altura máxima: 129,1 pies
 Alcance: 886,3 pies

35. $\mathbf{v}(t) = b\omega[1 - \cos \omega t]\mathbf{i} + \sin \omega t\mathbf{j}$
 $\mathbf{a}(t) = b\omega^2(\sin \omega t\mathbf{i} + \cos \omega t\mathbf{j})$
 a) $\|\mathbf{v}(t)\| = 0$ cuando $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 b) $\|\mathbf{v}(t)\|$ es máximo cuando $\omega t = \pi, 3\pi, \dots$

37. $\mathbf{v}(t) = -b\omega \sin \omega t\mathbf{i} + \omega t \cos \omega t\mathbf{j}$
 $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$

39. $\mathbf{a}(t) = -b\omega^2(\cos \omega t\mathbf{i} + \sin \omega t\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$

41. $8\sqrt{10}$ pies/s

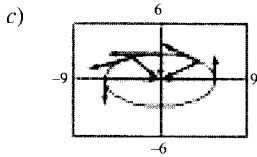
47. a) $\mathbf{v}(t) = -6 \text{ sen } t \mathbf{i} + 3 \text{ cos } t \mathbf{j}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{3 \text{ sen}^2 t + 1}$

$\mathbf{a}(t) = -6 \text{ cos } t \mathbf{i} - 3 \text{ sen } t \mathbf{j}$

b)

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
Velocidad	3	$3\sqrt{10}/2$	6	$3\sqrt{13}/2$	3



d) La rapidez está creciendo cuando el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{a} está en el intervalo $[0, \pi/2)$ y decreciendo cuando dicho ángulo está en el intervalo $(\pi/2, \pi)$.

13. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i}$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$

$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es constante.

15. $\mathbf{v}(t) = 8t\mathbf{i}$

$\mathbf{a}(t) = 8\mathbf{i}$

$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$

$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es variable.

17. $\mathbf{T} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$\mathbf{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

$a_T = -\sqrt{2}$

$a_N = \sqrt{2}$

19. $\mathbf{T} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\mathbf{i} + \mathbf{j})$

$\mathbf{N} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

$a_T = \sqrt{2}e^{\pi/2}$

$a_N = \sqrt{2}e^{\pi/2}$

21. $\mathbf{T} = (\cos \omega t_0)\mathbf{i} + (\text{sen } \omega t_0)\mathbf{j}$

$\mathbf{N} = (-\text{sen } \omega t_0)\mathbf{i} + (\cos \omega t_0)\mathbf{j}$

$a_T = \omega^2$

$a_N = \omega^3 t_0$

23. $\mathbf{T}(t) = -\text{sen } (\omega t)\mathbf{i} + \text{cos } (\omega t)\mathbf{j}$

$\mathbf{N}(t) = -\text{cos } (\omega t)\mathbf{i} - \text{sen } (\omega t)\mathbf{j}$

$a_T = 0$

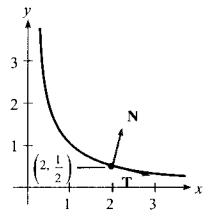
$a_N = a\omega^2$

25. $\|\mathbf{v}(t)\| = a\omega$ La rapidez es constante, porque $a_T = 0$.

27. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

$\mathbf{T}(2) = \frac{\sqrt{17}}{17} (4\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$\mathbf{N}(2) = \frac{\sqrt{17}}{17} (\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$



29. a) $t = \frac{1}{2}: a_T = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}, a_N = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}$

$t = 1: a_T = 0, a_N = \pi^2$

$t = \frac{3}{2}: a_T = -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}, a_N = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}$

b) $t = \frac{1}{2}$: Creciente

$t = 1$: Máximo

$t = \frac{3}{2}$: Decreciente

Sección 11.4 (página 1082)

1. $\mathbf{T}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{k})$

$x = t$

$y = 0$

$z = t$

3. $\mathbf{T}(0) = \frac{\sqrt{5}}{5} (2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$x = 2$

$y = 2t$

$z = t$

5. $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0 \rangle$

$x = \sqrt{2} - \sqrt{2}t$

$y = \sqrt{2} + \sqrt{2}t$

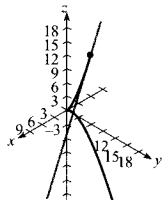
$z = 4$

7. $\mathbf{T}(3) = \frac{1}{19} \langle 1, 6, 18 \rangle$

$x = 3 + t$

$y = 9 + 6t$

$z = 18 + 18t$



9. Recta tangente: $x = 1 + t$

$y = t$

$z = 1 + \frac{1}{2}t$

$\mathbf{r}(1,1) \approx \langle 1, 1, 0, 1, 1, 0, 5 \rangle$

11. $1, 2^\circ$

$$31. \mathbf{T}(t) = \frac{\sqrt{14}}{14} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$\mathbf{N}(t)$ no está definido

a_T no está definido

a_N no está definido

$$33. \mathbf{T} = \frac{\sqrt{6}}{6} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{N} = \frac{\sqrt{30}}{30} (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$a_T = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

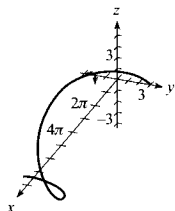
$$a_N = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$35. \mathbf{T} = \frac{1}{5} (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$$\mathbf{N} = -\mathbf{k}$$

$$a_T = 0$$

$$a_N = 3$$



$$37. \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{17} (-4\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{17} (\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$$

$$39. a) 4\sqrt{625\pi^2 + 1} \approx 314 \text{ millas/h}$$

$$b) a_T = 0, a_N = 1.000\pi^2$$

$$41. a_T = \frac{-32(v_0 \sin \theta - 32t)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + (v_0 \sin \theta - 32t)^2}}$$

$$a_N = \frac{32v_0 \cos \theta}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + (v_0 \sin \theta - 32t)^2}}$$

43. a) La componente centrípeta se cuadruplica.

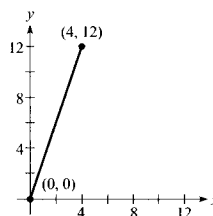
b) La componente centrípeta queda dividida por dos.

45. 4,83 millas por segundo

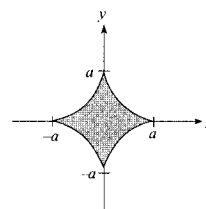
47. 4,67 millas por segundo

Sección 11.5 (página 1095)

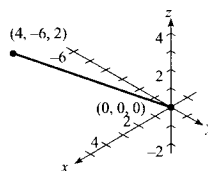
$$1. 4\sqrt{10}$$



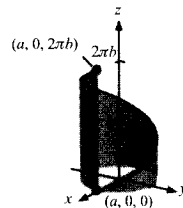
$$3. 6a$$



$$5. 2\sqrt{14}$$



$$7. 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$



$$9. 8,37$$

$$11. a) 2\sqrt{21} \approx 9,165$$

$$b) 9,529$$

c) Aumentar el número de segmentos.

$$d) 9,571$$

$$13. a) s = \sqrt{5}t$$

$$b) \mathbf{r}(t) = 2 \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + 2 \sin \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{k}$$

$$c) s = \sqrt{5}: (1,081, 1,683, 1,000)$$

$$s = 4: (-0,433, 1,953, 1,789)$$

$$15. K = 0$$

$$17. K = \frac{2}{5}$$

$$19. K = 0$$

$$21. \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$23. \frac{1}{4}$$

$$25. \frac{1}{a}$$

$$27. \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t}$$

$$29. \frac{1}{\omega t}$$

$$31. \frac{\sqrt{5}}{(1 + 5t^2)^{3/2}}$$

$$33. \frac{3}{25}$$

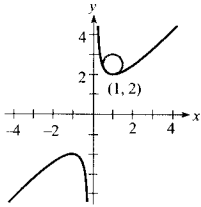
$$35. K = 0, \frac{1}{K} \text{ no está definido}$$

37. $K = \frac{4}{17^{3/2}}, \frac{1}{K} = \frac{17^{3/2}}{4}$ 39. $K = \frac{1}{a}, \frac{1}{K} = a$

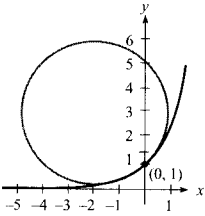
41. a) $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

b) Como la curvatura es menor, el radio de curvatura es mayor.

43. $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$



45. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$



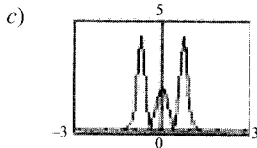
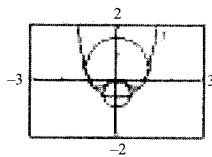
47. a) (1, 3) b) 0

49. a) $K \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$ b) 0 51. (1, 3)

55. a) $K = \frac{2|6x^2 - 1|}{(16x^6 - 16x^4 + 4x^2 + 1)^{3/2}}$

b) $x=0: x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x=1: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$



La curvatura tiende a ser mayor cerca de los extremos de la función y decrece cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Sin embargo, f y K no tienen los mismos números críticos.

Números críticos de f : $x = 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7071$

Números críticos de K : $x = 0, \pm 0,7647, \pm 0,4082$

57. a) 12,25 unidades b) $\frac{1}{2}$

59. En un extremo relativo suave $K = |y''|$. Sí. $y = x^4$ tiene curvatura 0 en su mínimo (0, 0). La curvatura es positiva en todos los demás puntos de la curva.

61. (-2, 3) 63. $\frac{3}{2\sqrt{2(1 + \sin \theta)}}$

65. $\frac{2}{|a|}$ 67. a) 0 b) 0

69. $\frac{1}{4}$ 73. $K = \frac{1}{4a} \left| \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \right|$

75. 2.420 libras Mínimo: $K = \frac{1}{4a}$
No hay máximo

85. a) a b) πa c) $K = \pi a$

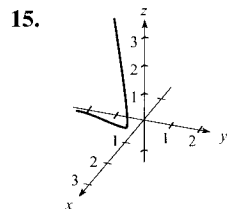
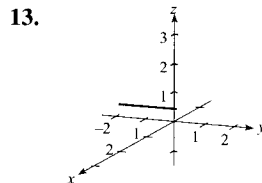
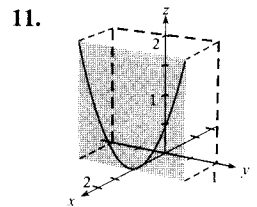
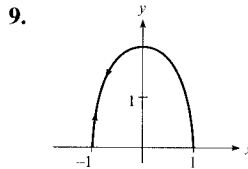
Ejercicios de repaso del Capítulo 11 (página 1099)

1. a) Todos los reales excepto $n\pi$, con n entero.
b) Continua excepto en $t = n\pi$, n entero.

3. a) $(0, \infty)$ b) Continua

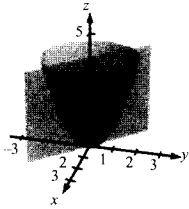
5. a) \mathbf{i} b) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k}$
c) $(2c - 1)\mathbf{i} + (c - 1)^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1 - c)^3\mathbf{k}$
d) $2\Delta t\mathbf{i} + \Delta t(\Delta t + 2)\mathbf{j} - \frac{1}{3}\Delta t[(\Delta t)^2 + 3\Delta t + 3]\mathbf{k}$

7. $1 - t - \sin t$ No: el producto escalar es un número.



17. $\mathbf{r}_1(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$
 $\mathbf{r}_2(t) = 4\mathbf{i} + (3 - t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 3$
 $\mathbf{r}_3(t) = (4 - t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 4$
19. $\mathbf{r}(t) = \langle -2 + 7t, -3 + 4t, 8 - 10t \rangle$

21. $x = t, y = -t, z = 2t^2$ 23. $4\mathbf{i} + \mathbf{k}$



25. a) $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ b) $\mathbf{0}$ c) $4t + 3t^2$
 d) $-5\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$ e) $\frac{10t - 1}{\sqrt{10t^2 - 2t + 1}}$
 f) $\left(\frac{8}{3}t^3 - 2t^2\right)\mathbf{i} - 8t^3\mathbf{j} + (9t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$

27. $x = -\sqrt{2} - \sqrt{2}t$
 $y = \sqrt{2} - \sqrt{2}t$
 $z = \frac{3\pi}{4} + t$

29. En $t = t_0$, $x(t)$ e $y(t)$ son funciones crecientes y $z(t)$ es decreciente.

31. $x(t) = t, y(t) = 16 + 8t, z(t) = 2 + \frac{1}{2}t$
 $\mathbf{r}(4,1) \approx (0,1, 16,8, 2,05)$

33. $\sin t \mathbf{i} + (t \sin t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{C}$

35. $\frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln|t + \sqrt{1+t^2}|) + \mathbf{C}$

37. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (e^t + 2)\mathbf{j} - (e^{-t} + 4)\mathbf{k}$

39. $\frac{32}{3} \mathbf{j}$

41. $\mathbf{v}(t) = \langle -3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 3 \rangle$
 $\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t + 1}$
 $\mathbf{a}(t) = \langle 3 \cos t(3 \sin^2 t - 1), 3 \sin t(2 \cos^2 t - \sin^2 t), 0 \rangle$

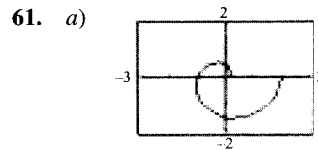
43. 152 pies 45. 34,9 m/s

47. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$ 49. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j}$
 $\|\mathbf{v}\| = 5$ $\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{4t+1}}{2\sqrt{t}}$
 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$ $\mathbf{a} = -\frac{1}{4t\sqrt{t}}\mathbf{j}$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ no existe $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{-1}{4t\sqrt{t}\sqrt{4t+1}}$
 $K = 0$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{2t\sqrt{4t+1}}$
 $K = \frac{2}{(4t+1)^{3/2}}$

51. $\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$ 53. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 5t^2}$
 $\mathbf{a} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{5t}{\sqrt{1 + 5t^2}}$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 5t^2}}$
 $K = \frac{2}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}$ $K = \frac{\sqrt{5}}{(1 + 5t^2)^{3/2}}$

55. $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ 57. 4,56 millas por segundo

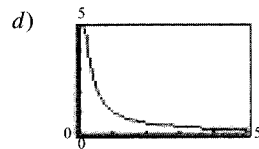
59. La curvatura cambia abruptamente de cero a un valor constante no nulo.



b) $\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{4\pi^2 + 1} + 2\pi) \approx 6,77$

c) $K = \frac{\pi(\pi^2 t^2 + 2)}{(\pi^2 t^2 + 1)^{3/2}}$
 $K(0) = 2\pi, K(1) = \frac{\pi(\pi^2 + 2)}{(\pi^2 + 1)^{3/2}} \approx 1,04$

$K(2) = \frac{2\pi(2\pi^2 + 1)}{(4\pi^2 + 1)^{3/2}} \approx 0,51$



e) 0
 f) Conforme la gráfica describe la espiral hacia fuera, la curvatura va disminuyendo.

CAPÍTULO 12

Sección 12.1 (página 1112)

1. z es función de x e y 3. z no es función de x e y
 5. a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) 6 d) $\frac{5}{y}$ e) $\frac{x}{2}$ f) $\frac{5}{t}$
 7. a) 5 b) $3e^2$ c) $\frac{2}{e}$ d) $5e^y$ e) xe^2 f) te^t

9. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 11. a) $\sqrt{2}$ b) $3 \operatorname{sen} 1$

13. a) 4 b) 6 15. a) $2x + \Delta x$ b) -2

17. Dominio: $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

Recorrido: $0 \leq z \leq 2$

19. Dominio: $\{(x, y): -1 \leq x + y \leq 1\}$

Recorrido: $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$

21. Dominio: $\{(x, y): y < -x + 4\}$

Recorrido: toda la recta real

23. Dominio: $\{(x, y): x \neq 0, y \neq 0\}$

Recorrido: toda la recta real

25. Dominio: $\{(x, y): y \neq 0\}$

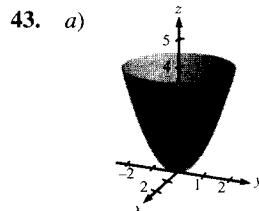
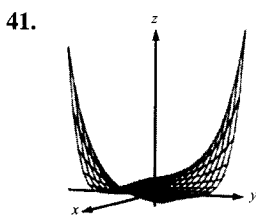
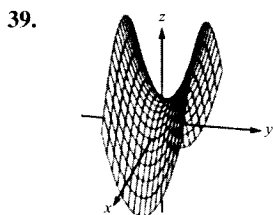
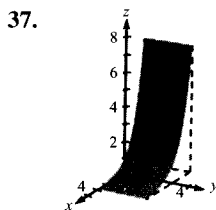
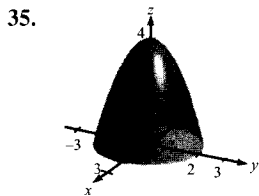
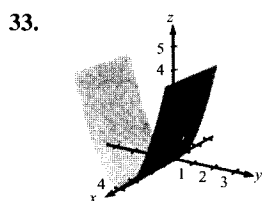
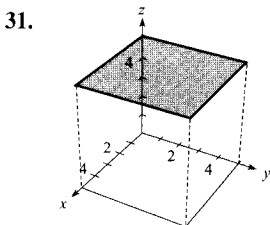
Recorrido: $z > 0$

27. Dominio: $\{(x, y): x \neq 0, y \neq 0\}$

Recorrido: $|z| > 0$

29. a) (20, 0, 0) b) (-15, 10, 20)

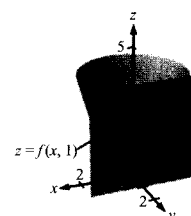
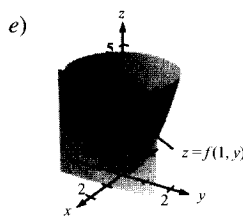
c) (20, 15, 25) d) (20, 20, 0)



b) g es la traslación vertical de f dos unidades hacia arriba.

c) g es la traslación horizontal de f dos unidades a la derecha.

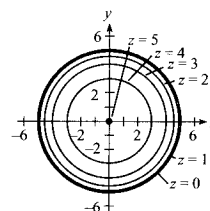
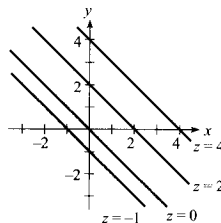
d) g es la reflexión de f en el plano xy, seguida de una traslación vertical de 4 unidades hacia arriba.



45. c 46. d 47. b 48. a

49. Rectas: $x + y = c$

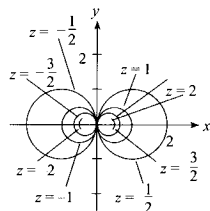
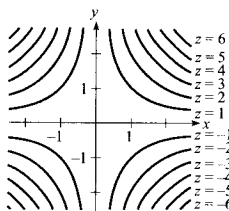
51. Círculos centrados en (0, 0) de radio ≤ 5



53. Hipérbolas: $xy = c$

55. Círculos que pasan por (0, 0)

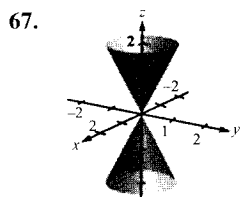
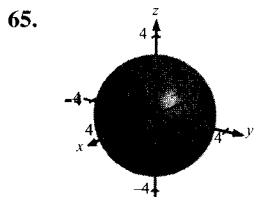
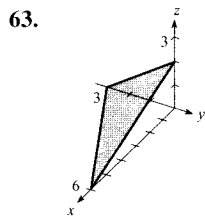
Centro en $(\frac{1}{2c}, 0)$



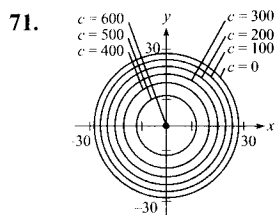
57. No: $z = e^{-(x^2 + y^2)}$

59. La superficie puede tener la forma de silla de montar. Como ejemplo, se puede tomar $f(x, y) = xy$. La gráfica no es única: cualquier traslación vertical produce las mismas curvas de nivel.

61. Tasa de impuestos	Tasa de inflación		
	0	0,03	0,05
0,00	\$2.593,74	\$1.929,99	\$1.592,33
0,28	\$2.004,23	\$1.491,34	\$1.230,42
0,35	\$1.877,14	\$1.396,77	\$1.152,40



69. a) 243
b) 507



73. $C = 0,75xy + 0,80(xz + yz)$

75. a) $k = \frac{520}{3}$ b) $P = \frac{520T}{3V}$

Las curvas de nivel son rectas

77. a) C b) A c) B

79. a) Las fronteras entre los colores representan curvas de nivel.
b) No, los colores representan intervalos de distintas longitudes.
c) Utilizar más colores.

81. Falso: tomar $f(x, y) = 4$ 82. Verdadero

83. Falso: con $f(x, y) = xy^2$, $f(ax, ay) = a^3f(x, y)$

84. Verdadero

Sección 12.2 (página 1123)

1. 2 3. 15 5. 5, continua
7. -3, continua para $x \neq y$
9. 0, continua para $xy \neq -1$, $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| \leq 1$
11. 1, continua 13. $2\sqrt{2}$, continua para $x + y + z \geq 0$
15. 1, continua
17. Continua excepto en (0, 0); el límite no existe.

19.

(x, y)	(1, 0)	(0,5, 0)	(0,1, 0)	(0,01, 0)	(0,001, 0)
f(x, y)	0	0	0	0	0

y = 0: 0

(x, y)	(1, 1)	(0,5, 0,5)	(0,1, 0,1)	(0,01, 0,01)	(0,001, 0,001)
f(x, y)	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

y = x: $\frac{1}{2}$ No existe el límite
Continua excepto en (0, 0)

21.

(x, y)	(1, 1)	(0,25, 0,5)	(0,01, 0,1)
f(x, y)	-1/2	-1/2	-1/2

(x, y)	(0,0001, 0,01)	(0,000001, 0,001)
f(x, y)	-1/2	-1/2

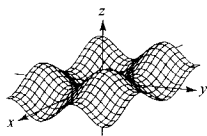
x = y²: $-\frac{1}{2}$

(x, y)	(-1, 1)	(-0,25, 0,5)	(-0,01, 0,1)
f(x, y)	1/2	1/2	1/2

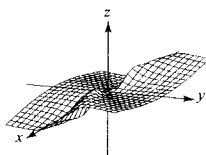
(x, y)	(-0,0001, 0,01)	(-0,000001, 0,001)
f(x, y)	1/2	1/2

x = -y²: $\frac{1}{2}$ No existe el límite
Continua excepto en (0, 0)

23. 0

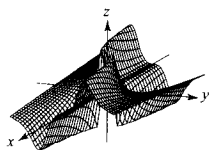


25. No existe límite



27. No existe el límite

29. 1 31. 0



33. Continua excepto en (0, 0, 0)

35. Continua

37. Continua

39. Continua para $y \neq \frac{3x}{2}$

41. a) $2x$ b) -4

43. a) $2 + y$ b) $x - 3$

47. No. La existencia de $f(2, 3)$ no afecta en nada a la existencia del límite cuando $(x, y) \rightarrow (2, 3)$.

49. Verdadero 50. Falso: tomar $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

51. Falso: considerar $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2), & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$

52. Verdadero.

$$13. \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$$

15. $h_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$

$h_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

17. $f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

19. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \sec^2(2x - y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sec^2(2x - y)$

21. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^y \cos xy$

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y(x \cos xy + \sen xy)$

23. $f_x(x, y) = 1 - x^2$

$f_y(x, y) = y^2 - 1$

25. $f_x(x, y) = 2$

$f_y(x, y) = 3$

27. $f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

$f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

29. $g_x(1, 1) = -2$

$g_y(1, 1) = -2$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

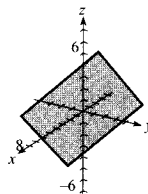
33. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4}$

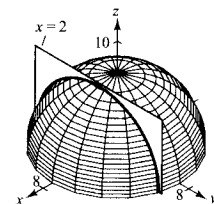
35. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4}$

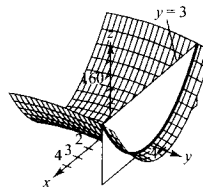
37.



39. $-\frac{1}{2}$



41. 18



Sección 12.3 (página 1132)

1. $f_x = (4, 1) < 0$

3. $f_y = (4, 1) > 0$

5. $f_x(x, y) = 2$

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y}$

$f_y(x, y) = -3$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{2y}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2e^{2y}$

11. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$

43. $x = -6, y = 4$

45. $x = 1, y = 1$

47. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$

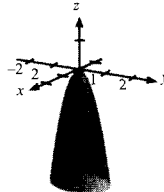
49. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

51. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \operatorname{tg} y$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \sec^2 y \operatorname{tg} y$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \sec^2 y$
53. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$
55. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sec y$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \sec y \operatorname{tg} y$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \sec y (\sec^2 y + \operatorname{tg}^2 y)$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sec y \operatorname{tg} y$
57. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x(x^2 + y^2)}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 + y^2}$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{x^2(x^2 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$
59. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
61. $F_x(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$
 $F_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$
 $F_z(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$
63. $H_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$
 $H_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y + 3z)$
 $H_z(x, y, z) = 3 \cos(x + 2y + 3z)$
65. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = 0$
67. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyz}(x, y, z) = z^2 e^{-x} \operatorname{sen} yz$
69. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$
71. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$
73. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
75. $\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t} \cos \frac{x}{c} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
77. a) $\frac{\partial C}{\partial x} = 183, \frac{\partial C}{\partial y} = 237$
 b) El modelo representado por y , ya que el coeficiente de y es mayor que el de x en magnitud.
79. Un incremento en los costes provocará un descenso en el número de solicitantes.
81. $\frac{\partial T}{\partial x} = -2,4^\circ$ por metro, $\frac{\partial T}{\partial y} = -9^\circ$ por metro
83. a) $U_x = -10x + y$
 b) $U_y = x - 6y$
 c) $U_x(2, 3) = -17, U_y(2, 3) = -16$
 La persona debería consumir una unidad más del producto y , ya que el ritmo de descenso en la utilidad es menor para y .
 d)
- 
85. a) $f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$
 $f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$
 b) $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$
 c) $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx}(0, 0) = 1$
 d) f_{xy} o f_{yx} o ambas no son continuas en $(0, 0)$.
86. Falso: tomar $z = x + y + 1$
87. Verdadero
88. Verdadero
89. Verdadero

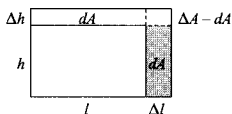
Sección 12.4 (página 1142)

1. $dz = 6xy^3 dx + 9x^2y^2 dy$
3. $dz = \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} (x dx + y dy)$
5. $dz = (\cos y + y \operatorname{sen} x) dx - (x \operatorname{sen} y + \cos x) dy$
7. $dw = 2z^3y \cos x dx + 2z^3 \operatorname{sen} x dy + 6z^2y \operatorname{sen} x dz$
9. $dw = \frac{1}{z - 2y} dx + \frac{z + 2x}{(z - 2y)^2} dy - \frac{x + y}{(z - 2y)^2} dz$
11. a) $f(1, 2) = 4, f(1,05, 2,1) = 3,4875, \Delta z = -0,5125$
 b) $dz = -0,5$
13. a) $f(1, 2) = 0,90930, f(1,05, 2,1) = 0,90637,$
 $\Delta z = -0,00293$ b) $dz = 0,00385$
15. a) $f(1, 2) = -5, f(1,05, 2,1) = -5,25, \Delta z = -0,25$
 b) $dz = -0,25$

17. 0,094

19. -0,012

21. $dA = h dl + l dh$



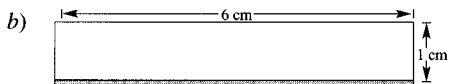
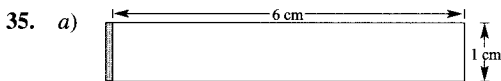
23.

Δr	Δh	dV	ΔV	$\Delta V - dV$
0,1	0,1	4,7124	4,8391	0,1267
0,1	-0,1	2,8274	2,8264	-0,0010
0,001	0,002	0,0566	0,0565	0,0000
-0,0001	0,0002	-0,0019	-0,0019	0,0000

25. 10% 27. $\pm 0,24$ pulgadas cuadradas 29. 7%

31. a) 107,3 pies b) 1,2 pies

33. $L \approx 8,096 \times 10^{-4} \pm 6,6 \times 10^{-6}$ microhenrios



c) Altura

d) $dl = 0,01, dh = 0: dA = 0,01$
 $dl = 0, dh = 0,01: dA = 0,06$

39. $\varepsilon_1 = \Delta x$

41. $\varepsilon_1 = y \Delta x$

$\varepsilon_2 = 0$

$\varepsilon_2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$

La respuesta no es única

La respuesta no es única

Sección 12.5 (página 1151)

1. $2(e^{2t} - e^{-2t})$

3. $e^t \sec(\pi - t)[1 - \operatorname{tg}(\pi - t)]$

5. $2 \cos 2t$

7. $4e^{2t}$

9. $3(2t^2 - 1)$

11. $\frac{24t}{(1 - 4t^2)^{5/2}}, 0$

13. $\frac{\partial w}{\partial s} = 4s, 8$

15. $\frac{\partial w}{\partial s} = 2s \cos 2t, 0$

$\frac{\partial w}{\partial t} = 4t, -4$

$\frac{\partial w}{\partial t} = -2s^2 \operatorname{sen} 2t, -18$

17. $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$

19. $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$

$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 4(x - y)$

$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 1$

21. $\frac{3y - 2x + 2}{2y - 3x + 1}$

23. $\frac{x + y(x^2 + y^2)}{y + x(x^2 + y^2)}$

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{z}$

27. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -1 - \frac{\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

29. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{y + z}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-ze^{xz} + y}{xe^{xz}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{y + z}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{-xz}$

33. $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{yw - xy - xw}{xz - yz + 2w}$

35. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y \operatorname{sen} xy}{z}$

$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-xz + zw}{xz - yz + 2w}$

$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x \operatorname{sen} xy - z \cos yz}{z}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-yz - zw}{xz - yz + 2w}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y \cos yz + w}{z}$

37. 1

39. 0

41. $\frac{\sqrt{2}}{10} (15 + \pi)$ millas/h

43. $\frac{dV}{dt} = 1.536\pi$ pulgadas cúbicas por minuto

$\frac{dS}{dt} = \frac{36\pi}{5} (20 + 9\sqrt{10})$ pulgadas cuadradas por minuto

(El área incluye a la base.)

45. $28m \text{ cm}^2/\text{s}$

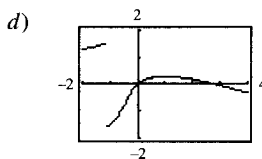
47. a) $x = 32\sqrt{2}t$

$y = 32\sqrt{2}t - 16t^2$

b) $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + 50}\right)$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{32\sqrt{2}t - 16t^2}{32\sqrt{2}t + 50}\right)$

c) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-16(8\sqrt{2}t^2 + 25t - 25\sqrt{2})}{64t^4 - 256\sqrt{2}t^3 + 1.024t^2 + 800\sqrt{2}t + 625}$



No. El ritmo de cambio de α es máximo cuando el proyectil está más próximo a la cámara.

e) α es máximo para $t = 0,98$.

No. El proyectil alcanza la máxima altura cuando $t = \sqrt{2} \approx 1,41$ segundos.

Sección 12.6 (página 1164)

1. $\frac{\sqrt{3}-5}{2}$

3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

5. $-\frac{7}{25}$

7. $-e$

9. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

11. $\frac{(8+\pi)\sqrt{6}}{24}$

13. $\sqrt{2}(x+y)$

15. $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\cos(2x-y)$

17. $-7\sqrt{2}$

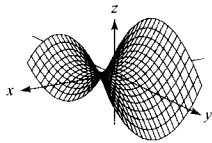
19. $\frac{7\sqrt{19}}{19}$

21. b) $-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j}$

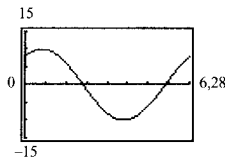
c) $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{10}\mathbf{j}$

La dirección opuesta a la del gradiente

23. a)



b) $D_u f(4, -3) = 8 \cos \theta + 6 \sin \theta$



c) $\theta \approx 2,21, \theta \approx 5,36$

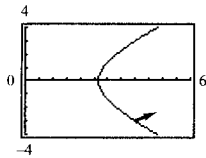
Las direcciones en las que f no cambia

d) $\theta \approx 0,64, \theta \approx 3,79$

Las direcciones de máximo ritmo de cambio de f .

e) 10; la magnitud del ritmo de cambio máximo

f)



Orthogonal a la curva de nivel

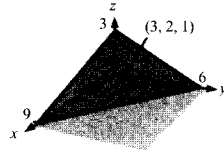
25. $\text{tg } y\mathbf{i} + x \sec^2 y \mathbf{j}, \sqrt{17}$

27. $\frac{2}{3(x^2+y^2)}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}), \frac{2\sqrt{5}}{15}$

29. $\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 1$

31. $\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(1-x^2-y^2-z^2)^{3/2}}, 0$

33.



35. a) $\frac{2+3\sqrt{3}}{12}$

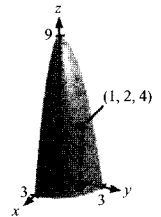
b) $\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$

37. a) $-\frac{1}{5}$

b) $-\frac{11\sqrt{10}}{60}$

39. $\frac{\sqrt{13}}{6}$

41.



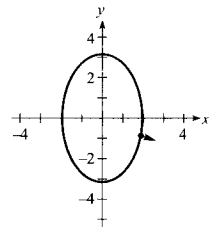
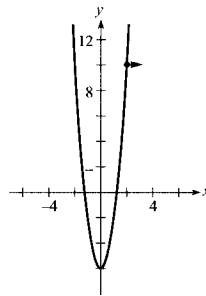
43. $-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, 2\sqrt{5}$

45. $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

47. $-\frac{1}{2}\mathbf{j}$

49. $\frac{\sqrt{257}}{257}(16\mathbf{i} - \mathbf{j})$

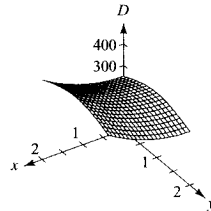
51. $\frac{\sqrt{85}}{85}(9\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$



53. $\frac{1}{625}(7\mathbf{i} - 24\mathbf{j})$

55. $y^2 = 10x$

57. a)



b) Dibujar $-D$

c) 315 pies

d) 60,0

e) 55,5

f) $60,0\mathbf{i} + 55,5\mathbf{j}$

59. A

61. Verdadero

62. Falso: $D_u f(x, y) = \sqrt{2} > 1$, donde $\mathbf{u} = \cos \frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{4}\mathbf{j}$

63. Verdadero

64. Verdadero

65. $f(x, y, z) = e^x \cos y + \frac{1}{2}z^2 + C$

Sección 12.7 (página 1173)

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{10}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$
 5. $\frac{\sqrt{2.049}}{2.049}(32\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - \mathbf{k})$ 7. $\frac{\sqrt{113}}{113}(-\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
 9. $\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 11. $6x + 2y + z = 35$
 13. $2x - y + z = 2$ 15. $10x - 8y - z = 9$
 17. $2x - z = -2$ 19. $3x + 4y - 25z = 25(1 - \ln 5)$
 21. $x - 4y + 2z = 18$ 23. $x + y + z = 1$
 25. $2x + 4y + z = 14$ 27. $3x + 2y + z = -6$
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1}$ $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{1}$
 29. $x - y + 2z = \frac{\pi}{2}$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-(\pi/4)}{2}$

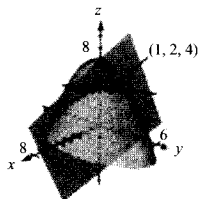
31. a) Recta: $x = 1, y = 1, z = 1 - t$
 Plano: $z = 1$
 b) Recta: $x = -1, y = 2 + \frac{6}{25}t, z = -\frac{4}{3} - t$
 Plano: $6y - 25z - 32 = 0$



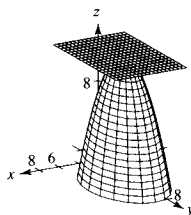
- d) En $(1, 1, 1)$ el plano tangente es paralelo al plano xy , lo cual implica que la superficie es una superficie de nivel. En $(-1, 2, -4/5)$ la función no cambia en la dirección x .

33. a) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$, no ortogonales
 35. a) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-3}$ b) $\frac{16}{25}$, no ortogonales
 37. a) $\frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}, x = 2$ b) 0, ortogonales

39. a) $x = 1 + t$
 $y = 2 - 2t$
 $z = 4$
 $\theta \approx 48,2^\circ$



41. $86,0^\circ$ 43. $77,4^\circ$
 45. $(0, 3, 12)$



La función tiene un máximo.

47. $x = 4e^{-4kt}, y = 3e^{-2kt}, z = 10e^{-8kt}$
 53. a) $P_1(x, y) = 1 + x - y$

b) $P_2(x, y) = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$

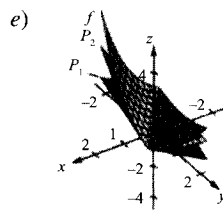
c) Si $x = 0, P_2(0, y) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2$

Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^{-y} . Si $y = 0, P_2(0, y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^x .

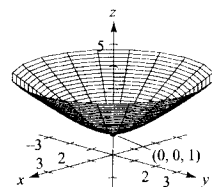
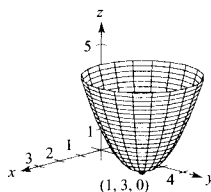
d)

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0	1	1	1
0	0,1	0,9048	0,9000	0,9050
0,2	0,1	1,1052	1,1000	1,1050
0,2	0,5	0,7408	0,7000	0,7450
1	0,5	1,6487	1,5000	1,6250

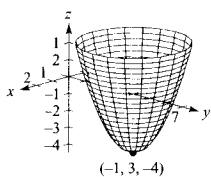


Sección 12.8 (página 1183)

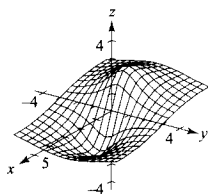
1. Mínimo relativo: $(1, 3, 0)$ 3. Mínimo relativo: $(0, 0, 1)$



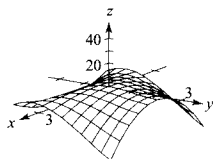
5. Mínimo relativo: $(-1, 3, -4)$



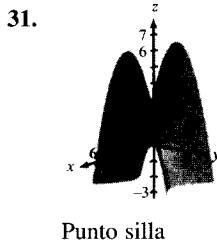
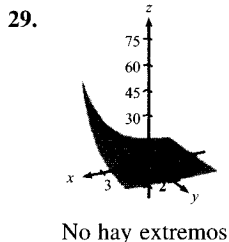
7. Mínimo relativo: $(-1, 1, -4)$
 9. Máximo relativo: $(8, 16, 74)$
 11. Mínimo relativo: $(1, 2, -1)$
 13. Punto silla: $(1, -2, -1)$ 15. Punto silla: $(0, 0, 0)$
 17. Punto silla: $(0, 0, 0)$
 Mínimo relativo: $(1, 1, -1)$
 19. No hay números críticos.
 21. Máximo relativo: $(-1, 0, 2)$
 Mínimo relativo: $(1, 0, -2)$



23. Máximo relativo: $(0, 0, 1)$
 Punto silla: $(0, 2, -3)$
 $(\pm\sqrt{3}, -1, -3)$

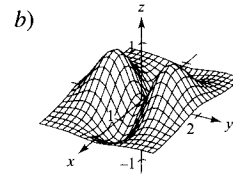
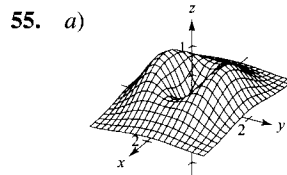


25. Información insuficiente 27. Punto silla



33. $-4 < f_{xy}(3, 7) < 4$
 35. Máximo absoluto: $(0, 1, 10)$
 Mínimo absoluto: $(1, 2, 5)$
 37. Máximo absoluto: $(\pm 2, 4, 28)$
 Mínimo absoluto: $(0, 1, -2)$
 39. Máximo absoluto: $(2, 1, 6), (-2, -1, 6)$
 Mínimo absoluto: $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4})$

41. Máximo absoluto: $(2, 2, 16), (-2, -2, 16)$
 Mínimo absoluto: $(x, -x, 0), |x| \leq 2$
 43. Máximo absoluto: $(1, 1, 1)$
 Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$
 45. Punto silla: $(0, 0, 0)$
 El criterio no decide
 47. Mínimo absoluto: $(1, a, 0), (b, -4, 0)$
 El criterio no decide
 49. Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$
 El criterio no decide
 51. Mínimo relativo: $(0, 3, -1)$
 53. El punto A es un punto silla.



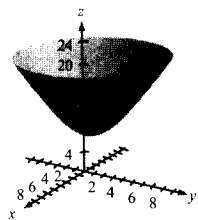
- Mínimo: $(0, 0, 0)$ Mínimo: $(\pm 1, 0, -e^{-1})$
 Máximo: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$ Máximo: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
 Punto silla: $(\pm 1, 0, e^{-1})$ Punto silla: $(0, 0, 0)$

- c) $\alpha > 0$ $\alpha < 0$
 Mínimo: $(0, 0, 0)$ Mínimo: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$
 Máximo: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$ Máximo: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
 Punto silla: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$ Punto silla: $(0, 0, 0)$
 57. Falso: considerar $f(x, y) = |1 - x - y|$ en el punto $(0, 0, 1)$.
 58. Verdadero 59. Falso: tomar $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$
 60. Verdadero

Sección 12.9 (página 1191)

1. $\frac{6\sqrt{14}}{7}$ 3. 6 5. 10, 10, 10
 7. 10, 10, 10 9. $36 \times 18 \times 18$ pulgadas
 15. $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ km
 $y = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6} \approx 1,284$ km
 17. Cada arista de $w/3$ pulgadas gira 60° desde la horizontal hacia arriba.

19. a) $S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$



La superficie tiene un mínimo

b) $S_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}} + \frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}}$

$S_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y-2}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}} + \frac{y-2}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}}$

c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{j}$
 $\theta \approx 186,0^\circ$

d) $(x_2, y_2) \approx (0,05, 0,90)$

e) $(x_4, y_4) \approx (0,06, 0,45)$

f) $-\nabla S(x, y)$ da las direcciones de máximo ritmo de decrecimiento de S . Usar $\nabla S(x, y)$ para detectar un máximo.

21. $x_1 = 275, x_2 = 110$

23. $x_1 = 3, x_2 = 6$

25. a) $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$

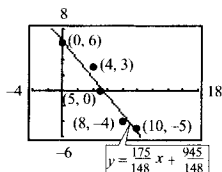
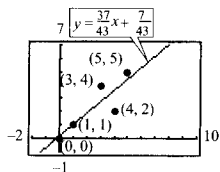
b) $\frac{1}{6}$

27. a) $y = -2x + 4$

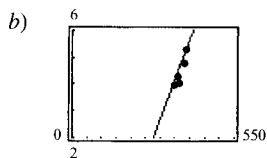
b) 2

29. $y = \frac{37}{43}x + \frac{7}{43}$

31. $y = -\frac{175}{148}x + \frac{945}{148}$



33. a) $y = 0,03x - 6,29$



c) \$0,03

35. $y = 14x + 19$

41,4 bushels por acre

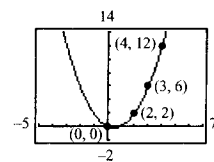
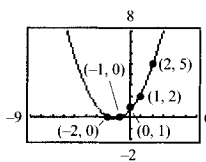
37. $a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$

$a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

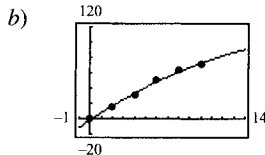
$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i$

39. $y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{26}{35}$

41. $y = x^2 - x$

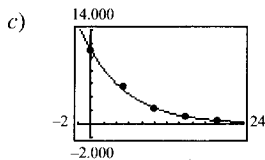


43. a) $y = -0,22x^2 + 9,66x - 1,79$

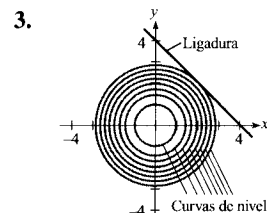
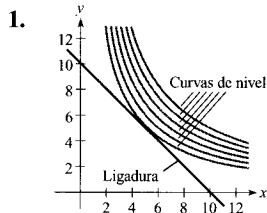


45. a) $\ln P = -0,1499h + 9,3018$

b) $P = 10.957,7e^{-0,1499h}$



Sección 12.10 (página 1201)



$f(5, 5) = 25$

$f(2, 2) = 8$

5. $f(2, 4) = -12$

7. $f(25, 50) = 2.600$

9. $f(1, 1) = 2$

11. $f(2, 2) = e^4$

13. $f(2, 2, 2) = 12$ 15. $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
 17. $f(8, 16, 8) = 1.024$ 19. $f(3, \frac{3}{2}, 1) = 6$

21. Máximos: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$
 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Mínimos: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

23. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 25. $\sqrt{3}$

27. $x = \frac{10 + 2\sqrt{265}}{15}$

$y = \frac{5 + \sqrt{265}}{15}$

$z = \frac{-1 + \sqrt{265}}{3}$

29. $36 \times 18 \times 18$ pulgadas

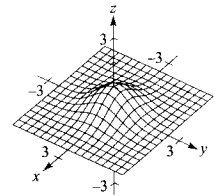
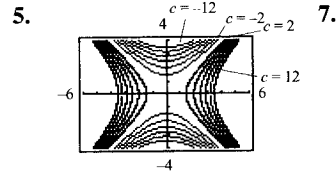
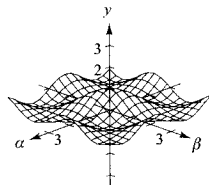
31. $\sqrt[3]{360} \times \sqrt[3]{360} \times \frac{4}{3} \sqrt[3]{360}$ pies

33. $\frac{2\sqrt{3}a}{3} \times \frac{2\sqrt{3}b}{3} \times \frac{2\sqrt{3}c}{3}$ 37. $\frac{2}{3}$

39. $P\left(\frac{3.125}{6}, \frac{6.250}{3}\right) = 147.314$

41. $x = 50\sqrt{2}$
 $y = 200\sqrt{2}$
 coste = \$13.576,45

43. a) $g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$ b)



9. Continua excepto en (0, 0).
 Límite 1/2

11. Continua excepto en (0, 0)
 El límite no existe

13. $f_x(x, y) = e^x \cos y$ 15. $f_x(x, y) = e^y + ye^x$
 $f_y(x, y) = -e^x \sin y$ $f_y(x, y) = xe^y + e^x$

17. $f_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ 19. $f_x(x, y, z) = \frac{-yz}{x^2 + y^2}$
 $f_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ $f_y(x, y, z) = \frac{xz}{x^2 + y^2}$
 $f_z(x, y, z) = \arctg \frac{y}{x}$

21. $u_x(x, t) = cne^{-nt} \cos nx$
 $u_t(x, t) = -cn^2e^{-nt} \sin nx$

23. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy - z}{x + 2y + 2z}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 2z}{x + 2y + 2z}$

25. $f_{xx}(x, y) = 6$
 $f_{yy}(x, y) = 12y$
 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -1$

27. $f_{xx}(x, y) = -y \cos x$
 $f_{yy}(x, y) = -x \sin y$
 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \cos y - \sin x$

33. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2r$
 $\frac{\partial u}{\partial t} = 2t$

35. 0 37. $\frac{2}{3}$ 39. $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle, \frac{1}{2}$ 41. $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle, 1$

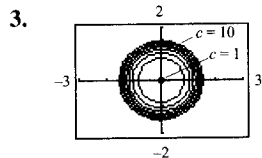
43. $4x + 4y - z = 8$
 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-1}$

45. Plano tangente: $z = 4$
 Recta normal: $x = 2, y = -3, z = 4 + t$

47. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, z = 3$

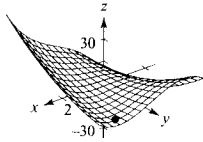
Ejercicios de repaso del Capítulo 12 (página 1204)

1. No es una función

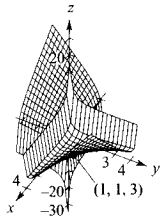


49. Mínimo relativo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{16}\right)$

Punto silla: (0, 0, 0)

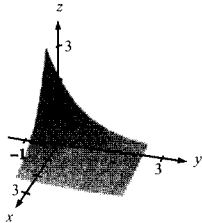


51. Mínimo relativo: (1, 1, 3)



53. Las curvas de nivel son hipérbolas. El punto crítico (0, 0) puede ser un punto silla o un extremo.

55.



57. $\left(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\cos \frac{y}{x}\right) dy$

59. 0,6538 cm, 5,03 %

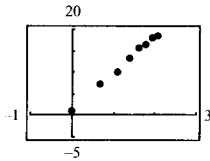
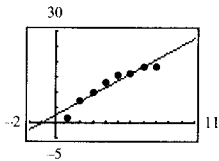
61. π pulgadas cúbicas

63. $x_1 = 94, x_2 = 157$

65. $f(49,4, 253) = 13.189,8$

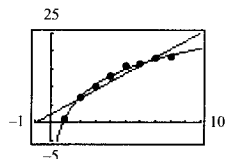
67. a) $y = 2,29t + 2,34$

b)



Más lineal

c) $y = 1,54 + 8,37 \ln t$



El modelo logarítmico produce un ajuste mejor.

69. Máximo: $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

70. Verdadero

71. Falso: $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal

72. Verdadero

CAPÍTULO 13

Sección 13.1 (página 1217)

1. $\frac{3x^2}{2}$

3. $y \ln(2y)$

5. $\frac{4x^2 - x^4}{2}$

7. $\frac{y}{2} [(\ln y)^2 - y^2]$

9. $x^2(1 - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2})$

11. 3

13. $\frac{2^0}{3}$

15. $\frac{2}{3}$

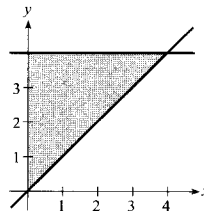
17. 4

19. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{8}$

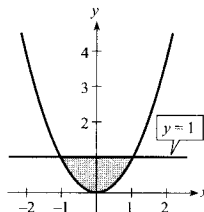
21. $\frac{1}{2}$

23. Diverge

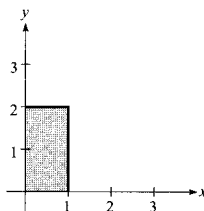
25. $\int_0^4 \int_0^y f(x, y) dx dy = \int_0^4 \int_x^4 f(x, y) dy dx$



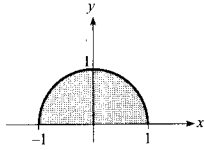
27. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$



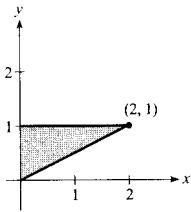
29. $\int_0^1 \int_0^2 dy dx = \int_0^2 \int_0^1 dx dy = 2$



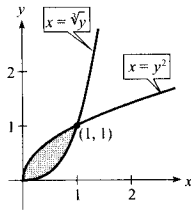
31. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = \frac{\pi}{2}$



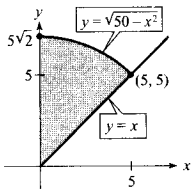
33. $\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy dx = \int_0^1 \int_0^{2y} dx dy = 1$



35. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy dx = \frac{5}{12}$

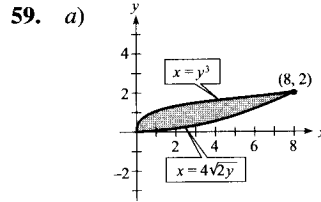


37. 24 39. $\frac{16}{3}$ 41. $\frac{9}{2}$
 43. $\frac{8}{3}$ 45. 5 47. πab
 49. La región común de integración es el sector circular de la figura.



Valor de las integrales: $\frac{15.625\pi}{24}$

51. $\frac{29}{9}$ 53. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \approx 0,230$
 55. $\frac{1.664}{105}$ 57. $(\ln 5)^2$



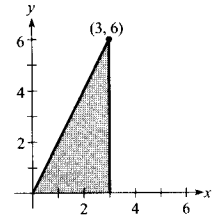
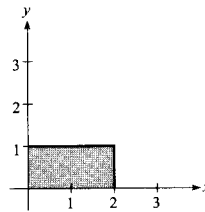
b) $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2}y} (x^2y - xy^2) dx dy = \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} (x^2y - xy^2) dy dx$

c) $\frac{67.520}{693}$

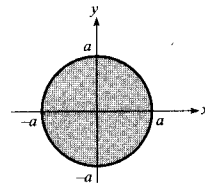
61. 20,5648
 63. Integración de una función de varias variables. Integrar respecto de una de las variables mientras se mantiene la otra constante.
 65. Verdadero 66. Falso: tomar $f(x, y) = x$

Sección 13.2 (página 1227)

1. 24 (la aproximación es exacta)
 3. Aproximación: 52; exacto: 160/3
 5. 8 7. 36



9. 0



11. $\int_0^3 \int_0^5 xy dy dx = \frac{225}{4}$
 $\int_0^5 \int_0^3 xy dx dy = \frac{225}{4}$

13. $\int_0^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx = \ln \frac{5}{2}$
 $\int_0^2 \int_{y/2}^y \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy + \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = \ln \frac{5}{2}$

15. $\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x dx dy = 25$
 $\int_0^4 \int_0^{3x/4} x dy dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x dy dx = 25$

17. 4 19. 8 21. 12

23. $\frac{3}{8}$ 25. 1 27. 8π

29. $\int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \frac{1}{8}$ 31. $\int_0^2 \int_0^4 x^2 dy dx = \frac{32}{3}$

33. $2 \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy dx = \frac{2}{3}$

35. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y) dy dx = \frac{16}{3}$

37. 8π 39. 8π 41. 1,2315

45. $1 - e^{-1/4} \approx 0,221$ 47. 9 49. 2 51. $\frac{8}{3}$

53. 25.645,24 55. kB 57. $\frac{1}{3}$ 59. $\frac{7}{27}$

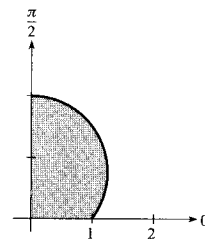
61. 2.500 m^3 63. a) 1,784 b) 1,788

65. a) 11,057 b) 11,041 69. a

70. Falso: $V = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$

71. Verdadero 73. $\ln 2$

5. $\frac{9}{8} + \frac{3\pi^2}{32}$



7. 9π 9. $\frac{3\pi}{2}$ 11. π 13. $\frac{a^3}{3}$

15. $\frac{243\pi}{10}$ 17. $\frac{2}{3}$ 19. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 dr d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

21. $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta$

23. $\int_0^{\pi/4} \int_1^2 r\theta dr d\theta$ 25. $\frac{1}{8}$ 27. $\frac{250\pi}{3}$

29. $\frac{64}{9} (3\pi - 4)$ 31. $2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ 33. 1,2858

35. Insertar un factor r . Sector circular

37. 56,051 39. c

41. Falso: considerar $f(r, \theta) = r - 1$ y como R el sector dado por $0 \leq r \leq 6$ y $0 \leq \theta \leq \pi$

42. Verdadero 43. a) 2π b) $\sqrt{2\pi}$ 45. 486.788

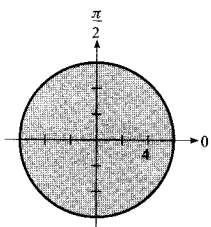
47. a) $\int_2^4 \int_{y/\sqrt{3}}^y f dx dy$

b) $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \int_2^{\sqrt{3x}} f dy dx + \int_2^{4\sqrt{3}} \int_x^{\sqrt{3x}} f dy dx + \int_{4\sqrt{3}}^4 \int_x^4 f dy dx$

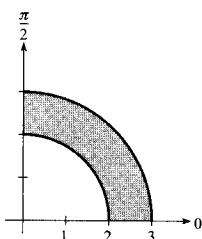
c) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_2^{4 \operatorname{cosec} \theta} f r dr d\theta$

Sección 13.3 (página 1237)

1. 0



3. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$



Sección 13.4 (página 1247)

1. a) $m = kab, \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ b) $m = \frac{kab^2}{2}, \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{3}\right)$

c) $m = \frac{ka^2b}{2}, \left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{2}\right)$

3. a) $m = \frac{kbh}{2}, \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right)$ b) $m = \frac{kh^2b}{6}, \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$

c) $m = \frac{khb^2}{4}, \left(\frac{7b}{12}, \frac{h}{3}\right)$

5. a) $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{b}{2}\right)$ b) $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{2b}{3}\right)$
 c) $\left(\frac{2(a^2 + 15a + 75)}{3(a + 10)}, \frac{b}{2}\right)$
7. a) $m = \frac{k\pi a^2}{2}, \left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$
 b) $m = \frac{ka^4}{24} (16 - 3\pi), \left(0, \frac{a}{5} \left[\frac{15\pi - 32}{16 - 3\pi}\right]\right)$
9. $m = \frac{32k}{3}, \left(3, \frac{8}{7}\right)$ 11. $m = \frac{k\pi}{2}, \left(0, \frac{\pi + 2}{4\pi}\right)$
13. $m = \frac{8.192k}{15}, \left(\frac{64}{7}, 0\right)$ 15. $m = \frac{kL}{4}, \left(\frac{L}{2}, \frac{16}{9\pi}\right)$
17. $m = \frac{k\pi a^2}{8}, \left(\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}, \frac{4a(2 - \sqrt{2})}{3\pi}\right)$
19. $m = \frac{k}{4} (1 - e^{-4}), \left(\frac{e^4 - 5}{2(e^4 - 1)}, \frac{4}{9} \left[\frac{e^6 - 1}{e^6 - e^2}\right]\right)$
21. $m = \frac{k\pi}{3}, (1, 12, 0)$ 23. \bar{y} crece
25. \bar{x} e \bar{y} crecerán ambos
27. $\bar{x} = \frac{\sqrt{3}b}{3}, \bar{y} = \frac{\sqrt{3}h}{3}$ 29. $\bar{x} = \frac{a}{2}, \bar{y} = \frac{a}{2}$
31. $\bar{x} = \frac{a}{2}, \bar{y} = \frac{a}{2}$
33. $I_x = \frac{kab^4}{4}$ 35. $I_x = \frac{32k}{3}$
 $I_y = \frac{kb^2a^3}{6}$ $I_y = \frac{16k}{3}$
 $I_0 = \frac{3kab^4 + 2ka^3b^2}{12}$ $I_0 = 16k$
 $\bar{x} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ $\bar{x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 $\bar{y} = \frac{\sqrt{2}b}{2}$ $\bar{y} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
37. $I_x = 16k$ 39. $I_x = \frac{3k}{56}$
 $I_y = \frac{512k}{5}$ $I_y = \frac{k}{18}$
 $I_0 = \frac{592k}{5}$ $I_0 = \frac{55k}{504}$
 $\bar{x} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$ $\bar{x} = \frac{\sqrt{30}}{9}$
 $\bar{y} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\bar{y} = \frac{\sqrt{70}}{14}$

41. $2k \int_{-b}^b \int_0^{\sqrt{b^2 - x^2}} (x - a)^2 dy dx = \frac{k\pi b^2}{4} (b^2 + 4a^2)$
43. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} kx(x - 6)^2 dy dx = \frac{42.752k}{315}$
45. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} k(a - y)(y - a)^2 dy dx = ka^5 \left(\frac{7\pi}{16} - \frac{17}{15}\right)$
49. $\frac{a(3L - 2a)}{3(2L - a)}$ 51. $-\frac{a^2}{4L}$

Sección 13.5 (página 1255)

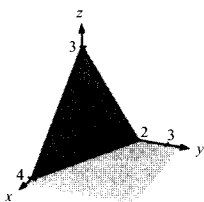
1. 6 3. 12π 5. $\frac{3}{4} [6\sqrt{37} + \ln(\sqrt{37} + 6)]$
7. $\frac{4}{27} (31\sqrt{31} - 8)$ 9. $\sqrt{2} - 1$ 11. $\sqrt{2}\pi$
13. $2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ 15. $48\sqrt{14}$ 17. 20π
19. $\int_1^0 \int_0^x \sqrt{5 + 4x^2} dy dx = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12}$
21. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dy dx =$
 $= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$
23. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dy dx = 1,8616$
25. e 27. 2,0035
29. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9(x^2 - y)^2 + 9(y^2 - x)^2} dy dx$
31. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + e^{-2x}} dy dx$
33. $\int_0^4 \int_0^{10} \sqrt{1 + e^{2xy}(x^2 + y^2)} dy dx$ 35. 16
37. a) 30.415,74 pies cúbicos
 b) 2.081,53 pies cuadrados
39. z_2, z_1, z_4, z_3 ; cuanto mayor es el ángulo entre ese plano y el plano xy , mayor es el área.
41. Falso: el área de la superficie es la misma para toda traslación vertical de una superficie.

Sección 13.6 (página 1267)

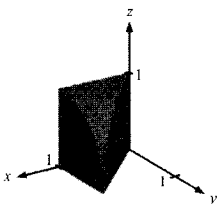
1. 18 3. $\frac{1}{10}$ 5. $\frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 7. $\frac{729}{4}$

9. $\frac{128}{15}$ 11. 2,44167

13. $\int_0^3 \int_0^{(12-4z)/3} \int_0^{(12-4z-3x)/6} dy \, dx \, dz$



15. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dy \, dx$



17. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^3 xyz \, dz \, dy \, dx, \int_0^1 \int_y^1 \int_0^3 xyz \, dz \, dx \, dy,$
 $\int_0^1 \int_0^3 \int_0^x xyz \, dy \, dz \, dx, \int_0^3 \int_0^1 \int_0^x xyz \, dy \, dx \, dz,$
 $\int_0^3 \int_0^1 \int_y^1 xyz \, dx \, dy \, dz, \int_0^1 \int_0^3 \int_y^1 xyz \, dx \, dz \, dy$

19. $\frac{256}{15}$ 21. $\frac{4\pi a^3}{3}$ 23. $\frac{256}{15}$

25. $m = 8k$ 27. $m = \frac{128k}{3}$
 $\bar{x} = \frac{3}{2}$ $\bar{z} = 1$

29. $m = k \int_0^b \int_0^b \int_0^b xy \, dz \, dy \, dx$
 $M_{yz} = k \int_0^b \int_0^b \int_0^b x^2 y \, dz \, dy \, dx$
 $M_{xz} = k \int_0^b \int_0^b \int_0^b xy^2 \, dz \, dy \, dx$
 $M_{xy} = k \int_0^b \int_0^b \int_0^b xyz \, dz \, dy \, dx$

31. \bar{x} será mayor que 2; \bar{y} y \bar{z} no cambian.

33. \bar{x} y \bar{z} no cambian; \bar{y} será mayor que 0.

35. $\left(0, 0, \frac{3h}{4}\right)$ 37. $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$ 39. $\left(5, 6, \frac{5}{4}\right)$

41. a) $I_x = \frac{2ka^5}{3}$ b) $I_x = \frac{ka^8}{8}$
 $I_y = \frac{2ka^5}{3}$ $I_y = \frac{ka^8}{8}$
 $I_z = \frac{2ka^5}{3}$ $I_z = \frac{ka^8}{8}$

43. a) $I_x = 256k$ b) $I_x = \frac{2.048k}{3}$
 $I_y = \frac{512k}{3}$ $I_y = \frac{1.024k}{3}$
 $I_z = 256k$ $I_z = \frac{1.048k}{3}$

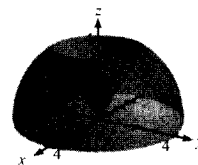
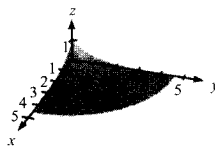
47. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$

49. Crece

Sección 13.7 (página 1275)

1. 8 3. $\frac{52}{45}$ 5. $\frac{\pi}{8}$ 7. $\pi(e^4 + 3)$

9. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-9})$ 11. $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$



13. Cilíndricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = 0$

Esféricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctg(1/2)} \int_0^{4 \sec \phi} \rho^3 \sin^3 \phi \cos \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta +$
 $+ \int_0^{2\pi} \int_{\arctg(1/2)}^{\pi/2} \int_0^{\text{ctg } \phi \text{ cosec } \phi} \rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 0$

15. Cilíndricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_a^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = 0$

Esféricas: $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_{a \sec \phi}^{2a \cos \phi} \rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi = 0$

17. $\frac{\pi r_0^2 h}{3}$ 19. $(0, 0, \frac{h}{5})$ 25. $\frac{2a^3}{9} (3\pi - 4)$

27. $\frac{2a^3}{9} (3\pi - 4)$ 29. $16\pi^2$ 31. $k\pi a^4$

33. $(0, 0, \frac{3r}{8})$ 35. $\frac{k\pi}{192}$

37. a) r constante: cilindro circular recto
 θ constante: plano
 z constante: plano

b) ρ constante: esfera
 θ constante: plano
 ϕ constante: plano

39. $\frac{1}{2} \pi^2 a^4$

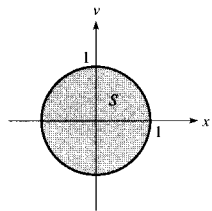
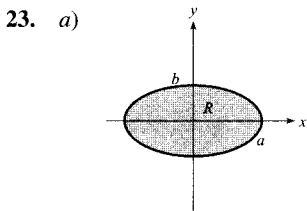
Sección 13.8 (página 1283)

1. $-\frac{1}{2}$ 3. $1 + 2v$ 5. 1 7. $-e^{2u}$

9.  11. $\frac{3}{8}$ 13. 36

15. $(e^{-1/2} - e^{-2}) \ln 8 \approx 0,9798$

17. $12(e^4 - 1)$ 19. $\frac{100}{9}$ 21. $\frac{2}{5} a^{5/2}$



b) ab c) πab

25. $u^2 v$ 27. $-\rho^2 \sin \phi$

Ejercicios de repaso del Capítulo 13 (página 1284)

1. $x - x^3 + x^3 \ln x^2$ 3. $\frac{29}{6}$ 5. 36

7. $\frac{h^2}{6} [\ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}]$ 9. $\frac{324\pi}{5}$

11. $\frac{abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$ 13. $\frac{27}{5}$ 15. $\frac{8\pi}{15}$

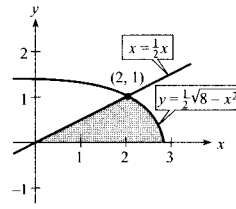
17. $\int_0^3 \int_0^{(3-x)/3} dy dx = \int_0^1 \int_0^{3-3y} dx dy = \frac{3}{2}$

19. $\int_{-5}^3 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy dx = \int_{-5}^{-4} \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx dy +$
 $+ \int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx dy + \int_4^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx dy =$
 $= \frac{25\pi}{2} + 12 + 25 \arcsin \frac{3}{5} \approx 67,36$

21. $4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{1-4y^2})/2}} dx dy = \frac{4}{3}$

23. $\int_2^5 \int_{x-3}^{\sqrt{x-1}} dy dx + 2 \int_1^2 \int_0^{\sqrt{x-1}} dy dx =$
 $= \int_{-1}^2 \int_{y^2+1}^{y+3} dx dy = \frac{9}{2}$

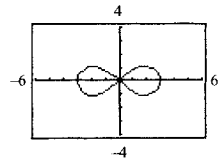
25. Integración sobre la región común R que muestra la figura adjunta.



27. $\frac{3.296}{15}$ 29. $\frac{\pi h^3}{3}$ 31. $\frac{32}{3} (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$

33. c 35. $k = 1, 0,070$

37. a) $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$



b) 9 c) $3(3\pi - 16\sqrt{2} + 20) \approx 20,392$

39. a) $m = \frac{k}{4}, (\frac{32}{45}, \frac{64}{55})$

b) $m = \frac{17k}{30}, (\frac{936}{1.309}, \frac{784}{663})$

41. $\frac{\pi}{6} (65\sqrt{65} - 1)$ 43. $\frac{1}{6} (37\sqrt{37} - 1)$

45. $(0, 0, \frac{1}{4})$ 47. $(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8})$ 49. $\frac{833k\pi}{3}$

51. a) $\frac{1}{3} \pi h^2(3a - h)$ b) $(0, 0, \frac{3(2a - h)^2}{4(3a - h)})$

c) $(0, 0, \frac{3}{8} a)$ d) a

e) $\frac{\pi}{30} h^3(20a^2 - 15ah + 3h^2)$ f) $\frac{4}{15} \pi a^5$

53. Volumen de un toro generado al hacer girar, en torno al eje z , un círculo de radio 3 centrado en $(0, 3, 0)$.

55. Verdadero

56. Falso: $\int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy \neq \int_1^2 \int_1^2 x \, dx \, dy$

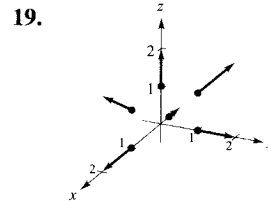
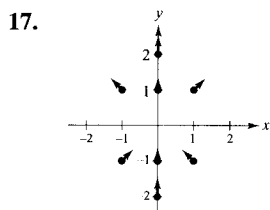
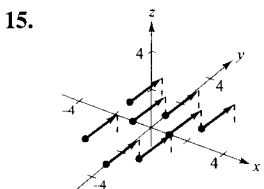
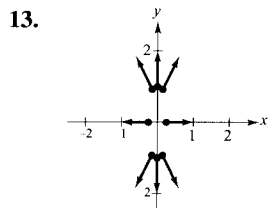
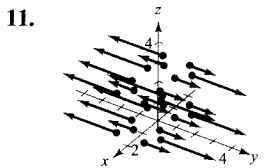
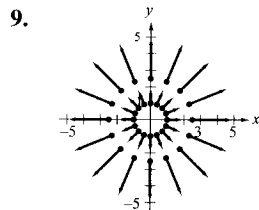
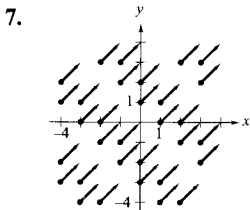
57. Verdadero

58. Falso: $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy < \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \, dy = \frac{\pi}{4}$

CAPÍTULO 14

Sección 14.1 (página 1300)

1. c 2. d 3. b 4. e 5. a 6. f



21. $(10x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 20y)\mathbf{j}$ 23. $-2xye^{x^2}\mathbf{i} - e^{x^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

25. $\left[\frac{xy}{x+y} + y \ln(x+y) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{xy}{x+y} + x \ln(x+y) \right] \mathbf{j}$

27. Conservativo: $f(x, y) = x^2y + K$

29. Conservativo: $f(x, y) = e^{xy} + K$

31. Conservativo: $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + K$

33. No conservativo 35. $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 37. $-2\mathbf{k}$

39. $\frac{2x\mathbf{k}}{x^2 + y^2}$ 41. $\cos(y-z)\mathbf{i} + \cos(z-x)\mathbf{j} + \cos(x-y)\mathbf{k}$

43. No conservativo

45. Conservativo: $f(x, y, z) = xye^z + K$

47. Conservativo: $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + z^2 - z + K$

49. $6x\mathbf{j} - 3y\mathbf{k}$ 51. $z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 53. $12x - 2xy$

55. $\cos x - \sin y + 2z$ 57. 4 59. 0

61. $2z + 3x$ 63. 0

Sección 14.2 (página 1313)

1. $3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

3. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \leq t \leq 3 \\ 3\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j}, & 3 \leq t \leq 6 \\ (9-t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, & 6 \leq t \leq 9 \\ (12-t)\mathbf{j}, & 9 \leq t \leq 12 \end{cases}$

5. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

7. 10 9. $\frac{\sqrt{65}\pi}{6} (3 + 16\pi^2)$ 11. 9 13. $\frac{\pi}{2}$

15. $\frac{19\sqrt{2}}{6}$ 17. $\frac{19}{6} (1 + \sqrt{2})$

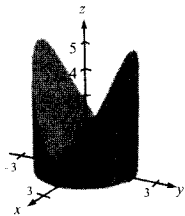
19. $\frac{2\sqrt{13}\pi}{3} (27 + 64\pi^2) \approx 4.973,8$

21. $\frac{3^5}{5}$ 23. 2 25. $-\frac{17}{15}$ 27. $249,49$

29. -66 31. 0 33. $-10\pi^2$ 35. 1.500 libras/pie

41. Camino parabólico: mínimo para $c = \frac{1}{4}$; $W = 119,5$
Camino recto: $W = 120$
43. 1.010 45. $\frac{190}{3}$ 47. 25
49. $\frac{6^3}{3}$ 51. $\frac{3 \cdot 16}{3}$ 53. $5h$ 55. $\frac{1}{2}$
57. $\frac{h}{4} [2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})]$ 59. $\frac{1}{120} (25\sqrt{5} - 11)$
61. a) $12\pi \approx 37,70 \text{ cm}^2$ b) $\frac{12\pi}{5} \approx 7,54 \text{ cm}^3$

c)



63. z_3, z_1, z_2, z_4 : cuanto mayor sea la altura de la superficie sobre la curva $y = \sqrt{x}$, mayor será el área lateral de la superficie.

65. b 67. Falso: $\int_C xy \, ds = \sqrt{2} \int_0^1 t^2 \, dt$

68. Falso: la orientación de C no afecta a $\int_C f(x, y) \, ds$.

69. Falso: las orientaciones son distintas.

70. Falso: véase el Ejercicio 32.

Sección 14.3 (página 1324)

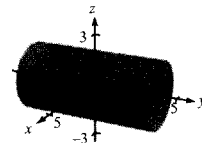
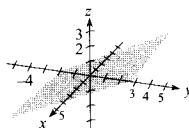
1. $\frac{11}{5}$ 3. $-\ln(2 + \sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \ln(7 + 4\sqrt{3})$
5. Conservativo 7. No conservativo 9. Conservativo
11. a) 1 b) 1 13. a) 0 b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$
15. a) 64 b) 0 c) 0 d) 0
17. a) $\frac{64}{3}$ b) $\frac{64}{3}$ 19. a) 32 b) 32
21. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{17}{6}$ 23. a) 0 b) 0 25. 24
27. -1 29. 0 31. a) 2 b) 2 c) 2
33. 11 35. 30.366 37. 0
39. Creciente: 10 unidades por minuto.
41. No, el campo de fuerzas es conservativo.
43. Falso: sería cierto si F fuese conservativo.
44. Verdadero 45. Verdadero
46. Falso: el requisito es $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
49. No, el consumo de combustible depende de la velocidad del viento y de su dirección.

Sección 14.4 (página 1335)

1. 0 3. $\frac{32}{15}$ 5. 19,99 7. $\frac{4}{3}$ 9. 56
11. $\frac{32}{3}$ 13. 0 15. 0 17. $\frac{1}{12}$ 19. 8π
21. 4π 23. $\frac{225}{2}$ 25. πa^2 27. $\frac{32}{3}$ 31. $(0, \frac{8}{5})$
33. $(\frac{8}{15}, \frac{8}{21})$ 35. $\frac{3\pi a^2}{2}$ 37. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
39. $I = -2\pi$ cuando C es un círculo que encierra al origen.
41. $\frac{19}{2}$
43. a) $n = 1$: 0 b) $n = 2$: $-\frac{4}{3} a^3$ c) 0
- $n = 3$: 0 $n = 4$: $-\frac{16}{15} a^5$
- $n = 5$: 0 $n = 6$: $-\frac{32}{35} a^7$
- $n = 7$: 0 $n = 8$: $-\frac{256}{315} a^9$

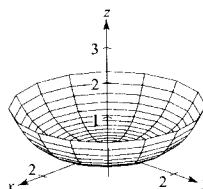
Sección 14.5 (página 1346)

1. c 2. d 3. b 4. a
5. $y - 2z = 0$ 7. $x^2 + z^2 = 4$

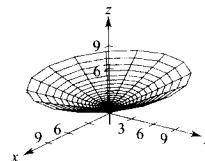


9. El paraboloides se refleja (y se invierte) en el plano xy .
11. La altura del paraboloides crece de 4 a 9.

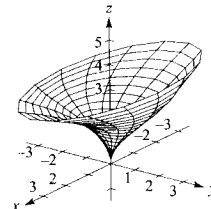
13.



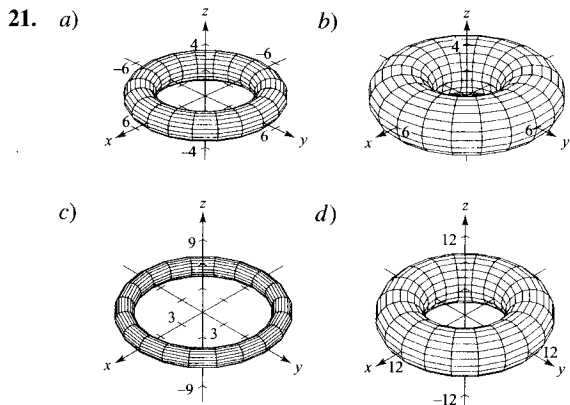
15.



17.



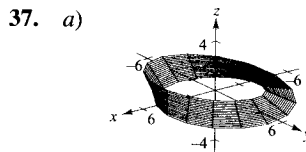
19. a) $(-10, 10, 0)$
b) $(10, 10, 10)$
c) $(0, 10, 0)$
d) $(10, 0, 0)$



17. $\frac{32\pi}{3}$ 19. 486π 21. $\frac{4}{-3}$ 23. $\frac{243\pi}{2}$

25. 20π 27. $\frac{5}{2}$ 29. $\frac{364}{3}$

33. $2\pi a^3 h$ 35. $64\pi\rho$



El radio del círculo generador que gira en torno al eje z es b y su centro dista a unidades del eje de revolución.

23. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

25. $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u\mathbf{i} + 4 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(u, v) = v \cos u\mathbf{i} + v \sin u\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, 0 \leq v \leq 3$

31. $x = u, y = \frac{u}{2} \cos v, z = \frac{u}{2} \sin v, 0 \leq u \leq 6, 0 \leq v \leq 2\pi$

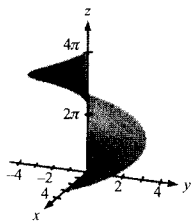
33. $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = u, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

35. $x - y - 2z = 0$ 37. $4y - 3z = 12$ 39. $2\sqrt{2}$

41. $2\pi ab$ 43. $\pi ab^2 \sqrt{a^2 + 1}$

45. $\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) \approx 36,177$ 47. 400π

49. $2\pi \left[\frac{3}{2} \sqrt{13} + 2 \ln(3 + \sqrt{13}) - 2 \ln 2 \right]$



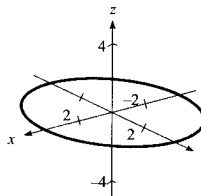
Sección 14.6 (página 1361)

1. 0 3. 10π 5. $\frac{27\sqrt{6}}{2}$ 7. $\frac{391\sqrt{17}+1}{240}$

9. -11,47 11. $6\sqrt{5}$ 13. 8 15. $\frac{19\sqrt{2}\pi}{4}$

b) Si un vector normal en un punto P de la superficie se desplaza a lo largo de la banda de Möbius una vuelta completa, acabará apuntando en dirección opuesta.

c) Círculo



e) Una banda con doble vuelta y de longitud doble que la banda de Möbius.

39. 0

Sección 14.7 (página 1370)

1. a^4 3. 18 5. $3a^4$ 7. 0 9. 32π
 11. 0 13. 2.304 15. $\frac{128\pi}{3}$ 19. 0

Sección 14.8 (página 1377)

1. $-xy\mathbf{i} - \mathbf{j} + (yz - 2)\mathbf{k}$ 3. $\left(2 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathbf{j} - 8x\mathbf{k}$

5. $z(x - 2e^{y^2+z^2})\mathbf{i} - yz\mathbf{j} - 2ye^{x^2+y^2}\mathbf{k}$
 7. 2π 9. 0 11. 1 13. 0 15. 0

17. $\frac{8}{3}$ 19. $\frac{a^5}{4}$ 21. 0

Ejercicios de repaso del Capítulo 14 (página 1378)

1.  3. $(16x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

5. No conservativo

7. Conservativo: $f(x, y) = 3x^2y^2 - x^3 + y^3 - 7y + K$

9. No conservativo

11. Conservativo: $f(x, y, z) = \frac{x}{yz} + K$

13. a) $\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z$ b) $\text{rot } \mathbf{F} = 0$

15. a) $\text{div } \mathbf{F} = -y \sin x - x \cos y + xy$
 b) $\text{rot } \mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j}$

17. a) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2xy + 2yz$
 b) $\text{rot } \mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$

19. a) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{2x + 2y}{x^2 + y^2} + 1$ b) $\text{rot } \mathbf{F} = \frac{2x - 2y}{x^2 + y^2} \mathbf{k}$

21. a) $6\sqrt{2}$ b) 128π 23. $2\pi^2(1 + 2\pi^2)$

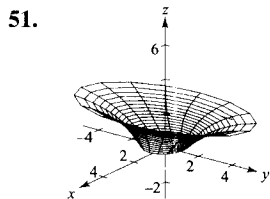
25. a) $\frac{35}{2}$ b) 18π 27. $\frac{9a^2}{5}$

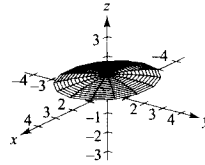
29. $\frac{\sqrt{10}}{4}(41 - \cos 8) \approx 32,528$ 31. $\frac{5}{7}$ 33. $2\pi^2$

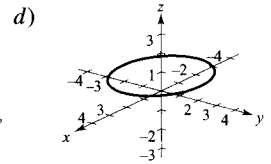
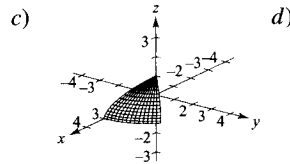
35. $\frac{64}{3}$ 37. $\frac{4}{3}$ 39. $\frac{8}{3}(3 - 4\sqrt{2}) \approx -7,085$

41. 12 43. a) 15 b) 15 c) 15

45. 4 47. 0 49. $\frac{1}{12}$



53. a)  b) 



e) 14,436

f) 4,269

55. 

57. 66

59. $\frac{2a^6}{5}$

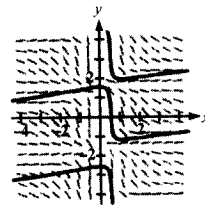
CAPÍTULO 15

Sección 15.1 (página 1390)

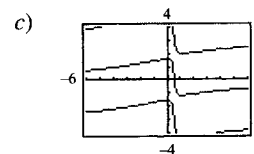
1. $x^2 - 3xy + y^2 = C$ 3. $3xy^2 + 5x^2y^2 - 2y = C$

5. No exacta 7. $\arctg \frac{x}{y} = C$ 9. No exacta

11. a) La figura muestra una de las posibles respuestas:



b) $x^2 \operatorname{tg} y + 5x = \frac{11}{4}$



13. $y \ln(x-1) + y^2 = 16$

15. $e^{3x} \sin 3y = 0$

17. Factor integrante: $\frac{1}{y^2}$

19. Factor integrante: $\frac{1}{x^2}$

$\frac{x}{y} - 6y = C$

$\frac{y}{x} + 5x = C$

21. Factor integrante: $\cos x$

$y \sin x + x \sin x + \cos x = C$

23. Factor integrante: $\frac{1}{y}$

25. Factor integrante: $\frac{1}{\sqrt{y}}$

$xy - \ln y = C$

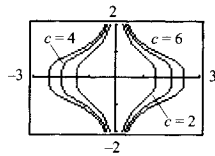
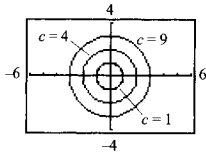
$x\sqrt{y} + \cos \sqrt{y} = C$

27. $x^4 y^3 + x^2 y^4 = C$

29. $\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y^2} + C$

33. $x^2 + y^2 = C$

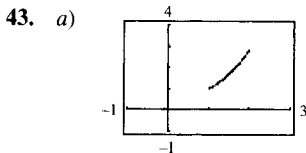
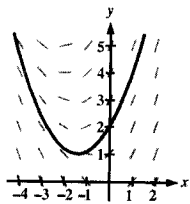
35. $2x^2 y^4 + x^2 = C$



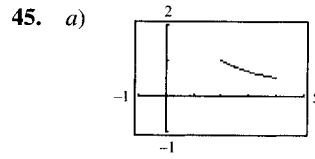
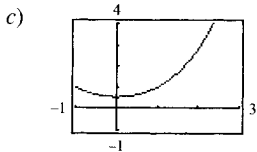
37. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$

39. $C = \frac{5(x^2 + \sqrt{x^4 - 1.000.000x})}{x}$

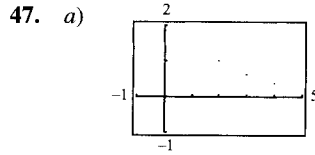
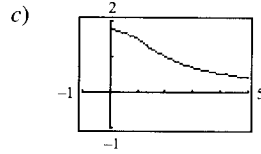
41. Δx	0,50	0,25	0,10
Estimación	3,7798	3,9875	4,1207



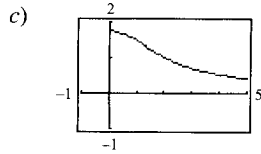
b) $3y^{2/3} - x^2 = 2$



b) $y^2(2x^2 + y^2) = 9$



b) $y^2(2x^2 + y^2) = 9$



Menos precisa

49. Falso: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$

50. Falso: $y dx + x dy = 0$ es exacta, pero $xy dx + x^2 dy = 0$ no es exacta.

51. Verdadero

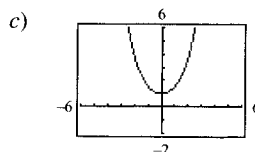
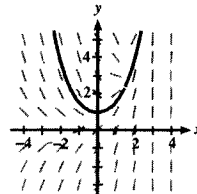
52. Verdadero

Sección 15.2 (página 1400)

1. Falso: $y' + xy = x^2$ es lineal

2. Verdadero

3. b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$



$$5. y = x^2 + 2x + \frac{C}{x} \quad 7. y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^x$$

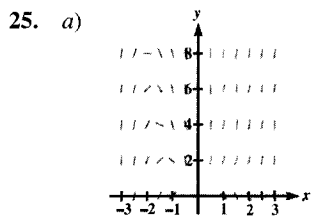
$$9. y = -\frac{1}{3}(3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + Ce^{3x}$$

$$11. y = \frac{x^3 - 3x + C}{3(x-1)} \quad 13. y = 1 + 4e^{-18x}$$

$$15. y = \sin x + (x+1) \cos x \quad 17. xy = 4$$

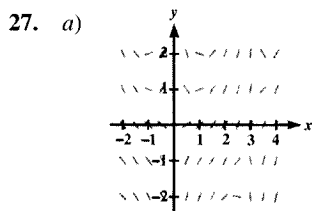
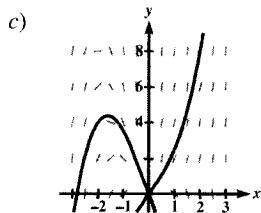
$$19. \frac{1}{y^2} = Ce^{2x^3} + \frac{1}{3} \quad 21. y = \frac{1}{Cx - x^2}$$

$$23. y^{2/3} = Ce^{2x/3} - \frac{1}{4}(4x^3 + 18x^2 + 54x + 81)$$



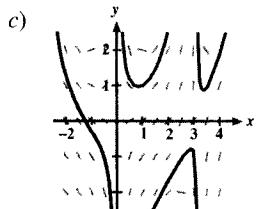
b) $(-2, 4): y = \frac{1}{2}x(x^2 - 8)$

$(2, 8): y = \frac{1}{2}x(x^2 + 4)$



b) $(1, 1): y = \cos 1 \operatorname{cosec} x - x \operatorname{ctg} x + 1$

$(3, -1): y = (3 \cos 3 - 2 \sin 3) \operatorname{cosec} x - x \operatorname{ctg} x + 1$



$$29. I = \frac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}$$

$$31. I = Ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

$$33. P = -\frac{N}{k} + \left(\frac{N}{k} + P_0\right)e^{kt}$$

35. a) \$583.098,01 b) \$3.243.606,35

$$37. a) \frac{dQ}{dt} = q - kQ$$

b) $Q = \frac{q}{k} + \left(Q_0 - \frac{q}{k}\right)e^{-kt}$ c) $\frac{q}{k}$

41. a) $Q = 25e^{-t/20}$

b) $-20 \ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx 10,2$ minutos c) 0

43. a) $t = 50$ minutos

b) $100 - \frac{25}{\sqrt{2}} \approx 82,32$ libras

45. c 46. d 47. a 48. b

49. $2e^x + e^{-2y} = C$

51. $x + xy^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2y = C$

53. $y = Ce^{-\sec x} + 1$

55. $x^2 y + \sin y = C$

57. $x^3 y^2 + x^4 y = C$

59. $y = \frac{e^x(x-1) + C}{x^2}$

61. $x^4 y^4 - 2x^2 = C$

63. $3 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - y = C$

Sección 15.3 (página 1410)

5. $y = C_1 + C_2 e^x$

7. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

9. $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-2x}$

11. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

13. $y = C_1 e^{x/4} + C_2 x e^{x/4}$

15. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

17. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

19. $y = e^x(C_1 \sin \sqrt{3}x + C_2 \cos \sqrt{3}x)$

21. $y = C_1 e^{(3+\sqrt{5})x/2} + C_2 e^{(3-\sqrt{5})x/2}$

23. $y = e^{2x/3} \left(C_1 \sin \frac{\sqrt{7}x}{3} + C_2 \cos \frac{\sqrt{7}x}{3} \right)$

25. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$

27. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

29. $y = C_1 e^x + e^x(C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x)$

31. a) $y = 2 \cos 10x$ b) $y = \frac{1}{3} \sin 10x$

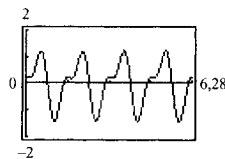
c) $y = -\cos 10x + \frac{3}{10} \sin 10x$

33. $y = \frac{1}{11}(e^{6x} + 10e^{-5x})$ 35. $y = \frac{1}{2} \sin 4x$
37. y'' e y' no son iguales para $x < 0$. $y'' > 0$ para todo x pero $y' < 0$ para $x < 0$.
39. $y = \frac{1}{2} \cos 4\sqrt{3}t$
41. $y = \frac{2}{3} \cos 4\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{24} \sin 4\sqrt{3}t$
43. $y = \frac{e^{-t/16}}{2} \left(\cos \frac{\sqrt{12.287}t}{16} + \frac{\sqrt{12.287}}{12.287} \sin \frac{\sqrt{12.287}t}{16} \right)$
45. b 46. d 47. c 48. a
51. Falso: la solución general es $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.
52. Verdadero 53. Verdadero
54. Falso: la solución $y = x^2 e^x$ exige que $m = 1$ sea raíz triple de la ecuación característica, lo cual es imposible porque la ecuación característica es de grado 2 ($m = 1$ podría ser, a lo sumo, raíz doble).
59. b) $y = \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x^2}$

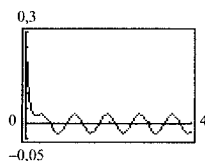
Sección 15.4 (página 1419)

5. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + \frac{3}{2}$
7. $y = \cos x + 6 \sin x + x^3 - 6x$
9. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3} e^x$
11. $y = (C_1 + C_2 x) e^{5x} + \frac{3}{8} e^x + \frac{1}{5}$
13. $y = -1 + 2e^{-x} - \cos x - \sin x$
15. $y = \left(C_1 - \frac{x}{6} \right) \cos 3x + C_2 \sin 3x$
17. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \left(C_3 + \frac{2x}{9} \right) e^{-2x}$
19. $y = \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{2} x^2 \right) e^{4x} - \frac{1}{9} (1 + 3x) e^x$
21. a) $y_p'' = 0$ y $3y_p = 12$ b) $y_p = 2$ c) $y_p = 4$
23. $y = (C_1 + \ln |\cos x|) \cos x + (C_2 + x) \sin x$
25. $y = \left(C_1 - \frac{x}{2} \right) \cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| \right) \sin 2x$
27. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{x^2 e^x}{4} (\ln x^2 - 3)$
29. $q = \frac{3}{25} (e^{-5t} + 5te^{-5t} - \cos 5t)$

31. $y = \frac{1}{4} \cos 8t - \frac{1}{2} \sin 8t + \sin 4t$



33. $y = \left(\frac{9}{32} - \frac{3}{4} t \right) e^{-8t} - \frac{1}{32} \cos 8t$



35. $y = \frac{\sqrt{5}}{4} \sin \left(8t - \arctg \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{4} \sin (8t - 0.4636)$

39. $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{2}{3} x (\ln x)^3$

Sección 15.5 (página 1424)

7. $y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^k k!} x^{2k}$
 Intervalo de convergencia: $(-\infty, \infty)$
9. $y = a_0 + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2^k (k!)(2k+1)}$
 Intervalo de convergencia: $(-\infty, \infty)$
11. $y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{128} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{24} + \frac{7x^5}{1.920} - \dots \right)$
13. Teorema de Taylor: $y = 2 + \frac{2x}{1!} - \frac{2x^2}{2!} - \frac{10x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots$
 $y\left(\frac{1}{2}\right) \approx 2,547$
 Método de Euler: $y\left(\frac{1}{2}\right) \approx 2,672$
15. a) $y = 2(\cos 3x + \sin 3x)$
 b) $y = 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$
 c)

17. $y = 1 - \frac{3x}{1!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{12x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} - \frac{120x^7}{7!} + \dots$

$y\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,253$

23. $y = a_0 + a_1x + \frac{a_0}{6}x^3 + \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{180}x^6 + \frac{a_1}{504}x^7$

Ejercicios de repaso del Capítulo 15 (página 1425)

1. Tipo: en derivadas parciales Orden: 2 3. Tipo: ordinaria Orden: 2

5. a)  b) $y = Cx$

7. b 8. d 9. a 10. c

11. $y = x \ln x^2 + 2x^{3/2} + Cx$ 13. $y = C(1-x)^2$

15. $y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$

17. $5x^2 + 8xy + 2x + \frac{5}{2}y^2 + 2y = C$

19. $xy - 2xy^3 + x^2 = C$

21. $y = e^x(1 + \operatorname{tg} x) + C \sec x$

23. $x^2 - 2xy - 10x - 3y^2 + 4y = C$

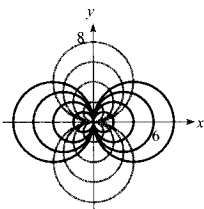
25. $y^2 = 2Cx + C^2$ 27. $y^2 = x^2 - x + \frac{3}{2} + Ce^{-2x}$

29. $\frac{y-x}{1+xy} = C$ 31. $y = \frac{bx^4}{4-a} + Cx^a$

33. $y = 5e^{2x} - e^x$ 35. $y = x \ln |x| - 2 + 12x$

37. $\ln |1+y| = \ln 3e^{-x}$ 39. $y = \frac{3(1+e^{2x^3+1})}{1-e^{2x^3+1}}$

41. Familia de círculos: $x^2 + (y-K)^2 = K^2$

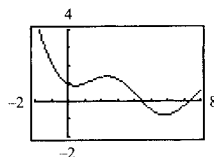


43. a) $\frac{ds}{dh} = \frac{k}{h}$ b) $s = 25 - \frac{13 \ln(h/2)}{\ln 5}, 2 \leq h \leq 15$

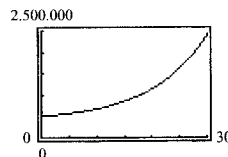
$s = k \ln h + C$

45. $N = \frac{500}{1 + 4e^{-0,2452t}}$

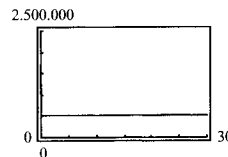
47. $y = \frac{2}{3}(\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cos} x) + \frac{9}{3}e^{-x/2}$



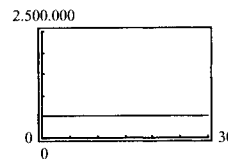
49. a) Crece



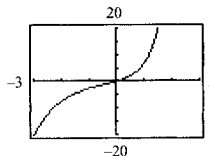
- b) Se mantiene en \$500.000



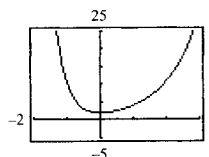
- c) Se agota en 17,9 años



51. $y = e^{2x} - e^{-x}$



53. $y = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-3x}$



55. $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x - 5x + x^3$

57. $y = (C_1 + x) \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

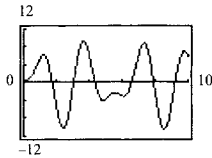
59. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{3} x^3 \right) e^x$

61. $y = \frac{11}{5} (2e^{3x} + 3e^{-2x}) - 9$

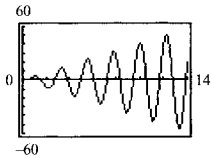
63. $y = \frac{17}{3} \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \cos x$

65. $y = \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{6}t)$

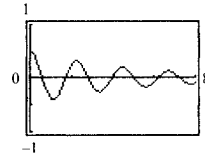
67. a) i) $y = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{12\pi}{\pi^2 - 4} \operatorname{sen} 2t + \frac{24}{4 - \pi^2} \operatorname{sen} \pi t$



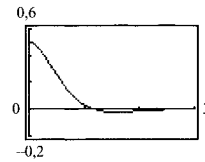
ii) $y = \frac{1}{2} [(1 - 6\sqrt{2}t) \cos(2\sqrt{2}t) + 3 \operatorname{sen}(2\sqrt{2}t)]$



iii) $y = \frac{e^{-t/5}}{398} \left[199 \cos \frac{\sqrt{199}t}{5} + \sqrt{199} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{199}t}{5} \right]$



iv) $y = \frac{1}{2} e^{-2t} (\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$



b) Alcanzaría el reposo más rápidamente. No podría oscilar en absoluto, como en el apartado iv).

c) Oscilaría más deprisa.

d) Apartado ii). La amplitud crecería sin tope.

69. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$

DERIVADAS E INTEGRALES

Reglas básicas de derivación

- $\frac{d}{dx} [cu] = cu'$
- $\frac{d}{dx} [u \pm v] = u' \pm v'$
- $\frac{d}{dx} [uv] = uv' + vu'$
- $\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
- $\frac{d}{dx} [c] = 0$
- $\frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1}u'$
- $\frac{d}{dx} [x] = 1$
- $\frac{d}{dx} [|u|] = \frac{u}{|u|} (u'), u \neq 0$
- $\frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}$
- $\frac{d}{dx} [e^u] = e^u u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{ctg} u] = -(\operatorname{cosec}^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{tg} u] = (\sec^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{cosec} u] = -(\operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u)u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{sec} u] = (\sec u \operatorname{tg} u)u'$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arccos} u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcctg} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arctg} u] = \frac{u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcosec} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Fórmulas básicas de integración

- $\int kf(u) du = k \int f(u) du$
- $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$
- $\int du = u + C$
- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$
- $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$
- $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C$
- $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
- $\int \sec u du = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$
- $\int \operatorname{cosec} u du = -\ln |\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u| + C$
- $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C$
- $\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + C$
- $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u du = -\operatorname{cosec} u + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

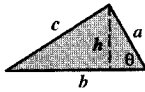
Triángulo

$$h = a \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bh$$

(Teorema del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

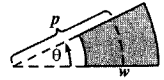


Sector de un anillo circular

(p = radio medio,

w = anchura,
 θ en radianes)

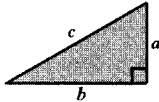
$$\text{Área} = \theta pw$$



Triángulo rectángulo

(Teorema de Pitágoras)

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Elipse

$$\text{Área} = \pi ab$$

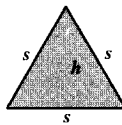
$$\text{Circunferencia} \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



Triángulo equilátero

$$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$$

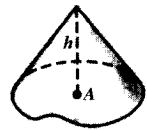
$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$$



Cono

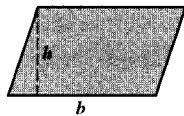
(A = área de la base)

$$\text{Volumen} = \frac{Ah}{3}$$



Paralelogramo

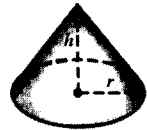
$$\text{Área} = bh$$



Cono circular recto

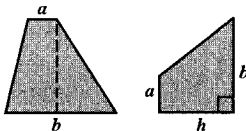
$$\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\text{Área lateral} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



Trapezio

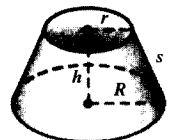
$$\text{Área} = \frac{h}{2} (a + b)$$



Tronco de cono

$$\text{Volumen} = \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$$

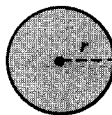
$$\text{Área lateral} = \pi s(R + r)$$



Círculo

$$\text{Área} = \pi r^2$$

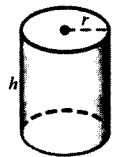
$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$



Cilindro circular recto

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área lateral} = 2\pi r h$$

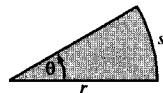


Sector circular

(θ en radianes)

$$\text{Área} = \frac{\theta r^2}{2}$$

$$s = r\theta$$



Esfera

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

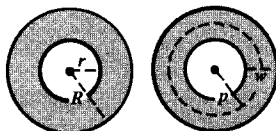


Anillo circular

(p = radio medio,

w = anchura)

$$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2) = 2\pi pw$$

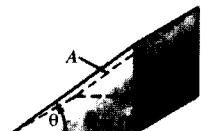


Cuña

(A = área de la cara superior,

B = área de la base)

$$A = B \sec \theta$$



ÁLGEBRA

Factores y ceros de polinomios

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si $p(a) = 0$, se dice que a es un *cerro* del polinomio y una solución de la ecuación $p(x) = 0$. Además, $(x - a)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n tiene n ceros (no necesariamente distintos). Aunque todos esos ceros pueden ser complejos, un polinomio real de grado impar ha de tener al menos un cero real.

Fórmula cuadrática

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, y $0 \leq b^2 - 4ac$, entonces los ceros reales de p son $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Factorizaciones especiales

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \dots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

Teorema de los ceros racionales

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, todos sus *ceros racionales* son de la forma $x = r/s$, donde r es un divisor de a_0 y s es un divisor de a_n .

Factorización por agrupamiento

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$$

Operaciones aritméticas

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$a \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{ab+ac}{a} = b+c$$

Exponentes y radicales

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

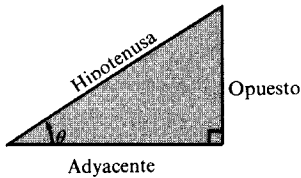
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

TRIGONOMETRÍA

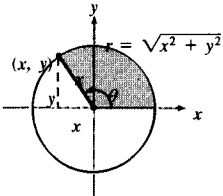
Definición de las seis funciones trigonométricas

Definición por triángulos rectángulos, con $0 < \theta < \pi/2$.

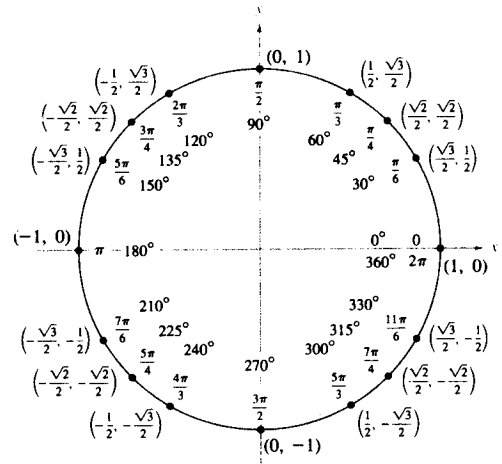


$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{\text{hip.}}{\text{op.}} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} & \operatorname{sec} \theta &= \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} & \operatorname{ctg} \theta &= \frac{\text{ady.}}{\text{op.}} \end{aligned}$$

Definición como funciones circulares, para ángulos θ arbitrarios.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{r}{y} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{r} & \operatorname{sec} \theta &= \frac{r}{x} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$



Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{1}{\operatorname{cosec} x} & \operatorname{sec} x &= \frac{1}{\operatorname{cos} x} & \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \operatorname{cos} x &= \frac{1}{\operatorname{sec} x} & \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

Identidades de tangente y cotangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Identidades de cofunciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{cos} x & \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{sec} x & \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{ctg} x \\ \operatorname{sec} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{cosec} x & \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Fórmulas de reducción

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x & \operatorname{cos}(-x) &= \operatorname{cos} x \\ \operatorname{cosec}(-x) &= -\operatorname{cosec} x & \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{sec}(-x) &= \operatorname{sec} x & \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u \pm v) &= \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v \pm \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{cos}(u \pm v) &= \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{tg}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} \end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2u &= 2 \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u \\ \operatorname{cos} 2u &= \operatorname{cos}^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2 \operatorname{cos}^2 u - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u \\ \operatorname{tg} 2u &= \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} \end{aligned}$$

Fórmulas de reducción de potencias

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 u &= \frac{1 - \operatorname{cos} 2u}{2} \\ \operatorname{cos}^2 u &= \frac{1 + \operatorname{cos} 2u}{2} \\ \operatorname{tg}^2 u &= \frac{1 - \operatorname{cos} 2u}{1 + \operatorname{cos} 2u} \end{aligned}$$

Fórmulas suma-producto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{u+v}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{u-v}{2} \right) \\ \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v &= 2 \operatorname{cos} \left(\frac{u+v}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{u-v}{2} \right) \\ \operatorname{cos} u + \operatorname{cos} v &= 2 \operatorname{cos} \left(\frac{u+v}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{u-v}{2} \right) \\ \operatorname{cos} u - \operatorname{cos} v &= -2 \operatorname{sen} \left(\frac{u+v}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{u-v}{2} \right) \end{aligned}$$

Fórmulas producto-suma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v &= \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(u-v) - \operatorname{cos}(u+v)] \\ \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v &= \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(u-v) + \operatorname{cos}(u+v)] \\ \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)] \\ \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)] \end{aligned}$$

Índice

- Abierta, esfera, 1123
Abierta, región, 1116, 1123
Abierto, disco, 1116
Absoluto, máximo, 1177
Absolutos, extremos, 1177
Aceleración, 1064, 1065
 centrípeta, 1080
 normal, 1079, 1080
 tangencial, 1079, 1080
 vector, 1079
Acotada, región, 1177
Algebraicas, propiedades, del producto vectorial, 1004
Alternativas, forma de la derivada direccional, 1157
Alternativas, formas del teorema de Green, 1333
Amplitud de una función trigonométrica, 1333
Angular, velocidad, 1246
Ángulo
 de incidencia, 903
 de inclinación de un plano, 1172
 de reflexión, 903
 entre dos planos, 1040
 entre dos vectores no nulos, 993
Apolonio (262-190 a. de C.), 900
Aproximación
 por diferenciales, 1138
 por series de Taylor, 1423
Arco, longitud de
 de una curva espacial, 1085
 en forma paramétrica, 930, 931
 en forma polar, 952
 función, 1086
 parámetro, 1086, 1088
Armónica, función, 1301
Arquímedes, espiral de, 933, 940
- Área
 dada por una integral de línea, 1332
 de una región plana, 1212
 de una superficie de revolución, 933, 953
 de una superficie paramétrica, 1343
 en coordenadas polares, 948
 por una integral doble, 1213
Asíntota de una hipérbola, 908
- Bernouilli, ecuaciones de, 1395
Bernouilli, James (1654-1705), 924, 938
Brahe, Tycho (1706-1749), 960
Braquistocrona, problema de la, 924
- Cadena, regla de la
 derivación implícita, 1150
 funciones de varias variables, 1144
 una variable independiente, 1144
Calor, ecuación del, 1133
Cambio de variables
 a forma polar, 1233
 en integrales dobles, 1279
Campo de velocidades, 1290, 1291
Canónica, forma
 de la ecuación de las superficies cuadradas, 1024
 de la ecuación de un plano en el espacio, 1013
 de la ecuación de una elipse, 904
 de la ecuación de una esfera, 984
 de la ecuación de una hipérbola, 908
 de la ecuación de una parábola, 901
 de una ecuación diferencial de primer orden, 1392
- Canónica, posición, de un vector, 971
Canónicos, vectores unitarios, 976
 en el espacio, 985
 en el plano, 976
 notación, 985
Caracol, 944
Características, ecuación, de una ecuación diferencial, 1404
Cardioide, 943
Cauchy-Riemann, ecuaciones diferenciales de, 1153
Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 1002
Central, campo de fuerzas, 1291
Centrípeta, aceleración, 1080
Centro
 de curvatura, 1092
 de masas, 1243, 1263
 de una lámina plana de densidad variable, 1243
 de una elipse, 904
 de una hipérbola, 908
Centroide, 1243
Cerrada, curva, 1322
Cerrada, región, 1116
Cerrada, superficie, 1363
Cerrado, disco, 1116
Cicloide, 922
 curtata, 926
 prolata, 926
Cilíndricas, sistema de coordenadas, 1033
 conversión a rectangulares, 1034
 conversión de rectangulares a, 1034
 integración en, 1269
Cilíndricas, superficies, 1023
Cilindro, 1023
Cinética, energía, 1323
Circulación, 1375

- Círculo,
 - de curvatura, 1092
 - forma polar de la ecuación del, 944
- Clasificación de las cónicas por su excentricidad, 957
- Cobb-Douglas, función de producción de, 1109
- Comparación de gradientes, 1173
- Complejos, números, 1405
- Componente, de la aceleración
 - centrípeta, 1080
 - normal, 1079, 1080
 - tangencial, 1079, 1080
- Componentes de un vector, 997
- Compuesta, función, 1106
- Computadora, gráficas por, 1110
- Conexa, región 1320
- Cónica(s), 900
 - clasificación de, 957
 - degeneradas, 900
 - en forma polar, 958
- Conjugado, eje, de una hipérbola, 908
- Conservativos, campos vectoriales, 1294, 1320
 - criterio de, 1294, 1298
- Continua
 - en un punto, 1121, 1123
 - en una región abierta, 1121, 1123
- Continuidad
 - de una función compuesta, 1122
 - de una función de dos variables, 1121
 - de una función de tres variables, 1123
 - de una función vectorial, 1050
 - y derivabilidad, 1140
- Contorno, línea de, 1108
- Contorno, mapa de, 1108
- Conversión
 - de coordenadas, 939
 - de cilíndricas a rectangulares, 1033
 - de esféricas a rectangulares, 1037
 - de polares a rectangulares, 939
 - de rectangulares a cilíndricas, 1033
 - de rectangulares a esféricas, 1037
 - de rectangulares a polares, 939
- Coordenada(s)
 - conversión de, 939
 - de un punto en el espacio, 983
- Coordenadas, sistema de
 - cilíndricas, 1033
 - esféricas, 1037
 - tridimensionales, 983
- Coordenada x , 983
- Coordenada y , 983
- Coordenada z , 983
- Coordenados, planos, 983
- Copérnico, Nicolás (1473-1543), 904
- Coulomb, ley de, 1292
- Criterio para campos vectoriales conservativos
 - en el espacio, 1298
 - en el plano, 1295
- Criterios, puntos, 1178
 - y extremos relativos, 1178
- Cuadráticos, suma de errores, 1189
- Cuádriga, superficie, 1024
- Curtata, cicloide, 926
- Curva
 - cerrada, 1322
 - de nivel, 1173
 - en el espacio, 1047
 - gráfica de una, 917
 - orientación de una, 917, 1302
 - plana, 916
 - simple, 1327
 - suave a trozos, 923, 1302
- Curvas en el espacio, 1047
 - curvatura, 1090
 - longitud de arco, 1085
- Curvatura, 1089
 - centro de, 1092
 - círculo de, 1092
 - en coordenadas rectangulares, 1091
 - en el espacio, 1090
 - en relación con la aceleración y la velocidad, 1093
 - fórmulas para la, 1090
 - radio de, 1092
- Cúspides, 1058
- d'Alembert, Jean le Rond (1717-1799), 1126
- Definida, integral, de una función vectorial, 1060
- Degenerada, cónica, 900
- Delta, δ , 1116
- Densidad, función, 1240, 1263
- Dependiente, variable, 1105
- Derivabilidad, 1136
- Derivabilidad y continuidad, 1140
- Derivable (diferenciable), función
 - en dos variables, 1136
 - en tres variables, 1139
 - en una región, 1136
- Derivación
 - de una función vectorial, 1056
 - parcial, 1126, 1150
- Derivada(s)
 - de una función vectorial, 1055
 - direccional, 1143, 1154, 1156, 1163
 - en forma paramétrica, 928
- Derivada(s) parcial(es), 1341
 - de orden superior, 1130
 - de una función de dos variables, 1126
 - de una función de tres o más variables, 1129
 - implícitas, 1149
 - mixstas (cruzadas), 1130
 - notación para las, 1127
 - primera, 1126
- Determinante, forma de, para el producto vectorial, 1003
- Dextrógira, orientación, 983
- Diferencia (resta) de dos vectores, 972
- Diferenciable, 1136, 1139
 - función vectorial, 1055
- Diferencial, 1136
 - operador, 1297, 1299
 - total, 1136
- Diferencial, ecuación
 - exacta, 1384
 - homogénea lineal de orden superior, 1407
 - lineal
 - de orden superior, 1403
 - de primer orden, 1392
 - de segundo orden, 1403
 - inhomogénea, 1403
 - solución por serie de potencias, 1421
 - resumen de primer orden, 1392
- Diferencial, forma, de una integral de línea, 1311
- Direccional, derivada, 1153, 1154, 1157, 1163
- Direccional, derivada, de una función de tres variables, 1163
- Directores (de dirección), ángulos, 995
- Directores (de dirección), vector, 1011
- Directrices, 1023
- Directriz
 - de un cilindro, 1023
 - de una parábola, 901
- Dirigido, segmento, 970
- Disco(s)
 - abierto, 1116
 - cerrado, 1116
- Distancia
 - entre dos puntos en el espacio, 984
 - entre un punto y un plano en el espacio, 1016
 - entre un punto y una recta en el espacio, 1018
- Distancia, fórmula de la, en el espacio, 984
- Divergencia de un campo vectorial, 1299

- Divergencia de un campo vectorial
 (Cont.)
 y rotacional, 1299
 Divergencia nula, 1299
 Divergencia, teorema de la, 1334, 1363
 Dobles, integrales, 1219, 1221, 1222
 en coordenadas polares, 1231
 propiedades, 1222
 Dominio
 de una función de dos variables, 1104
 de una función vectorial, 1047
 Doyle, regla Log de, 1115
 Ecuación
 de Bernoulli, 1395
 de un cilindro, 1023
 del plano tangente, 1169
 homogénea, 1403
 inhomogénea, 1403
 Eje
 conjugado de una hipérbola, 908
 de una parábola, 901
 mayor de una elipse, 904
 menor de una elipse, 904
 transversal de una hipérbola, 908
 Elasticidad del coste, 1391
 Eléctrica, campos de fuerza, 1291
 Eliminación de un parámetro, 918
 Elipse, 903
 centro de la, 904
 ecuación canónica, 904
 ecuación en forma polar, 957
 eje mayor, 904
 eje menor, 904
 excentricidad de la, 906
 focos de la, 906
 propiedad de reflexión, 906
 vértices, 904
 Elipsoide, 1024
 Elíptico, cono, 1024
 Elíptico, paraboloides, 1024
 Energía
 cinética, 1323
 conservación de la, 1364
 potencial, 1323
 Entorno, en el plano, 1116
 Epicloide, 927, 931
 Equipotenciales, líneas, 1108
 Equivalente(s)
 condiciones, 1322
 segmentos dirigidos, 970
 Esbozo de planos en el espacio, 1016
 Escalar, 970
 Escalar, campo, 1173
 Escalar, multiplicación por un, 972
 Escalar, producto, 992
 propiedades, 992
 Escalares, cantidades, 970
 Esfera, 984
 ecuación de la, 984
 Esféricas, coordenadas, 1036
 conversión a rectangulares, 1037
 integrales triples en, 1048
 Esféricas, sistema de coordenadas,
 1037
 Especiales, gráficas polares, 944
 Espiral de Arquímedes, 933, 940
 Euler, Leonhard (1707-1783), 1126
 Euler, método de, 1391
 Evaluación
 de integrales dobles, 1222
 de integrales iteradas, 1259
 Evitable, discontinuidad, 1121
 Exacta, ecuación diferencial, 1384
 Exactitud, criterio de, 1385
 Excentricidad
 de una cónica, 957
 de una elipse, 906
 de una hipérbola, 909
 en forma polar, 957
 Exteriores, límites, de integración, 1212
 Extremos, aplicaciones en los, 1186
 Extremos, teorema de los valores, 1177

 Faraday, Michael (1791-1867) 1323
 Flujo, integral de, 1356
 Flujo y el teorema de la divergencia,
 1368
 Focal, cuerda, 902
 Foco (s)
 de una cónica, 958
 de una elipse, 904
 de una hipérbola, 908
 de una parábola, 901
 Forma general
 de la ecuación de un plano en el es-
 pacio, 1013
 de una ecuación de segundo grado,
 901
 Fórmulas para la curvatura, 1090
 Forzado, movimiento de un muelle,
 1409
 Frontera, punto, 1116
 Fubini, Guido (1879-1943), 1224
 Fubini, teorema de, 1224
 para integrales triples, 1259
 Fuente, 1369
 Fuerza, de rozamiento, 1094
 Fuerzas, campo de, 1290
 central, 1291
 conservativo, 1294
 Función(es)
 de dos variables, 1215
 continuidad de, 1121
 diferenciable, 1136
 dominio, 1104
 gradiente, 1157
 gráfica de, 1106
 límite de, 1107
 recorrido, 1109
 de tres variables, 1163
 continuidad de, 1123
 derivada direccional, 1166
 derivada parcial, 1129
 gradiente, 1163
 de varias variables, 1104
 linealmente dependiente, 1403
 linealmente independiente, 1403
 vectorial, 1046

 Gauss, Carl Friedrich (1777-1855),
 1363
 Gauss, ley de, 1360
 Gauss, teorema de, 1363
 General, ecuación de segundo grado,
 901
 Generatriz (directriz), curva, 1023
 Geométricas, propiedades
 del producto mixto, 1007
 del producto vectorial, 1004
 Germain, Sophie (1776-1831), 1412
 Gibbs, Josiah Willard (1839-1903),
 1004, 1302
 Giro, radio de, 1246
 Grad, 1157
 Gradiente
 de una función de dos variables,
 1157
 de una función de tres variables,
 1162
 normal a las curvas de nivel, 1161
 normal a las superficies de nivel,
 1162
 Gráfica(s)
 de una curva, 918
 de una ecuación paramétrica, 916
 de una función de dos variables,
 1106
 Gravedad, fuerza debida a la, 1069
 Gravitatorios, campos, 1291
 Green, George (1789-1841), 1329
 Green, teorema de, 1327
 formas alternativas, 1333

- Halley, Edmund (1656-1675), 960
 Halley, cometa, 960
 Hamilton, William Rowan (1805-1865), 973
 Hechicera de Agnesi, 1054
 Hélice, 1048
 Helmholtz, Hermann Ludwig (1821-1894), 1323
 Herschel, Caroline (1750-1848), 910
 Hipérbola, 908
 asíntotas, 908
 centro, 908
 eje conjugado, 908
 eje transversal, 908
 excentricidad, 908
 forma canónica, 908
 forma polar de la ecuación, 957
 vértices, 908
 Hipérbólico, paraboloide, 1024
 Hipérboloide
 de dos hojas, 1024
 de una hoja, 1024
 Hipocicloide, 927
 Homogénea, ecuación, 1403
 Horizontal, componente de un vector, 976
 Horizontalmente, simple, región, 1213
 Hypatia (370-415), 900
- Igualdad de derivadas parciales cruzadas (mixtas), 1131
 Igualdad de vectores, 971, 985
 Iguales, vectores, 971
 Implícita, derivación parcial, 1149
 Indeterminados, coeficientes, 1413
 Inhomogénea, ecuación, 1403
 Inhomogénea, ecuación lineal, 1412
 Integración
 de una función vectorial, 1060
 factor integrante, 1387
 límites de, 1212
 región de, 1212
 resumen de fórmulas, 1377
 Integral,
 de flujo, 1356
 de línea, 1303
 de superficie, 1349
 doble, 1219, 1221
 iterada, 1212
 triple, 1258
 Interior, punto, 1116, 1123
 Inverso, campo cuadrático, 1292
 Involuta de un círculo, 966
 Irrotacional, 1297
- Isobaras, 1108
 Isoterma, 1108
 Isoterma, superficie, 1110
 Iterada, integral, 1210, 1212
- Jacobi, Carl Gustav (1804-1851), 1277
 Jacobiano, 1277
 Joule, James Prescott (1818-1851), 1323
- Keppler, Johannes (1571-1630), 907, 960
 Keppler, leyes, 960
 Kovalesky, Sonya (1850-1891), 1112
- Lagrange, Joseph Louis (1736-1813), 1196
 Lagrange, multiplicadores, 1195
 método de los, 1189
 con dos ligaduras, 1200
 Lagrange, teorema de, 1196
 Laplace, ecuación de, 1133, 1204
 Laplaciano, 1301
Latus rectum, 902
 de una parábola, 901
 Legendre, Adiren Marie (1752-1833), 1189
 Lemniscata, 944
 Levógira, orientación, 983
 Ley de la conservación de la energía, 1323
 L'Hôpital, regla de, 945
 Libre, movimiento, de un muelle, 1412
 Ligadura, 1195
 Límite(s)
 de integración
 exterior, 1212
 interior, 1212
 de una función de dos variables, 1117
 de una función vectorial, 1050
 Línea, integral(es) de, 1303
 como integral definida, 1304
 de un campo vectorial, 1307
 forma diferencial, 1311
 independencia del camino, 1320
 para el área, 1332
 teorema fundamental de las, 1316, 1317
 Línea, aproximación, 1138
 de soluciones, 1404
 Lineal, ecuación diferencial
 de orden n , 1403
 homogénea de segundo orden, 1403
- inhomogénea de segundo orden, 1403
 Lineal, ecuación diferencial de primer orden, solución de, 1392
 Linealmente dependientes, funciones, 1403
 Linealmente independientes, funciones, 1403
 Longitud
 de un múltiplo escalar, 975
 de un vector, 971, 972
 Lugar geométrico, 901
- Marginal, productividad, del dinero, 1199
 Masa(s), 1240
 centro de, 1242
 de una lámina plana, 1240
 momentos de, 1242
 Máximo(s), 1177
 absoluto, 1177
 relativo, 1177
 Maxwell, James (1831-1879), 973
 Mayor, eje, de una elipse, 904
 Medio, punto, entre dos puntos en el espacio, 984
 Menor, eje, de una elipse, 904
 Método de coeficientes indeterminados, 1413
 Método de los multiplicadores de Lagrange, 1195, 1196
 con dos ligaduras, 1200
 Mínimos cuadrados
 método de los, 1188
 recta de regresión, 1189, 1190
 regresión cuadrática, 1193
 Mixtas (o cruzadas), derivadas parciales, 1130
 Mixto, producto, 1007
 Modelos matemáticos, 1188
 Momento(s)
 de inercia, 1245, 1263
 de segundo orden, 1245
 polar, 1245
 de masa, 1243
 de masa de una lámina plana de densidad variable, 1243
 de primer orden (primer momento), 1245, 1264
 de segundo orden (segundo momento), 1245, 1264
 de una fuerza, 1006
 de una fuerza respecto de un punto, 1006
 Movimiento de un proyectil, 1069

- Muelle, constante de un, 1409
- Múltiple(s), integral(es)
 en coordenadas no rectangulares,
 1231, 1269
 iterada, 1212
 triples, 1258
- Negativo (opuesto), de un vector, 972
- Newton, Isaac (1642-1727), 938
- Newton, ley de la gravitación universal
 de, 1291
- Newton, segunda ley del movimiento
 de, 1069
- Nivel, curvas de (o de contorno), 1108
- Nivel, superficie, 1110
- No evitable, discontinuidad, 1121
- Nodo, 1058
- Noether, Emmy (1882-1935), 975
- Norma
 de un vector, 972
 de una partición, 1220, 1232, 1258
- Normal, aceleración, 1079, 1080
- Normal, recta
 a una superficie, 1167, 1168
- Normal, vector, 1074, 1341
 a un plano, 1012
 a una curva, 1075
 a una superficie parametrizada, 1342
 unitario, 1075
- Normalización de un vector, 975
- Nulo (cero), vector, 971, 985
- Octantes, 983
- Ondas, ecuación de, 1133
- Operaciones
 con vectores, 972
- Optimización, problemas de, 1186,
 1197
- Orden de integración, 1215, 1226
- Orden superior, derivadas de, parcia-
 les, 1130
- Orden superior, ecuaciones diferencia-
 les lineales, 1407
- Orientable, 1355
- Orientación de una curva
 en el espacio, 1302
 en el plano, 917
 en una superficie, 1355
- Orientada, superficie, 1355
- Ortogonal(es)
 proyección, 996
 vectores, 994
- Ostrogradsky, Michel (1801-1861),
 1363
- Parábola,
 cuerda focal, 902
 directriz, 901
 ecuación en forma canónica, 901
 ecuación en forma polar, 957
 eje, 901
 foco, 901
latus rectum, 902
 propiedad de reflexión, 903
 vértice, 901
- Paraboloide, 1026
- Paralelepípedo, volumen de un, 1007
- Paralelos, planos, 1014
- Paralelos, vectores, 986
- Paramétrica, derivada en forma, 928
- Paramétricas, ecuaciones, 917, 1028
 área de una superficie de revolución,
 933
 de superficies, 1340
 de una recta en el espacio, 1011
 y longitud de arco, 931
- Parámetro, 917
- Partición
 interior, 1219
 polar, 1231
 norma, 1219
- Pendiente, 928, 942
 de forma polar, 942
 de una superficie en la dirección x ,
 1127
 de una superficie en la dirección y ,
 1127
- Plano xy , 983
- Plano xz , 983
- Plano yz , 983
- Primer orden, ecuación diferencial de,
 1392
- Primer orden, ecuación diferencial li-
 neal de, 1392
- Primera derivada parcial, 1126
 notación, 1127
- Radiales, rectas, 938
- Radio del círculo
 de curvatura, 1092
 de giro, 1246
- Rapidez, 1064, 1065
- Recorrido de una función de dos varia-
 bles, 1104
- Recta, en el espacio
 ecuaciones paramétricas, 1011
 ecuaciones simétricas, 1011
 número de dirección, 1011
 vector de dirección, 1011
- Recta de impacto, 1168
- Rectangulares, coordenadas
 conversión a cilíndricas, 1034
 conversión a esféricas, 1037
 conversión a polares, 939
- Reflectante, superficie, 903
- Reflexión, ángulo de, 903
- Reflexión, propiedad de
 de una elipse, 906
 de una parábola, 903
- Región en el plano
 abierta, 1116
 área, 1212
 centroide, 1243
 cerrada, 1116
 conexa, 1320
 de integración, 1212
 horizontalmente simple, 1213
 simplemente conexa, 1327
 sólido simple, 1364
 verticalmente simple, 1213
- Relativo, mínimo, 1177, 1180
 criterio de las segundas derivadas
 parciales, 1180
- Relativos, extremos, 1177
 y puntos críticos, 1178
- Resumen de ecuaciones diferenciales
 de primer orden, 1397
- Resumen de fórmulas de integración,
 1397
- Resumen de integrales de línea y de su-
 perficie, 1360
- Resumen de velocidad, aceleración y
 curvatura, 1095
- Revolución, superficie de, 953
- Rosa, curva, 941
- Rotación, 1375
- Rotacional de un campo vectorial, 1297
 y divergencia, 1299
- Rozamiento, 1094
- r -simple, región, 1233
- Segundas derivadas parciales, criterio
 de las, 1180
- Segundo orden, ecuación diferencial
 homogénea, 1403
- Segundo orden, ecuación diferencial li-
 neal homogénea, 1403
- Segundo orden, ecuación diferencial
 inhomogénea, 1403
- Silla, punto, 1180
- Simétricas, ecuaciones, de una recta en
 el espacio, 1011
- Simple, curva, 1327

- Simple, región sólida, 1364
- Simplemente conexa, región, 1327
- Snell, ley de la refracción de, 1203
- Solenoidal, 1299
- Solución(es), de una ecuación diferencial de primer orden, 1393
- Sommerville, Mary Fairfax (1780-1872), 1105
- Stokes, George Gabriel (1819-1903), 1372
- Stokes, teorema de, 1334, 1372
- Suave, curva, 934, 1057, 1302
en un intervalo abierto, 1057
- Suave, parametrización, 1340
- Suave, superficie, 1347
- Suficientes, condiciones, para la diferenciabilidad, 1137
- Suma de vectores, 972, 985
- Suma de errores cuadráticos, 1188
- Sumidero, 1369
- Superficie(s), 1023
cerrada, 1363
en el espacio, 1023
orientación, 1355
- Superficie, área de una, 1249, 1250, 1343
- Superficie, integrales de, 1349
- Superficies de revolución, 1029
área, 933
área en forma parametrizada, 933
área en forma polar, 953
- Superficies parametrizadas, 1338
área, 1343
ecuación, 1338
integrales de superficie, 1354
- Tangencial, aceleración, 1079, 1080
- Tangente, plano, a una superficie, 1167, 1169, 1341
- Tangente, recta, 928, 942
a una curva, 1075
en el polo, 943
en forma polar, 944
- Tangente, vector, 1065, 1074
unitario, 1075
- Taucrona, problema de la, 923
- Taylor, series de, solución de ecuaciones diferenciales por, 1424
- Teorema fundamental de las integrales de línea, 1316, 1317
- Terminal, punto, de un vector, 970
- θ -simple, región, 1233
- Thompson, William (1824-1907), 1371
- Topográfico, mapa, 1108
- Total, diferencial, 1136
- Trabajo, 999, 1307
dado por una integral de línea, 1308
forma vectorial, 999
- Transformación, 1278
- Transversal, eje de una hipérbola, 908
- Trayectorias, 1117, 1302
- Traza, 1015
de una superficie, 1024
- Triangular, desigualdad, 976
- Tridimensional, sistema de coordenadas, 983
- Triples, integrales, 1258
en coordenadas cilíndricas, 1269
en coordenadas esféricas, 1272
- Unitario, vector, 972, 975
canónico, 976
- Unitario, vector normal, 1076
- Unitario, vector tangente, 1075
- Variación de los parámetros, 1417
- Vector(es)
ángulo entre, 994
combinación lineal, 976
componentes, 997, 998
diferencia, 972
en el espacio, 985
en el plano, 970
igualdad, 971
longitud, 970, 975
multiplicación por un escalar, 972, 785
negativo (opuesto) de un, 976
norma, 971
normalización, 975
nulo, 971, 985
ortogonales, 995
paralelos, 986
posición canónica, 971
producto escalar, 992
producto mixto, 1007, 1008
producto vectorial, 1002
propiedades, 974
proyección de un, 996, 997
punto terminal, 970
resultante, 972
suma, 972
tangente, 1065
unitario, 972
velocidad, 1065
- Vectores, suma de, en el espacio, 985
- Vectorial, campo, 1290
circulación, 1375
conservativo, 1294
divergencia, 1299
fuente, 1369
incompresible, 1299
integral de línea de un, 1308
irrotacional, 1297
libre de divergencia, 1299
rotación de un, 1375
solenoidal, 1299
sumidero, 1369
- Vectorial (lineal), espacio, 974
- Vectorial, producto de dos vectores, 1002
propiedades del, 1004
- Vectorial(es), función(es), 1046
continua en un intervalo, 1050
continua en un punto, 1050
derivación, 1056
derivada, 1055
dominio, 1047
integración, 1059
límites, 1050
propiedades de la derivada, 1058
resumen de propiedades, 1095
- Velocidad, 1064
resumen de aceleración y curvatura, 1095
- Velocidad, 1064
resumen de aceleración y curvatura, 1095
- Velocidad, vector, 1065, 1291
- Vértice(s)
de una elipse, 904
de una hipérbola, 908
de una parábola, 901
- Vértices de una elipse, 904
- Vértices de una hipérbola, 908
- Vertical, componente de un vector, 976
- Verticalmente simple, región, 1213
- Volumen
de un sólido, 1219, 1222
por integrales triples, 1258
por integrales dobles, 1222
- Wren, Christopher, 931
- Wronskiano de dos funciones, 1411